数理解析研究所講究録
第 1802 巻 2012 年 193-199

多段決定問題と Stochastic Convexity について

千葉大学教育学部　中井　達 (Tōru Nakai)
Faculty of Education, Chiba University

1　はじめに

[6] において、評価と関連する状態に関する状態をもとに、支出を決定する逐次決定問題を扱った。また、状態は支出によって変えることが出来た。ここでは、[6] などで扱った問題を費用最小化 (利得最大化) 問題に応用することを考える。

いま、自動車や電化製品などに関して問題が生じたとき、どのように対応するかを決定するモデルを考える。ここでは、製品の状態を $(0,\infty)$ によって表し、状態を表す値 s が大きくなれば状態が良くなるとする。また、この状態は決定にかかわらず、マルコフ過程にしたがって状態が推移する。このとき、計画期間内で費用 (利得) を最小化 (最大化) する最適政策と最適政策にしたがったときに得られる最適値について考える。また、[6] などと同様に、問題が生じたときに取った決定により状態は変化するとする。

2　多段決定問題

状態空間を $(0,\infty)$ とし、状態を表す値 s が大きくなれば状態が良くなるとする。状態が s のとき、決定 α を取れば、新しい状態を αs とできる $(\alpha\geq 1)$。このときの費用を $C(\alpha)$ とする。$u(s)$ を最後の期の状態が s のときの終端費用 (終端利得) とする。また、状態が確率的に推移する場合を考えるときには、状態は推移法則を $\boldsymbol{P}=(p_s(t))_{s,t\in(0,\infty)}$ とするマルコフ過程にしたがって推移するとする。

$s\in(0,\infty)$ で定義された関数 $u(s)$ が、任意の $\widehat{s}<\overline{s}$ と $0<\lambda<1$ となる λ に対して

$$u(\widehat{s}^{\lambda}\overline{s}^{1-\lambda})\geq(\leq)\lambda u(\widehat{s})+(1-\lambda)u(\overline{s}) \tag{1}$$

となるとき、この関数 $u(s)$ をここでは簡単のために P-concave(P-convex) と言う。

補題 1 $u(s)$ を *P-concave*(*P-convex*) とする。$\widehat{s}<\overline{s},\widehat{s}'<\overline{s}'$ となる $\widehat{s},\overline{s},\widehat{s}',\overline{s}'$ に対して、

$$u(\overline{s}')-u(\widehat{s}')\leq(\geq)u(\overline{s})-u(\widehat{s}). \tag{2}$$

である。

$v(s)=\min_{\alpha\geq 1}\{C(\alpha)+u(\alpha s)\}$ とするとき、$u(s)$ が s の増加 (減少) 関数であれば、$v(s)$ も増加 (減少) 関数であることは明らかである。

補題 2 $v(s)=\min_{\alpha\geq 1}\{C(\alpha)+u(\alpha s)\}$ とする。$C(\alpha)$ は *P-concave* のとき、$u(s)$ が *P-concave* ならば、$v(s)$ も *P-concave* である。また、$u(s)$ が *P-convex* ならば、$v(s)$ も *P-convex* である。ただし、$C(\alpha)$ は増加関数とする。

補題 3 $v(s) = \max_{\alpha \geq 1}\{-C(\alpha) + u(\alpha s)\}$ とする。このとき、$u(s)$ が *P-concave* ならば、$v(s)$ も *P-concave* である。また、$C(\alpha)$ が *P-convex* のとき、$u(s)$ が *P-convex* ならば、$v(s)$ も *P-convex* である。ただし、$C(\alpha)$ は増加関数とする。

