数理解析研究所講究録
第 1801 巻 2012 年 80-92

山崎秀記氏の問題提起に関連して

大阪大学　　伊達　悦朗

1　初めに

情報科学に向けての教育数学ということで山崎先生よりお話があり，それを受けての話という研究代表者からのご依頼でした.

「教育数学」という言葉については今回の研究会にさせていただくまで考えてみたこともなかったので誤解している部分も多いかと思いますが，山崎先生のお話のアブストラクトをいただいて考えたことおよび研究会でいくつかお話をうかがって思ったことを並べてみたいと思います．研究集会が終わってから東日本大震災，それに伴う原発事故が起こり今に至も大きな影響が続いています．数字の持つ意味合いについて，確率，統計がらみの言葉も飛び交いました．関連して考えるべき事は多いと思います.

事前に思い浮かべたこと (当日話さなかったことも込めて) は次のようなことです.

- 小平邦彦氏の中初等教育についての見解
- Neal Koblitz の意見
- Donald Knuth の提言
- 新指導要領での初等整数論の扱い

それらについて，およびその後で思いついたことを順にもう少し詳しく述べていきたいと思います．実際に学生に接して思うことに偏った気もします．引用が多く，多少の感想を加える程度であることをご容赦下さい.

2　小平先生の New Math 批判

40 年余り前，大学二年生の頃のこと中岡稔先生が　general topology の講義のなかで小平先生の「科学」の論説　「New Math 批判」について触れられました．中岡先生がどのような話の流れでそのことをおっしゃったかは残念ながら憶えてはいませんが強く印象に残っています.

その論説は今では，たとえば，小平邦彦「怠け数学者の記」岩波現代文庫に収められています．他に関連する論説として

- 「このままでは日本は危ない」初等教育資料　1983.3
- 「原則を忘れた初等・中等教育　–何のために，そして誰のために急ぐのか–」科学　1984.1 追記
- 「New Math 批判」科学 1968.10
- 「数学教育を歪めるもの」文藝春秋　1975.8
- 「不可解な日本の数学教育」通産ジャーナル 1976.6

も収められています．これらの論説にある目に留まったものとしては，私の誤読も込めて

- 子供の生育に合わせた教育を　適齢期があるのではないか　教科間の勢力争いはないか
- ものを教える順序がらあり，教えるのに適当な年齢がある　歴史的順序に沿った教育を
- 初等中等教育についての提言
  - 教科別に能力別学級編成
  - 飛び級
  - 偏った才能を持つ生徒は特別に考慮する
- パターン化した問題　1983年の新入生の反応「高校までの授業ではわれわれは常に受け身で，自分でちゃんと理解していなくても問題は解けたので，わかるまで考えるということに慣れていないのではないかと思います」
- 受験勉強が受験技術の練習に堕してしまった
- 「急ぐ」教育　わかるまで考えない　問題が解ければよい
- 子供は小型の大人ではない
- 推薦入学の生徒の面接で10人中九人までが微分係数の定義を知らなかった　それは入試にでないから

などでしょうか．

それらのうちの「New Math 批判」本文から引用してみます．お嬢さんがSMSGの教科書を用いる教育実験の級に編入されたそのときの体験に絡む部分からの後です．集合論と公理主義の教育に係る部分です．

『まず集合論であるが、子供に無限集合は無理であるから、有限集合を教えることになる。例えば{}なる形の括弧の間に馬と鹿と豚の絵が書いてあるものと、もう一組の括弧の間に豚と犬の絵がかいてあるものが∩なる記号で結ばれていれば、答は{豚}であり、二番目の括弧の中が鳥と犬ならば、答は∅であるというようなことを教えるのであろう。子供は初めは仲々わかってくれない。しかし、ゲームと思えば、こんなことはツー・テン・ジャック等よりはるかに易しいから、その内に「分かった。何でもない」と言いだす。そして同様な宿題はすらすらできるようになる。同時に数学というものはつまらないことを難しそうに言う変てこな馬鹿らしい学問だと考えるようになる。ついでに大学の数学の先生もこんなつまらないことを偉そうにしているらしいと軽蔑されてしまうのである。

