

メンバーシップ関数の準凹からの乖離度

弘前大学 大学院 理工学研究科 佐藤 明大 (Akihiro Sato)
Graduate School of Science and Technology, Hirosaki University

弘前大学 大学院 理工学研究科 金 正道 (Masamichi Kon)
Graduate School of Science and Technology, Hirosaki University

概要

集計関数を用いてメンバーシップ関数の準凹性を一般化する。そして、一般化された準凹性の性質を調べ、一般化された準凹性の応用としてメンバーシップ関数の準凹からの違い（ズレ）の程度を表す指標である乖離度を提案する。

1. 準備

n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n から単位区間 $[0, 1]$ への関数を主に考える。そのような関数は \mathbb{R}^n 上のファジィ集合のメンバーシップ関数とみなすことができる。準凹関数の一般化は経済学や最適化の分野において重要でありいくつかの方法によって一般化されてきた。準凹関数は \min 演算を用いて定義される。[2] において、 \min 演算の代わりに任意の合接的集計関数を許すことによって、メンバーシップ関数の準凹性が一般化され、一般化された準凹性の特徴がいくつかの例を通して考察されている。

本稿では、一般化された準凹性の性質を調べ、一般化された準凹性の応用としてメンバーシップ関数の準凹からの違い（ズレ）の程度を表す指標である乖離度を提案する。

$a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ に対して、 $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$, $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$, $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ とする。

まず、集計関数の定義を与える。

定義 1 $G : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ が集計関数であるとは、次の性質をみたすときをいう。

(G1) (単調性) 各 $x_i, y_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2$ に対して、 $x_i \leq y_i$, $i = 1, 2$ ならば $G(x_1, x_2) \leq G(y_1, y_2)$ となる。

(G2) (境界条件) $G(0, 0) = 0, G(1, 1) = 1$

次に、集計関数の性質に関する定義を与える。

定義 2 $G : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ を集計関数とする。

(i) G が合接的であるとは、任意の $x, y \in [0, 1]$ に対して $G(x, y) \leq \min\{x, y\}$ となるときをいう。

(ii) G が可換であるとは、任意の $x, y \in [0, 1]$ に対して $G(x, y) = G(y, x)$ となるときをいう。

次節において、メンバーシップ関数の準凹からの違い（ズレ）を測るために、各 $p \in [1, \infty[$ に対して

$$G^{(p)}(x, y) = [\min\{x, y\}]^p \quad \text{for } x, y \in [0, 1] \quad (1)$$

によって定義される可換合接的集計関数 $G^{(p)} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1], p \in [1, \infty[$ を考える（図 1）。 p の値が大きくなればなるほど $G^{(p)}$ は $\min = G^{(1)}$ から離れる。

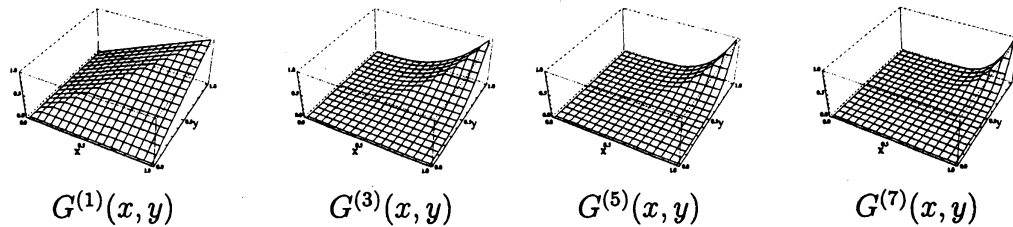


図 1 $G^{(p)}(x, y), p = 1, 3, 5, 7$

合接的集計関数 $G : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ に対して、 $G^{\max} : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ を

$$G^{\max}(x, y) = \max\{G(x, y), G(y, x)\} \quad \text{for } x, y \in [0, 1] \quad (2)$$

と定義する。このとき、 G^{\max} は可換合接的集計関数になり、 $G^{\max} \geq G$ となる。また、 G が非可換ならば $G^{\max} \neq G$ となる。

ここで、関数の準凹性に関する定義を思い出そう。

定義 3 $X \subset \mathbb{R}^n, X \neq \emptyset$ を凸集合とし、 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ とする。 f が X 上で準凹であるとは、任意の $x, y \in X$ と任意の $\lambda \in]0, 1[$ に対して

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{f(x), f(y)\}$$

となるときをいう。

次の定義は、定義 3 における \min 演算の代わりに任意の合接的集計関数を許すことによるメンバーシップ関数の準凹性の一般化である ([2])。

定義 4 $X \subset \mathbb{R}^n, X \neq \emptyset$ を凸集合とし、 $G : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ を合接的集計関数とし、 $\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ とする。 μ が X 上で G -準凹 であるとは、任意の $x, y \in X$ と任意の $\lambda \in]0, 1[$ に対して

$$\mu(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq G(\mu(x), \mu(y))$$

となるときをいう。

定義 4 より、凸集合 $X \subset \mathbb{R}^n, X \neq \emptyset$ および合接的集計関数 $G : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ および $\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ に対して、 μ が X 上で準凹ならば μ は X 上で G -準凹になる。