2.1 Partial Maintenance を考慮した多段決定問題 I

状態空間を $(0, \infty)$ とし、状態が s のとき、決定 α を取れば、新しい状態を αs とできる $(\alpha \geq 1)$。このときの費用を $C(\alpha)$ とし、最小化問題 (最大化問題) では、$u(s)$ を最後の期の状態が s のときの終端費用 (利得) とする。また、$C(0) = 0$ であり、$C(\alpha)$ は増加関数とする。このとき計画期間内の総費用 (総利得) を最小化 (最大化) する問題を考える。始めに、状態が確率的に推移しないとする。

状態が s のとき、n 期間にわたって決定を行い総費用 (総利得) を最小 (最大) にする問題で、最適政策にしたがったときに得られる総費用 (総利得) を $w_n(s)$ とすれば、最適性の原理よりつぎの最適方程式が得られる。

(I) 最小化問題

$$w_n(s) = \min_{\alpha \geq 1}\{C(\alpha) + w_{n-1}(\alpha s)\}, \tag{3}$$

ここで $w_1(s) = \min_{\alpha \geq 1}\{C(\alpha) + u(\alpha s)\}$ とする。ただし、$u(s)$ は s の減少関数とし、$C(\alpha)$ は α の増加関数とする。また、$u(s)$ が P-concave となる問題を考えるときは、$C(\alpha)$ は P-concave とする。

(II) 最大化問題

$$w_n(s) = \max_{\alpha \geq 1}\{-C(\alpha) + w_{n-1}(\alpha s)\}, \tag{4}$$

ここで $w_1(s) = \max_{\alpha \geq 1}\{-C(\alpha) + u(\alpha s)\}$ とする。ただし、$u(s)$ は s の増加関数とし、$C(\alpha)$ は α の増加関数とする。また、$u(s)$ が P-convex となる問題を考えるときは、$C(\alpha)$ は P-convex とする。

状態が s のとき、α を選択し $(\alpha \geq 1)$、費用 $C(\alpha)$ を支払って状態 s を αs できる。このとき、つぎの性質が成り立つ。

補題 4 (最小化問題) $w_n(s)$ は、s に関する減少関数である。

補題 5 (最大化問題) $w_n(s)$ は、s に関する増加関数である。

補題 6 (最小化問題) $C(\alpha)$ は *P-concave* のとき、$u(s)$ が *P-concave* ならば、$w_n(s)$ は *P-concave* である。$u(s)$ が *P-convex* ならば、$w_n(s)$ は *P-convex* である。

補題 7 (最大化問題) $u(s)$ が *P-concave* ならば、$w_n(s)$ は *P-concave* である。また、$C(\alpha)$ は *P-convex* のとき、$u(s)$ が *P-convex* ならば、$w_n(s)$ は *P-convex* である。

このように、以下の議論では、最小化問題で、$u(s)$ が P-concave となる問題を考えるときは、$C(\alpha)$ は P-concave とし、最大化問題で $u(s)$ が P-concave となる問題を考えるときは、$C(\alpha)$ は P-concave とする。

補題 8 (最小化問題) $u(s)$ が *P-concave* ならば、$\alpha_n(s)$ は s に関して増加する。また、$u(s)$ が *P-convex* ならば、$\alpha_n(s)$ は s に関して減少する。

補題 9 (最大化問題) $u(s)$ が *P-concave* ならば、$\alpha_n(s)$ は s に関して減少する。また、$u(s)$ が *P-convex* ならば、$\alpha_n(s)$ は s に関して増加する。

補題 10 (最小化問題) $u(s)$ が *P-concave* ならば、$\alpha_n(s)$ は n に関して増加する。また、$u(s)$ が *P-convex* ならば、$\alpha_n(s)$ は n に関して減少する。

補題 11 (最大化問題) $u(s)$ が *P-concave* ならば、$\alpha_n(s)$ は n に関して減少する。また、$u(s)$ が *P-convex* ならば、$\alpha_n(s)$ は n に関して増加する。

