数理解析研究所講究録
第 1804 巻 2012 年 188-192

The asymptotic expansion of the maximum likelihood estimator for a truncated exponential family of distributions

筑波大・数理物質系　赤平　昌文 (Masafumi Akahira)
(Faculty of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba)
筑波大・数理物質系　大谷内奈穂 (Nao Ohyauchi)
(Faculty of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba)

1. はじめに

統計的推定論において必ずしも正則条件が成り立たないような非正則な場合に, 不偏推定量の最小分散性等の最適性についてはいろいろ論じられている (Akahira and Takeuchi[AT95]). また局外母数が存在する場合に, 関心のある母数の推定については, 適当な正則条件の下で高次漸近理論の観点から最尤推定量の漸近欠損性, 高次漸近有効性が逐次の場合も含めて論じられてきた (Akahira[A86], Akahira and Takeuchi[AT82]). しかし, 局外母数をもつ非正則分布族の関心のある母数の高次の漸近的推定は比較的未開拓の領域であった.

非正則分布族の1つの典型とも考えられる, 自然母数 θ と切断母数 γ をもつ切断指数型分布族において, γ が未知の場合に θ の最尤推定量, 最大条件付尤度推定量の強一致性や漸近正規性については Bar-Lev[B84] によって論じられている. 本稿では [B84] と同様の設定の下で, γ が既知および未知のそれぞれの場合に θ の最尤推定量の高次の漸近展開を求め, 1次の漸近的性質との関連も含めて論じる. なお, 切断指数型分布族は寿命試験 (life testing) において重要な役割を果たしている.

2. 設定

本稿での設定は [B84] と同様に次のようにする. まず, Lebesgue 測度に関する2母数を含む密度を

$$f(x;\theta,\gamma)=\begin{cases}\dfrac{a(x)e^{\theta u(x)}}{b(\theta,\gamma)} & (c<\gamma\le x<d),\\ 0 & (\text{その他})\end{cases} \tag{2.1}$$

とする ([B84]). ここで, $-\infty\le c<d\le\infty$ とし, $a(\cdot)$ はほとんど至るところで正値で連続とし, $u(\cdot)$ は区間 (γ,d) 上で絶対連続で $du(x)/dx\neq 0$ とする. ただし $\gamma\in(c,d)$ とする. 各 $\gamma\in(c,d)$ に対して

$$\Theta(\gamma):=\left\{\theta \;\middle|\; 0<b(\theta,\gamma)=\int_\gamma^d a(x)e^{\theta u(x)}dx<\infty\right\}$$

とすると, $\gamma_1<\gamma_2$ となる任意の γ_1, $\gamma_2\in(c,d)$ について $\Theta(\gamma_1)\subset\Theta(\gamma_2)$ になる. いま, 任意の $\gamma\in(c,d)$ について, $\Theta\equiv\Theta(\gamma)$ は $\mathbf{R}^1$ の空でない開集合と仮定し, (2.1) の密度 $f(x;\theta,\gamma)$ をもつ分布 $P_{\theta,\gamma}$ の族 $\mathcal{P}:=\{P_{\theta,\gamma}|\,\theta\in\Theta,\ \gamma\in(c,d)\}$ を自然母数 θ と切断母数 γ をもつ切断指数型

分布族 (truncated exponential family of distributions) という. ここで, $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ をたがいに独立にいずれも密度 (2.1) をもつ切断指数型分布族の分布に従う確率変数列とする. このとき, γ を局外母数として, θ の推定について考える. Bar-Lev[B84] は θ の最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML}$ とそれの比較対象として, 順序統計量 $X_{(1)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ について $X_{(1)} = x_{(1)}$ を与えたときの $(X_{(2)}, \cdots, X_{(n)})$ の条件付密度から作られる θ の条件付尤度関数を最大にする最大条件付尤度推定量 (maximum conditional likelihood estimator)$\hat{\theta}_{MCL}$ を取り扱った. そして, それらと γ が既知のときの θ の最尤推定量 $\hat{\theta}^{\gamma}_{ML}$ との漸近的比較も行った. 実際, $n \to \infty$ のとき $\hat{\theta}_{ML}$ と $\hat{\theta}_{MCL}$ は θ の強一致推定量であり, $\hat{\theta}^{\gamma}_{ML}$ と同じ極限分布をもつことを示した.

3. 最尤推定量の高次の漸近展開

まず, (i) 切断母数 γ が既知の場合を考えると, 密度 (2.1) は自然母数 θ をもつ正則な指数型分布族の密度になるので, $\log b(\theta, \gamma)$ は θ の狭義の凸関数で無限回微分可能な関数になる. また,

$$\lambda_k(\theta, \gamma) := \frac{\partial^k \log b(\theta, \gamma)}{\partial \theta^k} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

とおくと, これは X_1 の k 次のキュムラントになることが分かる. さらに, θ の尤度は, $\gamma \leq x_{(1)} := \min_{1 \leq i \leq n} x_i$, $x_{(n)} := \max_{1 \leq i \leq n} x_i < d$ となる $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ について

$$L(\theta; \boldsymbol{x}, \gamma) = \frac{1}{b^n(\theta, \gamma)} \left\{ \prod_{i=1}^{n} a(x_i) \right\} e^{\theta \sum_{i=1}^{n} u(x_i)} \tag{3.1}$$