2. G -準凹性の性質

本節では、メンバーシップ関数の G -準凹性の性質を調べる。

定義5 $X \subset \mathbb{R}^n, X \neq \emptyset$ とし、 $\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ とする。このとき、 $\text{Core}_X(\mu) = \{x \in X : \mu(x) = 1\}$ を X における μ のコアという。

命題1 $X \subset \mathbb{R}^n, X \neq \emptyset$ を凸集合とし、 $G : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ を合接的集計関数とし、 $\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ とする。このとき、 μ が X 上で G -準凹ならば $\text{Core}_X(\mu)$ は凸集合になる。

命題2 $X \subset \mathbb{R}^n, X \neq \emptyset$ を凸集合とし、 $G, G' : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ を合接的集計関数とし、 $G \geq G'$ とし、 $\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ とする。このとき、 μ が X 上で G -準凹ならば μ は X 上で G' -準凹になる。

$X \subset \mathbb{R}^n, X \neq \emptyset$ を凸集合とし、 $G, G' : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ を合接的集計関数とし、 $\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ とする。 μ が X 上で G -準凹かつ G' -準凹であり $G \geq G'$ のとき、 μ に対する合接的集計関数の選択として G は G' より望ましいという。また、 μ が X 上で G -準凹かつ G' -準凹であり $G \geq G', G \neq G'$ のとき、 μ に対する合接的集計関数の選択として G は G' より狭義に望ましいという。

命題3 $X \subset \mathbb{R}^n, X \neq \emptyset$ を凸集合とし、 $G : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ を合接的集計関数とし、 $\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ とする。このとき、 μ が X 上で G -準凹ならば μ は X 上で G^{\max} -準凹になる。ここで、 G^{\max} は (2) おいて定義された可換合接的集計関数である。

$X \subset \mathbb{R}^n, X \neq \emptyset$ を凸集合とし、 $G : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ を合接的集計関数とし、 $\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ は X 上で G -準凹であるとする。このとき、 $G^{\max} \geq G$ であり、命題3より μ は G^{\max} -準凹であるので、 μ に対する合接的集計関数の選択として G^{\max} は G より望ましい。さらに、 G が非可換であるならば、 $G^{\max} \neq G$ であるので、 μ に対する合接的集計関数の選択として G^{\max} は G より狭義に望ましい。これは、 G が非可換の場合は、 μ に対する合接的集計関数の選択として G より狭義に望ましい可換合接的集計関数が存在することを意味している。よって、メンバーシップ関数の G -準凹性を考えるときは、すべての合接的集計関数を考える必要はなく、可換合接的集計関数のみを考えれば十分である。

3. 準凹からの乖離度

本節では、メンバーシップ関数の準凹からの違い（ズレ）について考察し、 G -準凹性の応用としてメンバーシップ関数の準凹からの違い（ズレ）の程度を表す指標である乖離度を提案する。

$X \subset \mathbb{R}^n, X \neq \emptyset$ を凸集合とし、 $G : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ を合接的集計関数とし、 $\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ は X 上で G -準凹であるとする。このとき、 G と \min との違い（ズレ）が大きくなればなるほど、 $X \setminus \text{Core}_X(\mu)$ において μ の準凹からの違い（ズレ）が大きくなることが許される。次の例は、このことを示している。

例1 $\alpha \in [0, \frac{1}{2}[$ に対して、 $\mu_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ を次のように定義する (図2)。

$$\mu_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in]-\infty, 0] \cup [6, \infty[\\ \frac{1}{2}x & \text{if } x \in [0, 1] \\ \alpha \sin 4x\pi + \frac{1}{2} & \text{if } x \in [1, 2] \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & \text{if } x \in [2, 3] \\ -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} & \text{if } x \in [3, 4] \\ \alpha \sin 4x\pi + \frac{1}{2} & \text{if } x \in [4, 5] \\ -\frac{1}{2}x + 3 & \text{if } x \in [5, 6] \end{cases}$$

μ_0 は (\mathbb{R} 上で) 準凹であるが、 $\mu_\alpha, \alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ は (\mathbb{R} 上で) 準凹ではない。

命題4 ([2]) $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ とする。このとき、 $p \in [p_\alpha, \infty[$ に対して μ_α は (\mathbb{R} 上で) $G^{(p)}$ -準凹であるが、 $p \in [1, p_\alpha[$ に対して (\mathbb{R} 上で) $G^{(p)}$ -準凹でない。ここで、 $p_\alpha = \frac{\log(\frac{1}{2}-\alpha)}{\log(\frac{1}{2}+\alpha)}$ である (図3)。($\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ ならば $p_\alpha \in [1, \infty[$ となる。) また、 $G^{(p)}, p \in [1, \infty[$ は (1) において定義された可換合接的集計関数である。

