数理解析研究所講究録
第 1803 巻 2012 年 1-11

分数べき積分作用素の離散化に関して*

澤野嘉宏† (京都大学)

A discretization of fractional integral operators

Yoshihiro Sawano (Kyoto University)

概 要

この報告集では，分数べき積分作用素とウェーブレットとの関係に関して論じる．また，講演内で話した関連する話題にも触れる．

2000 Mathematics Subject Classification(s): 41A17, 26A33
Key Words: 分数べき積分作用素，ウェーブレット

1 導入

分数べき積分作用素は

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy$$

によって与えられる．ハーディー・リトルウッド・ソボレフの不等式は

$$\|I_\alpha f\|_{L^q} \le c\|f\|_{L^p},\ 1 < p < q < \infty,\ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$$

で与えられる不等式であるが，証明方法としては例えば，以下の方法がある．

1. ヤングの不等式を改良する．[1]
2. ハーディー・リトルウッドの極大作用素を用いる．[2]
3. リトルウッド・ペイリー理論を活用する．[13]

これらの巧妙なテクニックを用いないと，$I_\alpha f(x)$ の定義式に現れている広義積分は計算できない．実際に，$|x-y|^{\alpha-n}$ の絡んだ不定積分を正確に計算するのは原理的に不可能であるからである．本講演の目的は，ウエーブレットを介して，この I_α を分解する方法を与えることである．この分解方法を使えば，ある程度の段階まで，I_α を計算できることがご理解いただけるであろう．

*本研究は科研費　若手研究Ｂ　課題番号　２１７４０１０４「調和解析の数学一般への応用」の補助を受けております．

†京都大学理学部数学教室 606-8502, Japan.
e-mail: yoshihiro-sawano@celery.ocn.ne.jp

2 ハールウエーブレット

本講演で用いるウエーブレットはハールウエーブレットである．定義を復習しておこう．

Definition 2.1.

1. 一変数 t の関数 h^0, h^1 をそれぞれ $h^0(t) = \chi_{[0,1)}(t)$，$h^1(t) = \chi_{[0,1/2)}(t) - \chi_{[1/2,1)}(t)$ で定める．

2. $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$ に対して，n 変数 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の関数 h^ε を
$$h^\varepsilon(x) = h^{\varepsilon_1}(x_1)h^{\varepsilon_2}(x_2)\cdots h^{\varepsilon_n}(x_n)$$
で定める．

3. $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$ と $j \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}^n$ に対して，$h^\varepsilon_{j,m}(x) = h^\varepsilon(2^j x - m)$ とおく．

4. $E = \{0,1\}^n \setminus \{(0,0,\cdots,0)\}$ とおく．

次の定理を復習しておこう．

Theorem 2.2. [3, 15] $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対して，
$$f = \sum_{\varepsilon \in E} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \langle f, h^\varepsilon_{j,m} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} h^\varepsilon_{j,m} \right)$$
が $L^2(\mathbb{R}^n)$ の位相で成り立ち，ノルム同値
$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \sim \left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \langle f, h^\varepsilon_{j,m} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} h^\varepsilon_{j,m} \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$
が成り立つ．

3 分数べき積分作用素の近似について

Definition 3.1. f は $L^2(\mathbb{R}^n)$ 関数とする．$\varepsilon \in E$ と $j \in \mathbb{Z}$ に対して，
$$P^\varepsilon_j f = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \langle f, h^\varepsilon_{j,m} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} h^\varepsilon_{j,m}$$
と定める．

本稿では，次に定義する作用素 $I^{\alpha}_{\mathrm{dyadic}}$ が I^{α} を近似していることを示す．

Definition 3.2. $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$I^{\alpha}_{\mathrm{dyadic}} f = \sum_{\varepsilon \in E} \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{-\alpha j} P^{\varepsilon}_j f = \sum_{\varepsilon \in E} \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{-\alpha j} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \langle f, h^{\varepsilon}_{j,m} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} h^{\varepsilon}_{j,m} \right)$$

と定める．

I^{α} と $I^{\alpha}_{\mathrm{dyadic}}$ は似ているとはとても思えないが，回転，拡大，平行移動を組み合わせることによって，以下のことが示される．とりあえず,「回転，拡大，平行移動」を定義しておこう．

Definition 3.3. $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ とする．

1. $y \in \mathbb{R}^n$ に対して，$T_y f = f(\cdot - y)$ と定める．
2. $t > 0$ に対して，$D_t f = t^{-n/2} f(t^{-1} \cdot)$ と定める．
3. $A \in \mathrm{O}(n)$ に対して，$\rho_A f = f(A^{-1} \cdot)$ と定める．

