数理解析研究所講究録
第 1802 巻 2012 年 50-56

ラグランジュ関数のフィボナッチ鞍点

岩本誠一* (九州大学·名誉教授), 木村寛 (秋田県立大学)

概 要

本報告では、4 変数 2 次計画問題を主問題として、これと同値な制約問題 (8 変数) を媒介して双対問題 (4 変数) を導く過程に焦点を当てる。このとき、(i) ラグランジュ関数の鞍点が 12 元連立 1 次方程式の解として得られ、(ii) 鞍点にフィボナッチ性が見られ、(iii) 解が主、制約、双対の 3 つの問題のフィボナッチ最適解になっていることも示す。さらに、フィボナッチ鞍点には、フィボナッチ相補双対性とよばれる三位一体の関係が見られることを示す。

1 主問題

4 変数 $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ の 2 次計画問題として次の最小化問題 (P_{c4})[1]を考える。

$$
(\mathrm{P}_{c4}) \qquad \begin{array}{ll} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{n=0}^{3}\left[(x_n-x_{n+1})^2+x_{n+1}^2\right] \\ \text{subject to} & \text{(i)} \quad -\infty < x_n < \infty \qquad n=1,2,3,4 \\ & \text{(ii)} \quad x_0 = c \end{array}
$$

ただし $c\in R$ とする。この**主問題**(dual problem) に対し、

$$
u_n := x_n - x_{n+1} \qquad n=0,1,2,3 \tag{1}
$$

とおき、$u=(u_0,u_1,u_2,u_3)$ として、$(x,u)\in R^8$ に関する最小化問題

$$
(\mathrm{P}'_{c8}) \qquad \begin{array}{ll} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{n=0}^{3}\left(u_n^2+x_{n+1}^2\right) \\ \text{subject to} & \text{(i)} \quad x_{n+1}-x_n+u_n=0 \qquad n=0,1,2,3 \\ & \text{(ii)} \quad x_0 = c \end{array}
$$

*本研究は、科学研究費補助金「平成 22 年度基盤研究 (C)」課題番号 22540144 の助成を受けた。

[1]P は primal（主）を、c は complementary（相補的）を、そして 4 は 4 変数をそれぞれ表す。ここでは簡単のため 4 変数に特定しているが、この結果は一般の n 変数についても成り立つ。

を考える。これを**制約問題**(constrained problem) という。ここで任意の $(x,u) \in R^8$ に対して、

$$f(x,u) := \sum_{n=0}^{3} \left(u_n^2 + x_{n+1}^2\right),$$
$$g_1(x,u) := x_1 - c + u_0, \quad g_{n+1}(x,u) := x_{n+1} - x_n + u_n \quad n = 1,2,3$$

とおくと、$g = (g_1, \cdots, g_4) : R^8 \to R^4$ であり、制約問題は次の 8 変数 4 線形制約付き最小化問題

$$(\mathrm{P}'_{c8}) \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & f(x,u) \\ \text{subject to} & \text{(i)} \;\; g(x,y) = 0 \\ & \text{(ii)} \;\; (x,u) \in R^8 \end{array}$$

として表される。ただし、$0 \in R^4$。

本論文では数列 $\{F_n\}$ は**フィボナッチ数列**(Fibonacci sequence) を表す。これは 2 階線形差分方程式（3 項間漸化式）

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0, \qquad x_1 = 1, \; x_0 = 0 \tag{2}$$

の解として定義されている。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987

表 1 フィボナッチ数列 $\{F_n\}$

補題 1 $\hat{x}, \hat{u}$ が、

$$\hat{x} = (\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \hat{x}_3,\ \hat{x}_4) = \frac{c}{F_9}(F_7,\ F_5,\ F_3,\ F_1)$$
$$\hat{u} = (\hat{u}_0,\ \hat{u}_1,\ \hat{u}_2,\ \hat{u}_3) = \frac{c}{F_9}(F_8,\ F_6,\ F_4,\ F_2)$$

のとき、$(\hat{x}, \hat{u})$ は制約問題 (P'_{c8}) の最小点であり、最小値は $m = \dfrac{F_8}{F_9}c^2$ である。