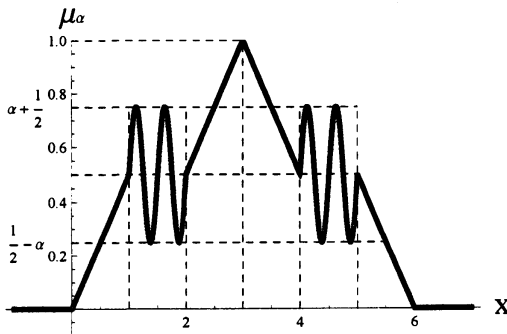


図2 $\mu_\alpha(x), \alpha \in [0, \frac{1}{2}[$

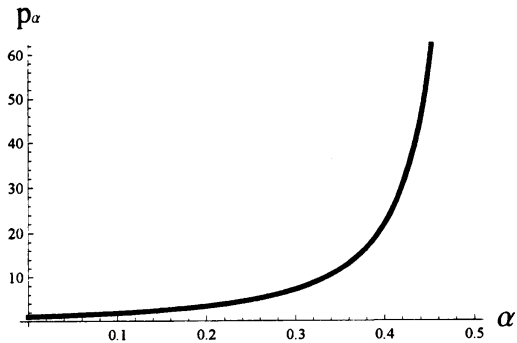


図3 $p_\alpha = \frac{\log(\frac{1}{2}-\alpha)}{\log(\frac{1}{2}+\alpha)}, \alpha \in]0, \frac{1}{2}[$

次の例は、どのような合接的集計関数 $G : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ に対しても G -準凹にならないメンバーシップ関数が存在することを示している。

例2 $\mu : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ を次のように定義する。

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \neq 0 \\ \beta & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

ここで、 $\beta \in [0, 1[$ である。このとき、 $\text{Core}_{\mathbb{R}}(\mu) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ は凸集合にならないので、命題1より μ は任意の合接的集計関数 $G : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ に対して (\mathbb{R} 上で) G -準凹にならない。

凸集合 $X \subset \mathbb{R}^n, X \neq \emptyset$ および $\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ に対して、次の問題 ($P_X(\mu)$) を考える。

$$(P_X(\mu)) \quad \begin{cases} \min & p \\ \text{s.t.} & \mu \text{ は } X \text{ 上で } G^{(p)}\text{-準凹} \\ & p \in [1, \infty[\end{cases}$$

ここで、 $G^{(p)}, p \in [1, \infty[$ は (1) において定義された可換合接的集計関数である。例 2 は、問題 $(P_X(\mu))$ が実行可能とは限らない（実行不可能な場合がある）ことを示している。

命題 5 $X \subset \mathbb{R}^n, X \neq \emptyset$ を凸集合とし、 $\mu: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ とする。このとき、問題 $(P_X(\mu))$ が実行可能ならばその最適解（最適値）が存在する。

定義 6 $X \subset \mathbb{R}^n, X \neq \emptyset$ を凸集合とし、 $\mu: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ とする。このとき

$$D_X(\mu) = \min\{p \in [1, \infty[: \mu \text{ は } X \text{ 上で } G^{(p)}\text{-準凹}\} \quad (3)$$

を μ の X 上での準凹からの乖離度とよぶ。ここで、 $\min \emptyset = \infty$ とする。

(3) において定義された μ の X 上での準凹からの乖離度 $D_X(\mu)$ は、 $D_X(\mu) = 1$ のときは μ が X 上で準凹であることを意味し、 $D_X(\mu)$ の値が大きくなればなるほど $X \setminus \text{Core}_X(\mu)$ における μ の準凹からの違い（ズレ）が大きいことを意味する。

命題 6 $X \subset \mathbb{R}^n, X \neq \emptyset$ を凸集合とし、 $\mu: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ とする。

- (i) μ が X 上で準凹であるための必要十分条件は $D_X(\mu) = 1$ となることである。
- (ii) 任意の $p \in [1, D_X(\mu)[$ に対して μ は X 上で $G^{(p)}$ -準凹にならない。
- (iii) 任意の $p \in [D_X(\mu), \infty[$ に対して μ は X 上で $G^{(p)}$ -準凹になる。

例 1 において定義された $\mu_\alpha, \alpha \in [0, \frac{1}{2}[$ に対しては $D_{\mathbb{R}}(\mu_\alpha) = \frac{\log(\frac{1}{2}-\alpha)}{\log(\frac{1}{2}+\alpha)}$ となり、例 2 において定義された μ に対しては $D_{\mathbb{R}}(\mu) = \infty$ となる。

4. 結論

メンバーシップ関数に対して、 \min 演算の代わりに任意の合接的集計関数を許すことによって一般化された G -準凹性を考えた。そして、 G -準凹性の性質を調べ、 G -準凹性の応用としてメンバーシップ関数の準凹からの違い（ズレ）の程度を表す指標である乖離度を提案した。

参考文献

- [1] E. P. Klement, R. Mesiar and E. Pap, Triangular norms, Kluwer Academic Publishers, 2000
- [2] 金正道・桑野裕昭, 集計関数を用いた準凹関数の一般化, 日本 OR 学会秋季研究集会 アブストラクト集, 2010, pp.76-77
- [3] 田中謙輔, 凸解析と最適化理論, 牧野書店, 1994