本稿では，積分核の性質のみを調べて，収束に関する結果は考察しない．

$$K^{\varepsilon}_j(x, y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} h^{\varepsilon}_{j,m}(x) h^{\varepsilon}_{j,m}(y) \quad (\varepsilon \in E,\ j \in \mathbb{Z})$$

と定める．極限などの話を考えずに，形式的に考えれば，

$$P^{\varepsilon}_j f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K^{\varepsilon}_j(x, y) f(y) \, dy$$

となることは明らかであろう．K^{ε} を平行移動してみよう．

Lemma 3.4. $Q_1, Q_2, \cdots, Q_k, \cdots$ を合併が $\mathbb{R}^n$ となる閉立方体の増大列としよう．このとき，$\varepsilon \in E$ に対して，

$$\begin{aligned}
&\lim_{k \to \infty} \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} K^{\varepsilon}_j(x - z, y - z) \, dz \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} 2^{jn} \int_{[0, 2^{-j})^n} h^{\varepsilon}_{j,m}(x - z) h^{\varepsilon}_{j,m}(y - z) \, dz \\
&= 2^{jn} \int_{\mathbb{R}^n} h^{\varepsilon}_{j,0}(x - z) h^{\varepsilon}_{j,0}(y - z) \, dz
\end{aligned}$$

となる．

証明. $k \in \mathbb{N}$ に対して，Q_k の辺長は 2^{-j+2} より大きいとする．$k \to \infty$ の挙動を調べているので，そうでない Q_k は以後の考察の対象にはならない．立方体 Q_k^* を $\prod_{l=1}^{n}[2^{-j}k_l, 2^{-j}(k_l+m))$ の形をした立方体で Q_k を含むものとして最大のものとする．Q_k を補正して，Q_k^* を得られたのであるが，

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}K_j^\varepsilon(x-z,y-z)\,dz=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{|Q_k^*|}\int_{Q_k^*}K_j^\varepsilon(x-z,y-z)\,dz$$

は明らかであろう．ところが，任意のベクトル $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$ に対して，周期性 $K_j^\varepsilon(x+2^{-j}\mathbf{k}, y+2^{-j}\mathbf{k}) = K_j^\varepsilon(x,y)$ が成り立つから，

$$\frac{1}{|Q_k^*|}\int_{Q_k^*}K_j^\varepsilon(x-z,y-z)\,dz=\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}2^{jn}\int_{[0,2^{-j})^n}h_{j,m}^\varepsilon(x-z)h_{j,m}^\varepsilon(y-z)\,dz$$

が得られる．さらに，この量を計算していって

$$\begin{aligned}&\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}2^{jn}\int_{[0,2^{-j})^n}h_{j,m}^\varepsilon(x-z)h_{j,m}^\varepsilon(y-z)\,dz\\&=\sum_{m\in\mathbb{Z}^n}2^{jn}\int_{[0,2^{-j})^n}h_{j,0}^\varepsilon(x-z-2^{-j}m)h_{j,0}^\varepsilon(y-z-2^{-j}m)\,dz\\&=2^{jn}\int_{\mathbb{R}^n}h_{j,0}^\varepsilon(x-z)h_{j,0}^\varepsilon(y-z)\,dz\end{aligned}$$

が得られる． □

$$K^\varepsilon(x,y)=\sum_{\varepsilon\in E}\sum_{j=-\infty}^{\infty}2^{-j\alpha}K_j^\varepsilon(x,y)$$

と定める．極限に関しておおらかに考えると次のことが言える．

Corollary 3.5. $Q_1, Q_2, \cdots, Q_k, \cdots$ を合併が $\mathbb{R}^n$ となる閉立方体の増大列としよう．このとき，

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty}\frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k}K^\varepsilon(x-z,y-z)\,dz\\&=\sum_{\varepsilon\in E}\sum_{j=-\infty}^{\infty}2^{j(n-\alpha)}\int_{\mathbb{R}^n}h_{j,0}^\varepsilon(x-z)h_{j,0}^\varepsilon(y-z)\,dz\\&=\sum_{\varepsilon\in E}\sum_{j=-\infty}^{\infty}2^{j(2n-\alpha)}\int_{\mathbb{R}^n}h_{0,0}^\varepsilon(2^jx-z)h_{0,0}^\varepsilon(2^jy-z)\,dz\end{aligned}$$