それで、果たして集合の概念がわかったかというと、それは頗る怪しいと思う。ある子供が「自分と自分の兄弟は集合ではない。何となれば自分達の周りには括弧がないから」と言ったという話がある。一対一の対応も子供にはやはりつまらないことを偉そうに言うといった印象を与えるようである。

現代の数学は集合論の影響を強く受けていて、集合論が数学の基礎であると考えるが、集合論が創まったのは十九世紀も終りに近くなってからであって、数学は集合論が創まる二〇〇〇年も前から存在していたことを忘れてはならない。殊に高校程度の数学は集合論の創まるはるか以前に完成されていたのである。進歩発展するものの典型的なものは生物であるが、生物の「個体発生は系統

の進化を繰返す」ということがある。同様に、数学の教育も数学の歴史的発展の順序に従って行われるべきであろう。現代の数学では集合がもっとも基本的な概念であると考えるが、論理的に基本的な概念であることと、子供にとって初等的な概念であることは別なことである。むしろ歴史的に早く現れた概念ほど子供にとってわかり易いのであろう。集合論が十九世紀の終り近くまで現れなかったという歴史的事実が、既に集合が決して初等的な概念でないということを示していると思う。数学者は集合が基本的なわかり易い概念であると考えるが、それは多年の専門的訓練の結果であって、それを忘れて、物の数を数えるという操作は集合の一対一対応に基づいている等といっても、子供は仲々納得してくれないのである。

さらに、集合論は元来無限集合考えるために創められたものであって、まず有限集合の集合論があって、それが発展して無限集合の集合論になったのではない。一対一の対応なる概念も、二つの無限集合の大小を比較するために導入されたのであろう。有限集合の大小は、その元の数を数えてみればすぐにわかるから、何も、わざわざ一対一の対応を持出す必要はない。一対一の対応が重要な概念であることを理解するには、したがって一対一の対応がつかない二つの無限集合が実際に存在することを見なければならない。このためには、例えばカントールの対角線論法を用いて実数全体の集合が非可附番である（自然数全体の集合より大きい）ことを理解せねばならない。要するにカントールの対角線論法を理解しうる程度に達しなければ集合論の意義はわからないのである。だから集合論を教えるには、歴史的発展の順序にしたがって、カントールの対角線論法あたりから始めるべきであると思う。

こう考えてくると、子供に有限集合の集合論を教えて、かえって軽蔑される理由がわかると思う。有限集合論は歴史的発展の順序を無視して集合論から人工的に切離され初等的な数学の中にはめ込まれたものであって、そこには何ら必然性がないから、子供には何のために集合論を習うのかわからない。その上につまらないことを難しそうに言うだけで、何の役にたつのかもわからない。子供にすれば軽蔑したくなるのも当然であろう。

つぎに数学の公理主義を子供に教えることについて考えてみよう。現代数学の主流をなす公理主義によれば、数学の各理論体系は公理的に構成される、すなわち、いくつかの公理からすべて論理的に導き出される。そして公理は理論の前提として仮定された命題であって、その選び方は、矛盾を含まない限り全く任意である。つまりいくつかの命題を任意に選んで公理として、それから論理的に導き出される命題を順次並べていけば、矛盾に到達しない限り、数学の一つの理論体系ができあがあると言うのである。古典的なユークリッド幾何は公理的に構成された理論体系の典型であるが、その公理は「自明な真理」であって、理論の前提として仮定された任意の命題ではない。現代数学の公理主義が確立されたのは集合論より新しく二〇世紀になってからである。

公理主義によれば公理は理論の前提として仮定された任意の命題である。しかし、私は、これは現代数学の言わば表看板であって、実際には、公理はやはり任意ではなくて、「自明の真理」ではないにしてもそれに近い性格をもっていると思う。数学をゲームにたとえれば、公理はゲームの規則に相当する。ゲームの規則はそのゲームが面白くなければ意味がない。そして意味のあるゲームの規則は囲碁、将棋、チェス等せいぜい数百種した知られていない。任意に選ばれたゲームの規則は意味がないことを示している。数学も同様で、公理系は興味ある理論体系導き出す生成力をもっ

たものでなければならないが、任意に選ばれた公理系が生成力をもたないことは新しい公理系を発見しようとした数学者ならば誰でも知っている。生成力をもつ公理系は「自明な真理」に近い性格をもっていると思うのである。