3 Stocahstic Convexity and Concavity

X と Y を 2 つの確率変数とするとき、基本的な確率的な順序関係として、つぎのようなものが知られている。

(1) 任意の増加関数 $u(s)$ に対して、$E[u(X)] \geq E[u(Y)]$ であるとき、$X \geq_{ST} Y$ と表す。(stochastic order)
(2) 任意の増加 (減少) 凸 (convex) 関数 $u(s)$ に対して、$E[u(X)] \geq E[u(Y)]$ であるとき、$X \geq_{ICX} (\geq_{DCX}) Y$ と表す。(increasing (decreasing) convex order)
(3) 任意の増加 (減少) 凹 (concave) 関数 $u(s)$ に対して、$E[u(X)] \geq E[u(Y)]$ であるとき、$X \geq_{ICV} (\geq_{DCV}) Y$ と表す。(increasing (decreasing) concave order)

つぎに、Shaked and Shanthikumar [9] にしたがって、s をパラメータとする確率変数列 $\{X(s)|s \in (-\infty, \infty)\}$ に対して、Stocahstic Convexity と Stocahstic Concavity をつぎのように定義する。

(1) $\{X(s)|s \in (-\infty, \infty)\}$ が SI であるとは、任意の増加 関数 $u(s)$ に対して、$E[u(X(s))]$ が、s の増加関数となることをいう。(stocahstically increasing)
(2) $\{X(s)|s \in (-\infty, \infty)\}$ が SICX であるとは、任意の増加凸関数 $u(s)$ に対して、$E[u(X(s))]$ が、s の増加凸 関数となることをいう。(stocahstically increasing and convex)
(3) $\{X(s)|s \in (-\infty, \infty)\}$ が SICV であるとは、任意の増加凹関数 $u(s)$ に対して、$E[u(X(s))]$ が、s の増加凹関数となることをいう。(stocahstically increasing and concave)
(4) $\{X(s)|s \in (-\infty, \infty)\}$ が SD であるとは、任意の増加関数 $u(s)$ に対して、$E[u(X(s))]$ が、s の減少関数となることをいう。(stocahstically decreasing)
(5) $\{X(s)|s \in (-\infty, \infty)\}$ が SDCX であるとは、任意の増加凸関数 $u(s)$ に対して、$E[u(X(s))]$ が、s の減少凸 関数となることをいう。(stocahstically decreasing and convex)
(6) $\{X(s)|s \in (-\infty, \infty)\}$ が SDCV であるとは、任意の増加凹関数 $u(s)$ に対して、$E[u(X(s))]$ が、s の減少凹関数となることをいう。(stocahstically decreasing and concave)

つぎに、$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq s_4$ で $s_1 + s_4 = s_3 + s_2$ のとき、$X_i = X(s_i)$ とおく $(i = 1, 2, 3, 4)$。$(s_4 - s_3 = s_2 - s_1)$ このとき、SICX や SICV より弱い概念である SICX(sp) と SICV(sp) をつぎのように定義する。

(1) $\{X(s)|s \in (-\infty,\infty)\}$ が SICX(sp) であるとは、$\max\{X_2, X_3\} \le X_4$ であり (a.s.)、$X_2 + X_3 \le X_1 + X_4$ であることをいう。(stocahstically increasing and convex in sample path sense)

(2) $\{X(s)|s \in (-\infty,\infty)\}$ が SICV(sp) であるとは、$X_1 \le \max\{X_2, X_3\}$ であり (a.s.)、$X_2 + X_3 \ge X_1 + X_4$ であることをいう。(stocahstically increasing and concave in sample path sense)

補題 12 (1) $\{X(s)|s \in (-\infty,\infty)\}$ が *SICX(sp)* ならば、*SICX* である。
(2) $\{X(s)|s \in (-\infty,\infty)\}$ が *SICV(sp)* ならば、*SICV* である。

例 1 $X(\mu)$ を正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ とする。$\{X(\mu)|\mu \in (-\infty,\infty)\}$ は *SICX(sp)* であり *SICV(sp)* である。