次に拡大について考えよう．

Lemma 3.6. 等式

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{(j+\kappa)(n-\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} h^{\varepsilon}_{0,0}(2^{j+\kappa}x - z) h^{\varepsilon}_{0,0}(2^{j+\kappa}y - z)\, dz\, d\kappa \\
&= \frac{1}{\log 2} \int_0^{\infty} t^{2n-\alpha-1} \int_{\mathbb{R}^n} h^{\varepsilon}_{0,0}(t(x-z)) h^{\varepsilon}_{0,0}(t(y-z))\, dz\, dt
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

Corollary 3.7. $Q_1, Q_2, \cdots, Q_k, \cdots$ を合併が $\mathbb{R}^n$ となる閉立方体の増大列としよう．このとき，

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 2^{\kappa(n-\alpha)} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} K^{\varepsilon}(2^{\kappa}x - z, 2^{\kappa}y - z)\, dz\, d\kappa \\
&= \frac{1}{\log 2} \int_0^{\infty} t^{2n-\alpha-1} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\varepsilon\in E} h^{\varepsilon}_{0,0}(t(x-z)) h^{\varepsilon}_{0,0}(t(y-z))\, dz\, dt
\end{aligned}
$$

これを回転させることにより，

Lemma 3.8. $\mathrm{dvol}_{\mathrm{O}(n)}$ で $\mathrm{O}(n)$ のハール測度を表す．

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathrm{O}(n)} \int_0^1 2^{\kappa(n-\alpha)} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} K^{\varepsilon}(2^{\kappa}Ax - z, 2^{\kappa}Ay - z)\, dz\, d\kappa\, \mathrm{dvol}_{\mathrm{O}(n)} A \\
&= \int_{\mathrm{O}(n)} \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\varepsilon\in E} t^{2n-\alpha-1} h^{\varepsilon}_{0,0}(tA(x-z)) h^{\varepsilon}_{0,0}(tA(y-z))\, dz\, dt\, \mathrm{dvol}_{\mathrm{O}(n)} A
\end{aligned}
$$

となる．

証明. z 方向に $z \mapsto Az$ の変数変換を施せばよい． □

ここで，関数

$$
\begin{aligned}
&\varphi(x,y) \\
&= \int_{\mathrm{O}(n)} \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\varepsilon\in E} t^{2n-\alpha-1} h^{\varepsilon}_{0,0}(tA(x-z)) h^{\varepsilon}_{0,0}(tA(y-z))\, dz\, dt\, \mathrm{dvol}_{\mathrm{O}(n)} A
\end{aligned}
$$

を具体的に計算していこう．

$z \mapsto z - y$ なる変換を施せば明らかなように，$\varphi(x,y) = \varphi(x-y, 0)$ であるから，$y = 0$ の場合をとくに考えればよい．x は 0 ではないものとして，固定してお

く．また，$|x|\mathbf{e}_1 = (|x|, 0, \cdots, 0)$ を x に移す $A_0 \in \mathrm{O}(n)$ を考えて，変換 $z \mapsto A_0 z$ と $AA_0 \mapsto A$ を施すことによって，$x = |x|\mathbf{e}$ の場合を考えればよい．ここで，

$$
\begin{aligned}
&\varphi(x,y)\\
&= \int_{\mathrm{O}(n)} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\varepsilon \in E} t^{2n-\alpha-1} h^{\varepsilon}_{0,0}(tA(|x|\mathbf{e}_1 - z)) h^{\varepsilon}_{0,0}(-tAz)\, dz\, dt\, \mathrm{dvol}_{\mathrm{O}(n)} A\\
&= \int_{\mathrm{O}(n)} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\varepsilon \in E} t^{n-\alpha-1} h^{\varepsilon}_{0,0}(tA|x|\mathbf{e}_1 + z) h^{\varepsilon}_{0,0}(z)\, dz\, dt\, \mathrm{dvol}_{\mathrm{O}(n)} A\\
&= |x|^{\alpha-n} \int_{\mathrm{O}(n)} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\varepsilon \in E} t^{n-\alpha-1} h^{\varepsilon}_{0,0}(tA\mathbf{e}_1 + z) h^{\varepsilon}_{0,0}(z)\, dz\, dt\, \mathrm{dvol}_{\mathrm{O}(n)} A
\end{aligned}
$$

Lemma 3.9. $\displaystyle\int_{\mathrm{O}(n)} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} t^{n-\alpha-1} h^{\varepsilon}_{0,0}(tA\mathbf{e}_1 + z) h^{\varepsilon}_{0,0}(z)\, dz\, dt\, \mathrm{dvol}_{\mathrm{O}(n)} A > 0$ が成り立つ．