私が子供だった頃には、中学校の数学は代数と幾何だけで、幾何は古典的なユークリッド幾何であった。そして中学生はユークリッド幾何によって自然に公理的構成の考え方を学んだ。ところが私がアメリカで見た new math 流の教科書では、代数の演算を材料として公理主義の考え方を教える。つまり代数の演算の諸法則の中から一部を抜き出して公理と考え、残りをそれから導き出して見せる。例えば $ab=ba$ と $a(b+c)=ab+ac$ を仮定して $(b+c)a=ba+ca$ を証明するといった類である。これがまた子供にはつまらないことをわざと難しくしているという印象を与えるようである。$ab=ba$ と $a(b+c)=ab+ac$ が公理で $(b+c)a=ba+ca$ が定理であるというのは二〇世紀の新しい考え方で、十八世紀の数学しか知らない子供に理解されないのは当然であろう。非ユークリッド幾何、非結合代数、等のように、普通の公理系と異なる公理系をもつ体系を知らなければ、公理系が任意の前提であることの意義は理解されないと思う。自明な $a(b+c)=ab+ac$ を用いて同程度に自明な $(b+c)a=ba=ca$ を証明して見せても子供は感心してくれない。これに反して、ユークリッド幾何では明らかに自明な公理から出発して順次に自明でない複雑な定理が証明されていく。子供には公理的構成の意義がよくわかると思う。歴史的発展の順序から考えても、ユークリッド幾何はもっとも初等的な数学であって、子供にとってもっともわかり易い数学である。また、十八世紀およびそれ以前においては、ユークリッド幾何がただ一つの公理的に構成された理論体系であった。だから私は子供に公理的構成の考えを教える材料はユークリッド幾何に限ると思うのである。』

ここでの論点の多くは初等・中等教育に関するものかとは思いますが，大学での「教育数学」も初等・中等教育の積み重ねの上にあるという見方から，考えてみるべき意見かと思います．

その点からも今の流れにとってまず関係あると思われるのは，教えるのには適齢期があるという点と歴史的順序に沿った教育をという部分かと思います．

このよう見方からは，はたして現在の大学の初年次の教育のある種の定番となっている微積分と線型代数がこの判定基準に適っているかと気になる部分もあります．あらゆることを歴史的順序に従って教える事が良いとも必ずしもいえないとは思います．言い方をかえれば受け入れられる素地，下地を見極め，準備した上で教えるということでしょうか．あるいは概念を導入するのならそれにふさわしい場面でということでしょうか．

今の初年次学生は抽象的思考への準備が整っているのでしょうか．数学は公式の連鎖としてとらえているような気がするときもあります．今の学生の中の一定数は微分とは公式だと思っていて，定義・概念としては受け取ってはいません．いまの高校までのカリキュラムでは論理的な考え方という部分が、受験対策という面もあり，大きく落ちてしまっているのではないかと思われます．高校までに論理的訓練の適齢期があるのか，抽象的思考の適齢期があるのか，答えはないかも知れませんが必要な問いかけであると思います．情報科学にとっては抽象的な思考が不可欠かと思います．しかしながら大学初年次の講義を担当して思う事は，かなりの学生にそれを受け入れる素地がまだできていないような気がします．初等教育と大学で要求されるそのギャップをどのように埋め

るか，埋められるかは大きな課題かと思います．このような状態のなかで抽象的な概念をいたずらに積み重ねることはなかなか難しい気もしますが，そうとばかりも言えずどう考えたらよいものかと思います．

先日も一年生の演習で，二乗の和の公式を証明しろということになり，そのうちにその式を数学的帰納法で証明せよということになりましたが，全く帰納法の手順あるいは意味合いを理解しない学生が二人続きました．あるいは $\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよと初回の時に書かせてみましたが殆どが駄目でした．聞くところによると現在の高校では問題は少し考えわからなければ解答を読むという形式で勉強が進められているとか．数学もパターンを憶えるということになっているとすると、大学に入ってからの短期間でこれを矯正することはなかなか大変だと感じています．

後での話にも関連しますが，証明の訓練，論理の重視がもっと初等中等教育でなされていればと思います．情報というのはその面で歴史が浅いかと思われますのでどのようにとらえていけばいいのかと思います．その観点から情報科学の方からのご意見を伺ってみたいと思います．