補題 13 (1) $\{X(s)|s \in (-\infty,\infty)\}$ が *SICX(sp)* であり、$u(\cdot)$ を増加凸関数 とする。このとき、$\{u(X(s))|s \in (-\infty,\infty)\}$ もまた *SICX(sp)* である。
(2) $\{X(s)|s \in (-\infty,\infty)\}$ が *SICV(sp)* であり、$u(\cdot)$ を増加凹関数 とする。このとき、$\{u(X(s))|s \in (-\infty,\infty)\}$ もまた *SICV(sp)* である。

例 2 $X(\mu)$ を正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ とする。$Y(\mu) = e^{X(\mu)}$ とおけば、$u(x) = e^x$ が増加凸関数 だから $\{Y(\mu)|\mu \in (-\infty,\infty)\}$ は *SICX(sp)* である。したがって、$Y(\mu)$ は対数正規分布であり、対数正規分布は *SICX(sp)* であり、*SICX* である。

$u(x)$ を x の P-convex 関数とすれば、$w(y) \equiv u(e^y)$ は、$w(\lambda\log a + (1-\lambda)\log b) = u(e^{\lambda\log a+(1-\lambda)\log b}) \le \lambda u(e^{\log a}) + (1-\lambda)u(e^{\log b}) = \lambda w(a) + (1-\lambda)w(b)$ なので、y の凸関数である。いっぽう、$X(s)$ を密度関数が $f_s(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma t}e^{-\frac{(\log t-\log s)^2}{2\sigma^2}} = \frac{\phi_{\log s,\sigma^2}(\log t)}{t}$ の対数正規分布関数とする。ここで、$\phi_{\mu,\sigma^2}(x)$ を正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ の密度関数とし、$Y(s)$ を正規分布 $N(s,\sigma^2)$ にしたがう関数列とする。このとき、

$$E[u(X(a^\lambda b^{1-\lambda}))] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{\lambda\log a-(1-\lambda)\log b,\sigma^2}(x)w(x)dx$$

となる。ところで、$\{Y(s)\}$ は SICX より、$E[u(X(a^\lambda b^{1-\lambda}))] = E[w(Y(\lambda\log a - (1-\lambda)\log b))] \le \lambda E[w(Y(\log a))] + (1-\lambda)E[w(Y(\log b))]$ となる。ここで、$E[w(Y(\log a))] = E[u(X(a))]$ および $E[w(Y(\log b))] = E[u(X(b))]$ である。よって、$E[u(X(a^\lambda b^{1-\lambda}))] \le \lambda E[u(X(a))] + (1-\lambda)E[u(X(b))]$ となる。$E[u(X(s))]$ は x の P-convex 関数である。

定義 1 $u(s)$ を任意の増加 *P-convex* (*P-concave*) 関数とする。$E[u(X(s))]$ が s の増加 *P-convex* (*P-concave*) 関数となるとき、$\{X(s)\}_{s\in(0,\infty)}$ を SIPCX(SIPCV) という。(*stochastically increasing and P-convex* (*P-concave*))

3.1 Partial Maintenance を考慮した多段決定問題 II

状態がマルコフ過程にしたがって推移し、推移法則を $\boldsymbol{P} = (p_s(t))_{s,t\in(0,\infty)}$ とする。各期ごとの決定を $\alpha \ge 1$ とする。このとき、計画期間が n で、状態が s のとき、最小化問題 (最大化問題) において、最適に振る舞って得られる総期待損失 (総期待利得) を $w_n(s)$

とすれば、状態がマルコフ過程にしたがって推移するから、最適方程式はつぎのようになる。ここで、$E[v_{n-1}(T(s))] = \int_0^\infty p_s(t)v_{n-1}(t)dt$ である。

(I) 最小化問題

$$v_n(s) \quad = \quad \min_{\alpha \geq 1}\{C(\alpha) + E[v_{n-1}(T(\alpha s))]\}, \tag{5}$$