証明. $O(n)$ の部分群 G を

$$G = \{\mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \,:\, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \{-1, 1\}\}$$

で定める．K_ε の代わりに，

$$L^\varepsilon(x,y) = \frac{1}{2^n} \sum_{A \in G} K^\varepsilon(Ax, Ay)$$

から初めて平行移動，拡大，回転を組み合わせても同じ

$$|x|^{\alpha-n} \int_{\mathrm{O}(n)} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} t^{n-\alpha-1} h^{\varepsilon}_{0,0}(tA\mathbf{e}_1 + z) h^{\varepsilon}_{0,0}(z)\, dz\, dt\, \mathrm{dvol}_{\mathrm{O}(n)} A$$

に到達するはずである．ほとんどいたるところ (x, y の各成分が 2 進有限小数ではない限り，) L^ε は正値であるから，結論が得られる． □

Theorem 3.10. $Q_1, Q_2, \cdots, Q_k, \cdots$ を合併が $\mathbb{R}^n$ となる閉立方体の増大列としよう．このとき，次の公式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
&I_\alpha f(x)\\
&\sim \sum_{\varepsilon \in E} \int_{\mathrm{O}(n)} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{k \to \infty} \frac{2^{\kappa(n-\alpha)}}{|Q_k|} \int_{Q_k} K^\varepsilon(2^\kappa Ax - z, 2^\kappa Ay - z)\, dz\, d\kappa\, \mathrm{dvol}_{\mathrm{O}(n)} A
\end{aligned}
$$

4 ハーディー・リトルウッド・ソボレフの定理への応用に関しての注意

このアプローチで，ハーディー・リトルウッド・ソボレフの定理を証明しようとすると，リトルウッド・ペイリー理論を用いた証明に近くなる．[14]

5 関連する等式

[12] に関連する等式が載っている．ここでは，その詳細を与える．

Definition 5.1 ([5, 6, 7, 9, 10, 11])**.** タイルとは $s = Q_{\nu m} \times Q_{-\nu m'}$ の形をしている集合である．ここで，$\nu \in \mathbb{Z}$，$m, m' \in \mathbb{Z}^n$ とする．このようなタイル s に対して，$I_s := Q_{\nu m}$，$\omega_s := Q_{-\nu m'}$ とおき，タイル全体の成す集合を $\mathbb{D}$ と表す．

以後，$\Phi \in \mathcal{S}$ を

$$\chi_{Q(9/100)} \le \Phi \le \chi_{Q(1/10)}$$

となるようにとる．

Definition 5.2.

1. $\varphi := \mathcal{F}^{-1}\Phi$.
2. $\Psi := \Phi - \Phi(2\cdot)$.
3. 立方体 Q に対して，$\Phi_Q(\xi) := \Phi\left(\dfrac{\xi - c(Q)}{\ell(Q)}\right)$ と定める．
4. [11] $s \in \mathbb{D}$ に対して，$\varphi_s(x) := M_{c(\omega_{s(1)})} T_{c(I_s)} D_{\ell(I_s)} \varphi(x)$ と定める．

次の性質を示すのは容易である．

Lemma 5.3.

1. 立方体 Q に対して，

$$\chi_{\frac{27}{25}Q} \le \Phi_{6Q} \le \chi_{\frac{6}{5}Q}. \tag{1}$$

2. s をタイルとするとき，

$$\mathcal{F}\varphi_s = T_{c(\omega_{s(1)})} M_{-c(I_s)} D_{\ell(\omega_s)} \Phi. \tag{2}$$

とくに，$\mathrm{supp}(\mathcal{F}\varphi_s) \subset \dfrac{1}{5}\omega_{s(1)}$.

(1) より，Φ_{6Q} と χ_Q はほとんど同じであると分かる．一方で，(2) から，フーリエ変換を取ると，φ_s は台が $c(\omega_{s(1)})$ に集中している．

プランシュレルの定理によって，次の補題を示すのは難しくない．

Lemma 5.4. $\xi \in \mathbb{R}^n$ ならば，

$$\left(\sum_{s\in\mathbb{D}\,:\,\omega_{s(2^n)}\ni\xi} |\langle f, \varphi_s\rangle_{L^2}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \|f\|_2.$$