小平先生の文章にあるように，言い古されていることですが，初等，中等教育の段階での初等幾何での証明の訓練，あるいはこれまであまりなされてはこなかった，初等整数論の扱いなども考える範疇に入るのではないかと思います．

3 Koblitz の provable security に関する意見

次に思い出したのは Neal Koblitz の記事　Notices of the AMS vol. 54 number 8 (2007) 972–979 “ The Uneasy Relationship Between Mathematics and Cryptography” です．一番印象に残っているのは「証明」という概念が分野により異なっているということです．これも考えようによっては論理の考え方につながります．素朴な意味合いでの証明がいろいろなバイアスにより歪んだとも考えられます．もちろんこれは一面からの見方でしょうが．

証明とアルゴリズムは対比して用いられることも多いようですが，ここでは互いに補い合うという側面を強調したいと思います．ともすれば証明は無味乾燥な辻褄合わせといった側面でとらえられがちですが論理の積み上げには不可欠なものと思います．

この意味合いでも伝統的な数学における「証明」の概念をきちんと伝えていくことは欠かせないことと思います．同時に仮定と結論の違いについても十分伝える必要があると思います．このあたりで小平先生の歴史的順序という提言とも係わるかもしれません．

アルゴリズムの考え方を十分に理解してもらうためにも論理，証明の観点は欠かせないと思います．

また Koblitz は数学と工学その他の分野との文化の違い，例えば論文のかき方など，についても触れています．暗号学も後者に含まれます．証明に係わる部分を引用します．

『The idea of “provable security” is to give a mathematically regorous proof of a type of conditional guarantee of the security of a cryptographic protocol. It is *conditional* in that it typically has the form “our protocol is immune from an attack of type X provided that the mathematical problem Y is computationally hard.” ....

The form that proofs of security take is what is known as a *reduction*. Reductions from one problem to another occur implicitly throughout mathematics; in computer science, reductions are the main tool used to compare and classify problems according to their difficulty.

In provable security papers the authors try to prove that a mathematical problem that is widely believed to be computationally hard, such as factoring large integers or finding elliptic curve discrete logs, *reduces* to a successful attack of a prescribed type on their cryptographic protocol. This means that anyone who could break their cryptosystem could also, with only a little extra effort, solve the supposedly hard math problem. Since that is assumed not to be possible, the conclusion is that the protocolis *provably* secure.

For mathematicians who study the provable security literature, as Menezes and I did, there are severeal reasons to be uneasy. Most obviously, a provable security theorem applies only to attacks of a specified sort and says nothing about clever attacks that might not includes in the theorem. Moreover, the result is condtional in a strong sense. Unlike in mathematics, where conditional theorem usually mean something like "assuming that the Riemann Hypothesis is true" (which it almost certainly is), in cryptography the condition is of the sort "assumes that no one finds an improved algorithm for a certain math problem" – and that's anyone's guess. History has not been kind to the latter type of assumption. For example, in the late 1980s and early 1990s the development of the number field sieve for factoring an RSA modulus N resulted in a dramatic decrease of the numming time of index-calculus factoring algorithms from $\exp((\log N)^{1/2+\epsilon})$ to $\exp((\log N)^{1/3+\epsilon})$』

これに関連して，やはり学生に接して思う事ですが，大学の学部時代を過ごしても仮定と結論の区別がつかないという割合が一定数あるということです．これは単に論理という体系を，教えるということではなく日常的に親しませる必要があるのではないかと思います．

4 Knuth の O calculus

もう一つは苦し紛れに探したものです．先に述べたことに関連して「bit」の創刊号あたりに情報の教育に係わる記事をざっと探してみましたがあまり情報教育といった記事は見当たりませんでした．当時は研究という面に主眼があったのでしょうか．そんななか Knuth のホームページであるファイルを見つけました．彼が Notices of the American Mathematical Society に投書したもののようですが実際に March, 1998 に掲載された際には雑誌の規定上短くされたようです．提言は Bachmann, Landau の $\mathcal{O}$, o 記法，あるいはそれをもう少し広めた A 記法 (absolutely at most) を数学の講義に取り入れることです．これは計算量の考え方に直結する考え方でしょうが，解析学の考え方には欠かせないものかと思います．彼の意見の一部を挙げれば

- 計算を大きく簡約化する．数式処理では用いられている．
- 20 年以上にわたって " O Calculus " というタイトルの教科書を書こうと思っていた．その

一部は “Concrete Mathematics” の中で用いた.