ここで、

$$v_1(s) = \min_{\alpha \geq 1}\{C(\alpha) + E[u(T(\alpha s))]\}$$

とする。ただし、$u(s)$ は s の減少関数とし、$C(\alpha)$ は α の増加関数とする。ただし、$u(s)$ が P-concave となる問題を考えるときは、$C(\alpha)$ は P-concave とする。

(II) 最大化問題

$$v_n(s) \quad = \quad \max_{\alpha \geq 1}\{-C(\alpha) + E[v_{n-1}(T(\alpha s))]\}, \tag{6}$$

ここで、

$$v_1(s) = \max_{\alpha \geq 1}\{-C(\alpha) + E[u(T(\alpha s))]\}$$

とする。ただし、$u(s)$ は s の増加関数とし、$C(\alpha)$ は α の増加関数とする。また、$u(s)$ が P-convex となる問題を考えるときは、$C(\alpha)$ は P-convex とする。

補題 14 (最小化問題) $v_n(s)$ は、s に関する減少関数である。

補題 15 (最大化問題) $v_n(s)$ は、s に関する増加関数である。

$T(s)$ を状態が s のときつぎの状態を表す確率変数とする。推移法則が $(p_s(t))_{0 \leq s \leq 1}$ だから、確率変数列 $\{T(s)|s \in (0, \infty)\}$ に対して、つぎの仮定を設ける。これらの仮定は、$u(s)$ が P-convex のときは仮定 1 のもとで議論し、$u(s)$ が P-concave のときは仮定 2 のもとで議論できる。

仮定 1 (P-convex) t に関する増加 *P-convex* 関数を $u(t)$ とすれば、$E[u(T(s))]$ は s に関する増加 *P-convex* 関数となっている。すなわち、確率変数列 $\{T(s)|s \in (0, \infty)\}$ は、*SIPCX* である。

仮定 2 (P-concave) t に関する増加 *P-concave* 関数を $u(t)$ とすれば、$E[u(T(s))]$ は s に関する増加 *P-concave* 関数となっている。すなわち、確率変数列 $\{T(s)|s \in (0, \infty)\}$ は、*SIPCV* である。

補題 16 (最小化問題) 仮定 1 のもとで、$u(s)$ が *P-convex* ならば、$v_n(s)$ は *P-convex* である。ただし、$C(\alpha)$ は増加関数とする。また、仮定 2 のもとで、$u(s)$ が *P-concave* ならば、$v_n(s)$ は *P-concave* である。ただし、$C(\alpha)$ は増加関数とし、$C(\alpha)$ は *P-concave* とする。

補題 17 (最大化問題) 仮定 1 のもとで、$u(s)$ が *P-convex* ならば、$v_n(s)$ は *P-convex* である。ただし、$C(\alpha)$ は増加関数とし、$C(\alpha)$ は *P-convex* とする。また、仮定 2 のもとで、$u(s)$ が *P-concave* ならば、$v_n(s)$ は *P-concave* である。ただし、$C(\alpha)$ は増加関数とする。

計画期間が n であり、状態が s のときの、最適な決定を $\alpha_n^*(s)$ とする。

性質 1 (最小化問題) 仮定 1 のもとで、$u(s)$ が *P-convex* ならば、$\alpha_n^*(s)$ は s に関して減少する。また、仮定 2 のもとで、$u(s)$ が *P-concave* ならば、$\alpha_n^*(s)$ は s に関して増加する。

性質 2 (最大化問題) 仮定 2 のもとで、$u(s)$ が *P-concave* ならば、$\alpha_n^*(s)$ は s に関して減少する。また、仮定 1 のもとで、$u(s)$ が *P-convex* ならば、$\alpha_n^*(s)$ は s に関して増加する。