次に，時間周波数解析におけるモデル作用素を考える．

Definition 5.5. モデル二進作用素とは

$$A_{\xi,\mathbb{P}}f(x) := \sum_{s\in\mathbb{P}\,:\,,\omega_{s(2^n)}\ni\xi} \langle f, \varphi_s\rangle_{L^2}\varphi_s,\ \mathbb{P}\subset\mathbb{D},\ \xi\in\mathbb{R}^n$$

で与えられる．

Lemma 5.6 ([11])**.** 作用素 $A_{\xi,\mathbb{P}}$ は $\mathbb{P}\subset\mathbb{D}$ と $\xi\in\mathbb{R}^n$ について，L^2 一様有界である．つまり，

$$\|A_{\xi,\mathbb{P}}\ :\ B(L^2)\| \lesssim 1.$$

ここで，$B(L^2)$ は L^2 有界線形作用素全体のなす集合を表す．

Definition 5.7. l 世代のモデル作用素 $A_{\eta,l}$ は

$$A_{\eta,l}f(x) := \sum_{s\in\mathbb{D}\,:\,\omega_{s(2^n)}\ni\eta,\,|I_s|=2^{ln}} \langle f, \varphi_s\rangle_{L^2}\varphi_s$$

で与えられる．

Lemma 5.8. $m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ が存在して，$2Q_N \subset Q_{N+1}$ がすべての $N\in\mathbb{N}$ について成り立つ $\{Q_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ に対して，

$$\lim_{N\to\infty}\int_{Q_N} M_{-\eta}A_{\eta,l}M_\eta f\,\frac{d\eta}{|Q_N|} = \mathcal{F}^{-1}[m(2^l\cdot)\cdot\mathcal{F}f]$$

となる．位相は L^2 の強位相である．

証明． 作用素の族

$$\left\{\int_{Q_N} M_{-\eta}A_{\eta,l}M_\eta\,\frac{d\eta}{|Q_N|}\right\}_{N\in\mathbb{N}}$$

が $B(L^2)$ で一様有界であるから，

$$f \in \mathcal{S}_0 = \{g \in \mathcal{S} : \mathcal{F}g \text{ は無限次数のオーダーで消える}\}$$

として構わない．

$$\mathcal{F}\left(\int_{Q_N} M_{-\eta} A_{\eta,l} M_\eta \frac{d\eta}{|Q_N|}\right)\mathcal{F}^{-1}f = \int_{Q_N} \mathcal{F}M_{-\eta}A_{\eta,l}M_\eta\mathcal{F}^{-1}f\,\frac{d\eta}{|Q_N|}$$

を考える．$Q_l = Q_l(\eta)$ で $\ell(Q_l) = 2^{-l}$ かつ $\eta \in Q_{l(2^n)}$ となる，あるとすれば，一意的である二進立方体を考える．フーリエ級数展開と (2) から，Q_l があれば，

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}M_{-\eta}A_{\eta,l}M_\eta\mathcal{F}^{-1}f \\
&= \sum_{s\in\mathbb{D}\,:\,\omega_{s(2^n)}\ni\eta,\,|I_s|=2^{ln}} \langle M_\eta\mathcal{F}^{-1}f, \varphi_s\rangle_{L^2}\mathcal{F}M_{-\eta}\varphi_s \\
&= \sum_{s\in\mathbb{D}\,:\,\omega_{s(2^n)}\ni\eta,\,|I_s|=2^{ln}} \langle f, \mathcal{F}M_{-\eta}\varphi_s\rangle_{L^2}\mathcal{F}M_{-\eta}\varphi_s \\
&= \sum_{s\in\mathbb{D}\,:\,\omega_{s(2^n)}\ni\eta,\,|I_s|=2^{ln}} \langle f, T_{c(\omega_{s(1)})-\eta}M_{c(I_s)}D_{\ell(\omega_s)}\Phi\rangle_{L^2}T_{c(\omega_{s(1)})-\eta}M_{c(I_s)}D_{\ell(\omega_s)}\Phi \\
&= f\cdot\left|\Phi\left(\frac{\cdot+\eta-c(Q_{l(1)})}{\ell(Q_l)}\right)\right|^2
\end{aligned}$$

となる．

$$m_l := 2^{ln}\int_{Q_{l+1,\bar{1}}}\left|\Phi\left(2^l(\cdot+\eta-2^{-2}\vec{1})\right)\right|^2 d\eta = \int_{\frac{\bar{1}}{2}+Q\left(\frac{1}{4}\right)}\left|\Phi\left(2^l\cdot+\zeta\right)\right|^2 d\zeta$$