といったことでしょうか. 現在の日本の微積分の教科書の多くには Landau の記号は取り入れられていますが, 個人的には時間の関係でなかなか触れることができません. もっと大幅に微積分の教育の体系を見直してという逃げめいた感想を持っています. また新しい記号, 考え方を素直に吸収してもらえるか不安な部分もあります. その意味で Knuth の 「O Calculs」 という教科書に期待したいと思います.

『I am pleased to see so much serious attention being given to improvements in the way calculus has traditionally been taught, but I'm surprised that nobody has been discussing the kinds of changes that I personally believe would be most valuable. If I were responsible for teaching calculus to college undergraduates and advanced high school students today, and if I had the opportunity to deviate from the existing textbooks, I would certainly make major changes by emphasizing several notational improvements that advanced mathematicians have been using for more than a hundred years.

The most important of these changes would be to introduce the O notation and related ideas at an early stage. This notation, first used by Bachmann in 1894 and later popularized by Landau, has the great virtue that it makes calculations simpler, so it simplifies many parts of the subject, yet it is highly intuitive and easily learned. The key idea is to be able to deal with quantities that are only partly specified, and to use them in the midst of formulas.

I would begin my ideal calculus course by introducing a simpler "A notation," which means "absolutely at most." For example, $A(2)$ stands for a quantity whose absolute value is less than or equal to 2. This notation has a natural connection with decimal numbers: Saying that π is approximately 3.14 is equivalent to saying that $\pi = 3.14 + A(.005)$. Students will easily discover how to calculate with A:

$$\begin{aligned}&10^{A(2)} = A(100)\,;\\&(3.14 + A(.005))\,(1 + A(0.01))\\&\quad = 3.14 + A(.005) + A(0.0314) + A(.00005)\\&\quad = 3.14 + A(0.3645) = 3.14 + A(.04)\,.\end{aligned}$$

I would of course explain that the equality sign is not symmetric with respect to such notations; we have $3 = A(5)$ and $4 = A(5)$ but not $3 = 4$, nor can we say that $A(5) = 4$. We can, however, say that $A(0) = 0$. As de Bruijn points out in [1, §1.2], mathematicians customarily use the $=$ sign as they use the word "is" in English: Aristotle is a man, but a man isn't necessarily Aristotle.

The A notation applies to variable quantities as well as to constant ones. For example,

$$
\begin{aligned}
\sin x &= A(1)\,; \\
x &= A(x)\,; \\
A(x) &= xA(1)\,; \\
A(x)+A(y) &= A(x+y) \quad \text{if } x \ge 0 \text{ and } y \ge 0\,; \\
\bigl(1+A(t)\bigr)^2 &= 1+3A(t) \quad \text{if } t = A(1)\,.
\end{aligned}
$$

Once students have caught on to the idea of A notation, they are ready for O notation, which is even less specific. In its simplest form, $O(x)$ stands for something that is $CA(x)$ for some constant C, but we don't say what C is. We also define side conditions on the variables that appear in the formulas. For example, if n is a positive integer we can say that any quadratic polynomial in n is $O(n^2)$. If n is sufficiently large, we can deduce that

$$
\begin{aligned}
&\bigl(n+O(\sqrt{n}\,)\bigr)\bigl(\ln n+\gamma+O(1/n)\bigr) \\
&\quad = n\ln n+\gamma n+O(1) \\
&\qquad + O(\sqrt{n}\ln n)+O(\sqrt{n}\,)+O(1/\sqrt{n}\,) \\
&\quad = n\ln n+\gamma n+O(\sqrt{n}\ln n)\,.
\end{aligned}
$$