仮定 3 (P-convex) $s' \geq s$ のとき任意の *P-convex* 関数 $u(s)$ に対して、$E[u(T(s'))] - E[u(T(s))] \geq u(s') - u(s)$ である。

仮定 4 (P-concave) $s' \geq s$ のとき任意の *P-concave* 関数 $u(s)$ に対して、$E[u(T(s'))] - E[u(T(s))] \leq u(s') - u(s)$ である。

性質 3 (最小化問題) 仮定 3 のもとで、$u(s)$ が *P-convex* ならば、$\alpha_n(s)$ は n に関して減少する。また、仮定 4 のもとで、$u(s)$ が *P-concave* ならば、$\alpha_n(s)$ は n に関して増加する。

性質 4 (最大化問題) 仮定 3 のもとで、$u(s)$ が *P-convex* ならば、$\alpha_n(s)$ は n に関して増加する。また、仮定 4 のもとで、$u(s)$ が *P-concave* ならば、$\alpha_n(s)$ は n に関して減少する。

注 1 状態空間を $(0, \infty)$ とし、状態を表す値 s が大きくなれば状態が悪くなるとする。このときつぎのような問題を考える。状態が s のとき、決定 α を取れば、新しい状態を αs とでき $(0 < \alpha \leq 1)$、その費用を $C(\alpha)$ とし、$u(s)$ を最後の期の状態が s のときの終端費用とする。計画期間が n で状態が s のとき、最適に振る舞ったときの総期待費用を $v_n(s)$ とすれば、状態がマルコフ過程にしたがって推移するから、最適方程式はつぎのようになる。

$$v_n(s) \quad = \quad \min_{0<\alpha\leq 1}\{C(\alpha) + E[v_{n-1}(T(\alpha s))]\}, \tag{7}$$

ここで、

$$v_1(s) = \min_{0<\alpha\leq 1}\{C(\alpha) + E[u(T(\alpha s))]\}$$

とする。ただし、$u(s)$ は s の増加関数とし、$C(\alpha)$ は α の減少関数とする。この場合にも同様の性質を求めることができる。また、最大化問題としても同様である。(京都大学数理解析研究所講究録「不確実性下における意思決定問題」, vol. 1734, 220–227 参照)

参考文献

[1] Albright, S. C., Structural results for partially observable Markov decision processes. Oper. Res. 27 (1979), 1041–1053.

[2] Grosfeld-Nir, A., A two-state partially observable Markov decision process with uniformly distributed observations. Oper. Res. 44 (1996), 458–463.

[3] Itoh, H. and Nakamura, K., Partially observable Markov decision processes with imprecise parameters. Artificial Intelligence 171 (2007), 453–490.

[4] M. Kijima and M. Ohnishi: Stochastic Orders and Their Applications in Financial Optimization, *Math. Methods of Oper. Res.*, **50**, 351–372, (1999).

[5] G. E. Monahan: Optimal selection with alternative information. *Naval Res. Logist. Quart.* 33 (1986), 293–307.

[6] T. Nakai, A Sequential Decision Problem based on the Rate Depending on a Markov Process, *Recent Advances in Stochastic Operations Research 2* (Eds. T. Dohi, S. Osaki and K. Sawaki), World Scientific Publishing, 11–30, 2009.

[7] T. Nakai, Sequential Decision Problem with Partial Maintenance on a Partially Observable Markov Process, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, vol. 72, no. 1, 11–20, 2010.

[8] Ohnishi, M., Kawai, H. and Mine, H., An optimal inspection and replacement policy under incomplete state information. European J. Oper. Res. 27 (1986), 117–128.

[9] Shaked, M. and Shanthikumar, J. G., *Stochastic Orders and Their Applications* (Probability and mathematical statistics : a series of monographs and textbooks), Academic Press, Boston, Massachusetts, 1994.

[10] White, D. J. Structural properties for contracting state partially observable Markov decision processes. J. Math. Anal. Appl. 186 (1994), 486–503