と定めて，この等式を代入して，

$$\mathcal{F}\left(\int_{Q_N} M_{-\eta}A_{\eta,l}M_\eta\frac{d\eta}{|Q_N|}\right)\mathcal{F}^{-1}f = m_l\cdot f$$

が得られる．これは，$m := \int_{\frac{\bar{1}}{2}+Q\left(\frac{1}{4}\right)}|\Phi(\cdot+\zeta)|^2\,d\zeta$ に対して，結果が得られたことを意味している． □

Corollary 5.9. 補題 *5.8* と同じ記号を用いて，

$$M(\xi) := \sum_{l=-\infty}^{\infty} m(2^l\xi) \tag{3}$$

とすれば,

$$\lim_{L\to\infty}\sum_{l=-L}^{L}\left(\lim_{N\to\infty}\int_{Q_N} M_{-\eta}A_{\eta,l}M_\eta f\,\frac{d\eta}{|Q_N|}\right)=\mathcal{F}^{-1}(M\cdot\mathcal{F}f)$$

となる．位相は L^2 の強位相である．

この結果によって，次の公式が得られる．

Corollary 5.10. 補題 *5.8* の条件の下，$\alpha>0$ を

$$\alpha:=\int_{SO(n)}\int_0^1 M(2^\kappa A\xi)\,d\kappa\,d\mu\quad(\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$$

で定めれば,

$$\begin{aligned}&\alpha\, id_{L^2}\\&=\int_{SO(n)}\int_0^1\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty}\lim_{N\to\infty}\int_{Q_N}\rho(A^{-1})D_{2^{-\kappa}}M_{-\eta}A_{\eta,l}M_\eta D_{2^\kappa}\rho(A)\,\frac{d\eta}{|Q_N|}\right)d\kappa\,d\mu,\end{aligned}$$

となる．位相は L^2 の強位相である．

Remark.

1. (3) より，α は ξ に依存しない．
2. [11] では,

$$\rho(A^{-1})D_{2^{-\kappa}}T_{-y}M_{-\eta}A_{\eta,l}M_\eta T_y D_{2^\kappa}\rho(A)$$

を考えていたが，系 5.10 より，$T_{\pm y}$ が不要であると分かった．

参考文献

[1] L. Grafakos, Classical Fourier Analysis, Second Edition, Graduate Texts in Math., no 249, Springer, New York, 2008.

[2] L. I. Hedberg, On certain convolutiion inequalities, Proc. Amer. Math. Soc., **36**, No 2 (1972), 505–510.

[3] M. Izuki and Y. Sawano, The Haar wavelet characterization of weighted Herz spaces and greediness of the Haar wavelet basis, J. Math. Anal. Appl. **362** (2010), no. 1, 140–155.

[4] M. Lacey, Commutators with Riesz potentials in one and several parameters, Hokkaido Math. J. **36** (2007), no. 1, 175–191.

[5] M. Lacey, On Calderón's conjecture. Ann. of Math. (2) 149 (1999), no. 2, 475–496.

[6] M. Lacey, The bilinear maximal functions map into L^p for $2/3 < p \leq 1$. Ann. of Math. (2) 151 (2000), no. 1, 35–57.

[7] M. Lacey, Carleson's theorem: proof, complements, variations, Publ. Mat. **48** (2004), 251–307.

[8] M. Lacey and E. Terwilleger, Wiener-Wintner for Hilbert transfrom, Ark. Mat. 46 (2008), no. 2, 315–336.

[9] M. Lacey and C. Thiele, A proof of boundedness of the Carleson operator, Math. Res. Lett. **7** (2000), 361–370.

[10] M. Lacey and C. Thiele, On Calderón's conjecture for the bilinear Hilbert transform, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **95** (1998), no. 9, 4828–4830 (electronic).

[11] M. Pramanik and E. Terwilleger, A weak L^2 estimate for a maximal dyadic sum operator on R^n, Illinois J. Math, **47** (2003), no. 3, 775–813.

[12] Y. Sawano, Maximal operator for pseudodifferential operators with homogeneous symbols, Michigan Math. J. **59** (2010), no. 1, 119–142.

[13] Y. Sawano, Identification of the image of Morrey spaces by the fractional integral operators, Proc. A. Razmadze Math. Inst. 149 (2009), 87?93

[14] Y. Sawano, A note on the boundedness of discrete commutators on Morrey spaces and their preduals, in preparation.

[15] P. Wojtaszczyk, A Mathematical Introduction to Wavelets, Cambridge University Press, Cambridge (1997).