I would define the derivative by first defining what might be called a "strong derivative": The function f has a strong derivative $f'(x)$ at point x if

$$f(x+\epsilon)=f(x)+f'(x)\epsilon+O(\epsilon^2)$$

whenever ϵ is sufficiently small. The vast majority of all functions that arise in practical work have strong derivatives, so I believe this definition best captures the intuition I want students to have about derivatives. We see immediately, for example, that if $f(x)=x^2$ we have

$$(x+\epsilon)^2=x^2+2x\epsilon+\epsilon^2\,,$$

so the derivative of x^2 is $2x$. And if the derivative of x^n is $d_n(x)$, we have

$$
\begin{aligned}
(x+\epsilon)^{n+1} &= (x+\epsilon)\bigl(x^n+d_n(x)\epsilon+O(\epsilon^2)\bigr) \\
&= x^{n+1}+\bigl(xd_n(x)+x^n\bigr)\epsilon+O(\epsilon^2)\,;
\end{aligned}
$$

hence the derivative of x^{n+1} is $xd_n(x)+x^n$ and we find by induction that $d_n(x)=nx^{n-1}$. Similarly if f and g have strong derivatives $f'(x)$ and $g'(x)$, we readily find

$$f(x+\epsilon)g(x+\epsilon)=f(x)g(x)+\bigl(f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\bigr)\epsilon+O(\epsilon^2)$$

and this gives the strong derivative of the product. The chain rule

$$f\bigl(g(x+\epsilon)\bigr)=f\bigl(g(x)\bigr)+f'\bigl(g(x)\bigr)g'(x)\epsilon+O(\epsilon^2)$$

also follows when f has a strong derivative at point $g(x)$ and g has a strong derivative at x.

Once it is known that integration is the inverse of differentiation and related to the area under a curve, we can observe, for example, that if f and f' both have strong derivatives at x, then

$$\begin{aligned} f(x+\epsilon)-f(x) &= \int_0^\epsilon f'(x+t)\,dt \\ &= \int_0^\epsilon \bigl(f'(x)+f''(x)\,t+O(t^2)\bigr)\,dt \\ &= f'(x)\epsilon+f''(x)\epsilon^2/2+O(\epsilon^3)\,. \end{aligned}$$

I'm sure it would be a pleasure for both students and teacher if calculus were taught in this way. The extra time needed to introduce O notation is amply repaid by the simplifications that occur later. In fact, there probably will be time to introduce the "o notation," which is equivalent to the taking of limits, and to give the general definition of a not-necessarily-strong derivative:

$$f(x+\epsilon)=f(x)+f'(x)\epsilon+o(\epsilon)\,.$$

The function f is continuous at x if

$$f(x+\epsilon)=f(x)+o(1)\,;$$

and so on. But I would not mind leaving a full exploration of such things to a more advanced course, when it will easily be picked up by anyone who has learned the basics with O alone. Indeed, I have not needed to use "o" in 2200 pages of *The Art of Computer Programming*, although many techniques of advanced calculus are applied throughout those books to a great variety of problems.

Students will be motivated to use O notation for two important reasons. First, it significantly simplifies calculations because it allows us to be sloppy—but in a satisfactorily controlled way. Second, it appears in the power series calculations of symbolic algebra systems like *Maple* and *Mathematica*, which today's students will surely be using.

For more than 20 years I have dreamed of writing a calculus text entitled *O Calculus*, in which the subject would be taught along the lines sketched above. More pressing projects, such as the development of the TEX system, have made that impossible, although I did try to write a good introduction to O notation for post-calculus students in [2, Chapter 9]. Perhaps my ideas are preposterous, but I'm hoping that this letter will catch the attention of people who are much more capable than I of writing calculus texts for the new millennium. And I hope that some of these now-classical ideas will prove to be at least half as fruitful for students of the next generation as they have been for me.⌋

5　新指導要領と整数の性質

また大学初年次教育の観点からは新指導要領のことも考えなくてはならないと思います．山崎先生のアブストラクトにも初等整数論に絡んだ項目が挙げられています．現行の指導要領ではそれほどない部分です．今の学生に聞いてみても，たとえばユークリッドの互除法についても聞いたことはあるがといった反応が多いような気がします．

新指導要領では数学 A の内容が　場合の数と確率，整数の性質，図形の性質の三つになり，そのうちから二つ選択となっています．ある意味では悪魔の選択めいたところもあり，大学入試との関連で，初年次の教育の段階でどのように扱われていくかについて不透明な部分もありますが，この側面を論理，証明の関わりでどうとらえていくかは課題かと思います．