Proof. [3]。 □

さて、**ラグランジュ関数** L と **双対関数** J を導入しよう。この 2 つは任意の $(x,u) \in R^8$ と $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$ に対して定義されている：

$$L(x,u;\mu) = f(x,u) - 2(\mu, g(x,u)), \tag{3}$$

$$J(\mu) = 2c\mu_1 - \mu_1^2 - \sum_{n=1}^{3}\left[(\mu_n - \mu_{n+1})^2 + \mu_{n+1}^2\right] - \mu_4^2. \tag{4}$$

ここで、記号 $(\mu, g(x,u))$ は $\mu \in R^4$ と $g(x,u) \in R^4$ の内積を表す。

2 フィボナッチ鞍点

定理 1 $(\hat{x}, \hat{u}) \in R^8$, $\mu^* \in R^4$ が、

$$\hat{x} = (\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \hat{x}_3,\ \hat{x}_4) = \frac{c}{F_9}(F_7,\ F_5,\ F_3,\ F_1),$$

$$\hat{u} = (\hat{u}_0,\ \hat{u}_1,\ \hat{u}_2,\ \hat{u}_3) = \frac{c}{F_9}(F_8,\ F_6,\ F_4,\ F_2),$$

$$\mu^* = (\mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \mu_3^*,\ \mu_4^*) = \frac{c}{F_9}(F_8,\ F_6,\ F_4,\ F_2),$$

のとき、次の 1, 2 が成り立つ。

1. $(\hat{x}, \hat{u}; \mu^*)$ はラグランジュ関数 L の**鞍（峠）点** *(saddle point)* である。すなわち、$g(x, u) = 0$ を満たす任意の $(x, u) \in R^8$ と $\mu \in R^4$ に対して、

$$L(\hat{x}, \hat{u}; \mu) = L(\hat{x}, \hat{u}; \mu^*) \leq L(x, u; \mu^*) \tag{5}$$

が成り立つ。

2. μ^* は、**双対問題** (dual problem)

$$(\mathrm{D_{c4}}) \quad \begin{array}{l} \text{Maximize} \quad J(\mu) \\ \text{subject to} \quad \text{(i)} \quad \mu \in R^4 \end{array}$$

の最大点である。この最大値は $M = J(\mu^*) = \dfrac{F_8}{F_9} c^2$ である。

Proof. 1. の証明: $g(\hat{x}, \hat{u}) = 0$ であることから、任意の $\mu \in R^4$ に対して、

$$\begin{aligned} L(\hat{x}, \hat{u}; \mu) &= f(\hat{x}, \hat{u}) - 2(\mu, g(\hat{x}, \hat{u})) \\ &= f(\hat{x}, \hat{u}) - 2(\mu^*, g(\hat{x}, \hat{u})) \\ &= L(\hat{x}, \hat{u}; \mu^*) \end{aligned}$$

である。更に、$g(x, u) = 0$ である任意の $(x, u) \in R^8$ に対して、

$$\begin{aligned} L(\hat{x}, \hat{u}; \mu^*) &= f(\hat{x}, \hat{u}) - 2(\mu^*, g(\hat{x}, \hat{u})) \\ &\leq f(x, u) - 2(\mu^*, g(x, u)) \\ &= L(x, u; \mu^*) \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって以上より示された。
2. の証明: [3]。 □

制約問題 $(\mathrm{P'_{c8}})$ における Karush-Kuhn-Tucker 条件

$$\begin{aligned} x_n + \mu_{n+1} - \mu_n &= 0 \qquad n = 1, 2, 3 \\ u_n - \mu_{n+1} &= 0 \qquad n = 0, 1, 2, 3 \\ x_n - x_{n+1} - u_n &= 0 \qquad n = 1, 2, 3 \\ x_4 - \mu_4 &= 0 \\ c - x_1 - u_0 &= 0 \end{aligned}$$

は、12 元連立線形方程式

$$Ax = b \tag{6}$$

で表される。ただし、

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c|cccc} -1 & & & & & & & & \\ 1 & -1 & & & -I & & 0 & & \\ & 1 & -1 & & & & & & \\ & & 1 & -1 & & & & & \\ \hline & & & & & -1 & 1 & & \\ & I & & & 0 & & -1 & 1 & \\ & & & & & & & -1 & 1 \\ & & & & & & & & -1 \\ \hline & 0 & & & I & & -I & & \end{array}\right) \in R^{12\times 12},$$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \\ u_0 \\ \vdots \\ u_3 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_4 \end{pmatrix} \in R^{12}, \qquad b = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in R^{12}, \qquad I \in R^{4\times 4} : \text{単位行列}.$$