以下に高等学校学習指導要領解説　数学編の整数の性質の部分を引用しておきます．

『整数の性質

整数の性質についての理解を深め，それを事象の考察に活用できるようにする。

ア　約数と倍数

素因数分解を用いた公約数や公倍数の求め方を理解し，整数に関連した事象を論理的に考察し表現すること。

イ　ユークリッドの互除法

整数の除法の性質に基づいてユークリッドの互除法の仕組みを理解し，それを用いて二つの整数の最大公約数を求めること。また，二元一次不定方程式の解の意味について理解し，簡単な場合についてその整数解を求めること。

ウ　整数の性質の活用

二進法などの仕組みや分数が有限小数又は循環小数で表される仕組みを理解し，整数の性質を事象の考察に活用すること。

整数の性質については，小学校以来学習してきているがまとめて扱われていない。ここでは，まず，整数の約数，倍数に関する基礎的な事柄を扱い，それらを具体的な問題の解決に活用できるようにする。そして最大公約数を求める方法としてユークリッドの互除法を理解させ，その有用性を認識させるとともに，二元一次不定方程式の解法に活用する。さらに，整数の性質をいろいろな事象の考察に活用する。

指導に当たっては，整数に関するいろいろな性質を生徒に見いださせ，それが成り立つ理由を考えさせて説明するなどの活動に重点を置く。

ア　約数と倍数

中学校では，素因数分解や，ある数の倍数を文字を用いた式で表現したり処理したり，処理した結果を解釈したりすることを扱っている。今回の改訂により，数を拡張していく過程に関連して扱ってきた「数の集合と四則」も中学校で扱うこととなった。

ここまでは，中学校までに扱ってきた整数に関する約数や倍数などの基本的な用語や３の倍数や５の倍数の見分け方などの基本的な事項を振り返ってまとめ，約数や倍数に関する事象を論理的に考察し整数の性質についての理解を深める。例えば，２数の掛け算が筆算形式で表された虫食い算や覆面算を扱い，楽しみながら整数の性質の理解を深めさせることや，二つの整数 a, b $(a > 0)$ について，$b = aq + r$, $(r = 0, 1, 2, \cdots, a-1)$ という表現や割り算の余りによる分類を利用して整数の性質を考察させることも考えられる。

イ　ユークリッドの互除法

整数の除法の性質に基づいて，ユークリッドの互除法を理解させ，二つの整数の最大公約数を求められるようにする。指導に当たっては，具体例を通して，その手順も持つ意味を理解させることに重点を置き，単なる計算練習に陥らないよう留意することが大切である。

二元一次不定方程式の解の意味について理解し，未知数の係数の最大公約数が１であるような簡単な場合について，その解を求めることができるようにする。解を求めるに当たっては，ユークリッドの互除法を活用し，その方法については具体例を通して理解させるようにする。

ウ　整数の性質の活用

ここでは，整数の性質を利用して，二進法などの仕組みや，分数が有限小数又は循環小数で表される仕組みを理解し，整数の性質を事象の考察に活用できるようにする。

十進法の表記法を見直し，n 進法の仕組みを考えさせる。例えば，二進法では，簡単な計算を通してその調書や短所を考えさせたり，三進法では，$\dfrac{1}{3} = 0.1_{(3)}$ となることなどを考えさせたりして，数の表記法についての理解を深める。

また，分数を小数で表現すると，有限小数または循環小数となる。有限小数になるのは，分母の素因数が１０の約数である 2, 5 だけからなるときで，そうでないときは，循環小数になる。これらを十進法の表記法や，割り算の余りと「部屋割り論法（鳩の巣原理ともいう）」を用いて考察させる。

』

現在の大学での数学のカリキュラムでは初年次以降もこめて，初等整数論関係について触れる機会はあまりないと思います．これらを取り込む工夫もあるいは必要かとは思います．とはいえ他の数学の内容，たとえば空間図形の扱い（解析幾何学めいたもの）などとの関係，他教科との関係で簡単な問題ではないと思います．

50 年以上前の阪大の微積分の教科書を見てみますと，解析幾何学の内容もかなり含まれています．今の高校までのカリキュラムをみるとこれも必要かと思われます．現在の日本の大学での初年次の数学教育の内容が出来上がったからまだ 50 年は経っていないと思います．変わるときが来ているのでしょうか．

6 全国紙上数学談話会

なお講演の際には岡本和夫さんから「全国紙上数学談話会」についても触れるように言われましたのでそれについても少し話しました．現在大阪大学数学教室のホームページにおいて (多少わかりにくい場所ですが) 各号毎の pdf の形式で公開していますが重たく，また MacOS からではうまく見えない事も多い事から，記事毎に pdf file を分割し，目次も html ファイルの形式に変更する作業を進めています．

その見直しを進めている中で，一部の記事，号が漏れていることも判明しました．これもできれば埋める形にしたいと思います．それを調べていくなかで，戦後すぐのころ「Zenkoku shijo danwakai」なるタイトルでの英文化の試みがあったこともわかりました．いまのところ一号分しか確認できていませんが，このことについてはもう少し調べてみたいと思います．また上に述べた作業のなかで一部読み返してみますと，この 15 年にわたる歴史のなかで雑誌の性格付けについてもいろいろと試みられ，ある話題の概括的な説明をするような記事も載せようとしたこともあったようです

いまとは状況が大きく異なりますがこのような形式の雑誌を７０年以上前にに週刊の形で数学の研究に関して情報交換をしていた先人の意気込みをあらためて考えてみたいと思います．

7 H. Wu の mathematical engineering

Notices of the AMS **53**, 372–384 (2011) にある H. Wu の論説をみて少し，同じ著者の ICM での講演を眺めてみました．そのなかに mathematical engineering としての数学教育という言葉がが出てきます．ここでいう “engineering” とは著者によれば，

the art or science of customizing scientific theory to meet human need

です．著者はこの言葉を H. Bass の mathematics education は applied mathematics の一つの branch であるという主張と対比させて，つぎのように述べています．

In this sense what separates mathematics education as mathematical engineering from mathematics education as applied mathematics is the crucial step of *customizing* the mathematics, rather than simply applying it in a straightforward manner to the specific needs of the classroom.

彼らの主張の多くは初等中等教育に対してなされているものかと思います．このような観点は “教育数学” にとってどのような位置を占めるものでしょうか．これらの記事，原稿を目にしたのは最近のことなのでまだあまり考えはまとまりません．彼らは New Math の動き，及びそれが引き起こしたそれ以降の動きをもとに議論を進めているようです．今後もう少し調べてみたいと思っています．

8　終りに

佐藤文隆著「職業としての科学」岩波新書　に次のような部分があります．理科の教育関する部分です．　川崎謙著「神と自然の科学史」講談社選書メチエ　からの引用が含まれていますがこちらは私はまだ目を通してはいませんが，

『理科は何を教えるのか

科学は，人間社会の関与する全世界の中から自然を切り分けることから始める。ホーリズム（全体論）でなく、アトミズムの手法である。この切り分けは、古典古代の西洋文化の中では自明ではなかったが、ヘブライズムとヘレニズムを継承して文明化した西洋では、比較的バリアーが少なかったと指摘されている。ドイツ・ロマン主義は、この切り分けに抗う対抗思想であった。日本の自然観で強調されるのも、アンチ切り分け派である。

学校教育の理科の授業では、この切り分けを宣言するわけではないが、理科という科目を公教育に設定することは、すでにこの立場の上に立っていることを意味する。

しかし、理科という教科の目標は、個々の具体的内容の背後に一歩踏み込むと、急に自明ではなくなる。たとえば、川崎謙によると、教員養成の現場からは次のような問題意識があるといる。理科の教科で教えるべきは、次の二つのうちどれかというのである。

イ）自然もロゴス（言語と合理）で語れることを子供に教える。
イ）言葉（ロゴス）では表せない自然のすばらしさを感じ取れる子供を育てる。

この二つが対立的になるのは、「すばらしい」ことが、一方では「ことばで語れる」ことであるのに、もう一方では「ことばで表せない」ことにおいているからである。』

これは多分初等，中等教育での理科について触れられて部分ではあると思いますが，大学初年次での数学は数学科向けばかりではないかと思いますので，当たり前のことかも知れませんが「理科」を「数学」に置き換えて考えるべきことがあるのではないかと思います．またこじつけめきますが，冒頭との関連で，数字で数学で表し得ないものもあることを意識する必要があるかと思います．