このとき、方程式 (6) は唯一の解

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{u} \\ \mu^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{x}_4 \\ \hat{u}_0 \\ \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \mu_1^* \\ \mu_2^* \\ \mu_3^* \\ \mu_4^* \end{pmatrix} = \frac{c}{F_9} \begin{pmatrix} F_7 \\ F_5 \\ F_3 \\ F_1 \\ F_8 \\ F_6 \\ F_4 \\ F_2 \\ F_8 \\ F_6 \\ F_4 \\ F_2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

をもつ。$\hat{x}, \hat{u}, \mu^*$ にはフィボナッチ相補双対性の**2段階フィボナッチ性**(two-step Fibonacci)[3] が見てとれる。他方、方程式 (6) の A, $\boldsymbol{x}$ を

$$A = \left(\begin{array}{cccccccc:cccc}
-1 & -1 & & & & & & & & & & \\
 & 1 & -1 & -1 & & & & & & & & \\
 & & & 1 & -1 & -1 & & & & \multicolumn{2}{c}{0} & \\
 & & & & & 1 & -1 & -1 & & & & \\
\hdashline
 & 1 & & & & & & & -1 & 1 & & \\
 & & & 1 & & & & & & -1 & 1 & \\
 & & & & & 1 & & & & & -1 & 1 \\
 & & & & & & & 1 & & & & -1 \\
\hdashline
1 & & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & \multicolumn{2}{c}{-I} & \\
 & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & &
\end{array}\right), \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} u_0 \\ x_1 \\ u_1 \\ x_2 \\ u_2 \\ x_3 \\ u_3 \\ x_4 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \end{pmatrix},$$

で与えると、方程式 (6) は唯一の解

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \hat{u}_0 \\ \hat{x}_1 \\ \hat{u}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{x}_3 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{x}_4 \\ \mu_1^* \\ \mu_2^* \\ \mu_3^* \\ \mu_4^* \end{pmatrix} = \frac{c}{F_9} \begin{pmatrix} F_8 \\ F_7 \\ F_6 \\ F_5 \\ F_4 \\ F_3 \\ F_2 \\ F_1 \\ F_8 \\ F_6 \\ F_4 \\ F_2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

をもつ。この解 $(\hat{x}, \hat{u})$ にはフィボナッチ相補双対性の**相補フィボナッチ性**(complementary Fibonacci)[3] が見られる。

R^4 上の実数値関数 $I(x)$ を

$$I(x) := (c - x_1)^2 + x_1^2 + \sum_{n=1}^{3} \left[(x_n - x_{n+1})^2 + x_{n+1}^2 \right], \quad \forall (x_1, \cdots, x_4) \in R^4 \tag{9}$$

で与える。このとき次の定理が得られる。

定理 2 $I(x)$, $J(\mu)$ について次が成り立つ。

1. $I(x) \geq J(\mu) \qquad \forall x \in R^4,\ \mu \in R^4$,
2. $\hat{x}$, μ^* は、$I(\hat{x}) = J(\mu^*)$ を満たす。

Proof. [3]。 □

定理 3 線形方程式 (6) の解 $(\hat{x}, \hat{u}; \mu^*)$ は次を満たす。

1. $\hat{x}$ は主問題の最小解である。
2. $(\hat{x}, \hat{u})$ は制約問題の最小解である。
3. μ^* は双対問題の最大解である。

Proof. [3]。 □

定理 4 制約問題 (P'_{c8}) と 主問題 (P_{c4}) は同値である：

1. $(\hat{x}, \hat{u})$ が制約問題の最小解ならば、$\hat{x}$ は主問題の最小解である。このとき、$f(\hat{x}, \hat{u}) = I(\hat{x})$ である。
2. $\hat{x}$ が主問題の最小解で、$(\hat{u}_0, \hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3)$ を
$$\hat{u}_n = \hat{x}_n - \hat{x}_{n+1}, \quad \hat{x}_0 = c, \quad n = 0, 1, 2, 3$$
として構成すれば、$(\hat{x}, \hat{u})$ は制約問題の最小解であり、$f(\hat{x}, \hat{u}) = I(\hat{x})$ である。

Proof. 1. の証明: $(\hat{x}, \hat{u})$ を制約問題 (P'_{c8}) の最小解とする。このとき、任意の $x \in R^4$ に対して $I(x) \geq I(\hat{x})$ を示す。今、任意の $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$ と $g(x, u) = 0$ となる任意の $u = (u_0, u_1, u_2, u_3) \in R^4$ に対して、

$$\begin{aligned}
I(x) &= (c - x_1)^2 + x_1^2 + \sum_{n=1}^{3} \left[(x_n - x_{n+1})^2 + x_{n+1}^2\right] \\
&= \sum_{n=0}^{3} \left(u_n^2 + x_{n+1}^2\right) \\
&= f(x, u) \\
&\geq f(\hat{x}, \hat{u}) \\
&= \sum_{n=0}^{3} \left(\hat{u}_n^2 + \hat{x}_{n+1}^2\right) \\
&= (c - \hat{x}_1)^2 + \hat{x}_1^2 + \sum_{n=1}^{3} \left[(\hat{x}_n - \hat{x}_{n+1})^2 + \hat{x}_{n+1}^2\right] \\
&= I(\hat{x})
\end{aligned}$$

となる。よって、$\hat{x}$ は主問題 (P_{c4}) の最小解である。また、$f(\hat{x}, \hat{u}) = I(\hat{x})$ であることも示された。

2. の証明: $\hat{x} = (\hat{x}_1, \cdots, \hat{x}_4)$ が主問題 (P_{c4}) の最小解であるとする。このとき、$g(x,u) = 0$ となる任意の $(x,u) \in R^8$ に対して、

$$\begin{aligned} f(x,u) &= \sum_{n=0}^{3} \left(u_n^2 + x_{n+1}^2\right) \\ &= (c - x_1)^2 + x_1^2 + \sum_{n=1}^{3} \left[(x_n - x_{n+1})^2 + x_{n+1}^2\right] \\ &= I(x) \\ &\geq I(\hat{x}) \\ &= (c - \hat{x}_1)^2 + \hat{x}_1^2 + \sum_{n=1}^{3} \left[(\hat{x}_n - \hat{x}_{n+1})^2 + \hat{x}_{n+1}^2\right] \\ &= \sum_{n=0}^{3} \left(\hat{u}_n^2 + \hat{x}_{n+1}^2\right) \\ &= f(\hat{x}, \hat{u}) \end{aligned}$$

である。よって、$(\hat{x}, \hat{u})$ は制約問題 (P'_{s8}) の最小解である。また $f(\hat{x}, \hat{u}) = I(\hat{x})$ であることも示された。 □

参考文献

[1] Bellman, R.E., *Dynamic Programming*, Princeton Univ. Press, NJ, 1957.

[2] 岩本誠一, 『動的計画論』, 九大出版会, 1987 年.

[3] 岩本 誠一・吉良 知文・植野 貴之, 「ダ・ヴィンチ・コード」, 経済学研究 (九大経済学会), 第 76 巻 2/3 号, 2009 年, pp.1–22.

[4] 岩本 誠一・吉良 知文・植野 貴之, 「ダ・ヴィンチ・コード 64」, 経済学研究 (九大経済学会), 第 77 巻 1 号, 2010 年, pp.1–25.

[5] 岩本 誠一・木村 寛, 「交互ダ・ヴィンチ・コード」, 経済学研究 (九大経済学会), 第 76 巻 4 号, 2010 年, pp.1–18.

[6] Iwamoto, S. and Kimura, Y., *"The Alternately Fibonacci Complementary Duality in Quadratic Optimization Problem"*, Journal of Nonlinear Analysis and Optimization, Vol.2, No.1, 2011, pp.93–103.

[7] 岩本 誠一・木村 寛, 「交互ダ・ヴィンチ・コード 64」, 経済学研究 (九大経済学会), 第 78 巻 1 号, 2011 年, pp.1–26.

[8] Iwamoto, S. and Kira, A., "The Fibonacci complementary duality in quadratic programming," Ed. Takahashi, W. and Tanaka, T., *Proceedings of the 5th Intl. Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA2007 Taiwan)*, Yokohama, Yokohama Publishers, 2009, pp.63–73.