となる. 従って, 尤度方程式は

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u(x_i) - \lambda_1(\theta, \gamma) = 0$$

となり, これを満たす解は一意的に存在し, それを $\hat{\theta}^{\gamma}_{ML}(\boldsymbol{x})$ で表わすと, $\hat{\theta}^{\gamma}_{ML} = \hat{\theta}^{\gamma}_{ML}(\boldsymbol{X})$ は θ の最尤推定量になる ([Barn78], [B84]). このとき Taylor 展開によって

$$\begin{aligned} 0 =& \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} u(X_i) - \lambda_1(\hat{\theta}^{\gamma}_{ML}, \gamma) \\ =& \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \{u(X_i) - \lambda_1(\theta, \gamma)\} - \frac{1}{\sqrt{n}} \lambda_2(\theta, \gamma) \sqrt{n} (\hat{\theta}^{\gamma}_{ML} - \theta) - \frac{1}{2n} \lambda_3(\theta, \gamma) n (\hat{\theta}^{\gamma}_{ML} - \theta)^2 \\ & - \frac{1}{6n\sqrt{n}} \lambda_4(\theta, \gamma) n\sqrt{n} (\hat{\theta}^{\gamma}_{ML} - \theta)^3 + O_p\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned} \tag{3.2}$$

になる. ここで

$$Z_1 := \frac{1}{\sqrt{\lambda_2(\theta, \gamma) n}} \sum_{i=1}^{n} \{u(X_i) - \lambda_1(\theta, \gamma)\},$$

$$U_\gamma := \sqrt{\lambda_2(\theta,\gamma)n}(\hat{\theta}^\gamma_{ML} - \theta)$$

とおくと, (3.2) より

$$0 = \sqrt{\frac{\lambda_2}{n}}Z_1 - \sqrt{\frac{\lambda_2}{n}}U_\gamma - \frac{\lambda_3}{2\lambda_2 n}U_\gamma^2 - \frac{\lambda_4}{6\lambda_2^{3/2}n\sqrt{n}}U_\gamma^3 + O_p\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

となるから

$$U_\gamma = Z_1 - \frac{\lambda_3}{2\lambda_2^{3/2}\sqrt{n}}Z_1^2 - \frac{\lambda_4}{6\lambda_2^2 n}Z_1^3 + O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \tag{3.3}$$

になる. ただし, $\lambda_i = \lambda_i(\theta,\gamma)$ $(i = 2,\ 3,\ 4)$ とする. このとき

$$E_\theta(Z_1) = 0, \qquad V_\theta(Z_1) = E_\theta(Z_1^2) = 1,$$
$$E_\theta(Z_1^3) = \frac{\lambda_3}{\lambda_2^{3/2}\sqrt{n}}, \qquad E_\theta(Z_1^4) = 3 + \frac{\lambda_4}{\lambda_2^2 n}$$

となるから

$$E_\theta(U_\gamma^2) = 1 - \left(\frac{\lambda_3^2}{4\lambda_2^3} + \frac{\lambda_4}{\lambda_2^2}\right)\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \tag{3.4}$$

になる. また

$$E_\theta(U_\gamma) = -\frac{\lambda_3}{\lambda_2^{3/2}\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

より, (3.4) から

$$V_\theta(U_\gamma) = 1 - \left(\frac{\lambda_3^2}{2\lambda_2^3} + \frac{\lambda_4}{\lambda_2^2}\right)\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

になる.

次に, (ii) 切断母数 γ が未知の場合を考えると, 2 母数 (θ,γ) の尤度関数は形式的に (3.1) と同様になり, そのとき (θ,γ) の最尤推定量 $(\hat{\theta}_{ML}, \hat{\gamma}_{ML})$ は $\hat{\gamma}_{ML} = X_{(1)} := \min_{1\le i\le n} X_i$ と

$$L(\hat{\theta}_{ML}, X_{(1)}) = \sup_{\theta\in\Theta} L(\theta, X_{(1)}) \tag{3.5}$$

を満たすものになる. 従って, γ が既知のときと同様にして, $\hat{\theta}_{ML}$ は尤度方程式

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n u(X_i) - \lambda_1(\hat{\theta}_{ML}, X_{(1)}) = 0 \tag{3.6}$$

を満たす. ここで, $\lambda_1(\hat{\theta}_{ML}, X_{(1)})$ を (θ,γ) の周りで Taylor 展開すると

$$\lambda_1(\hat{\theta}_{ML}, X_{(1)}) = \lambda_1(\theta,\gamma) + \left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\lambda_1(\theta,\gamma)\right\}(\hat{\theta}_{ML} - \theta) + \left\{\frac{\partial}{\partial\gamma}\lambda_1(\theta,\gamma)\right\}(X_{(1)} - \gamma)$$

$$+\frac{1}{2}(\hat{\theta}-\theta)^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\lambda_1(\theta,\gamma)+(\hat{\theta}-\theta)(X_{(1)}-\gamma)\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\gamma}\lambda_1(\theta,\gamma)$$
$$+\frac{1}{2}(X_{(1)}-\gamma)^2\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}\lambda_1(\theta,\gamma)+\cdots \tag{3.7}$$

となる. そこで

$$U:=\sqrt{\lambda_2(\theta,\gamma)n}(\hat{\theta}_{ML}-\theta), \qquad T:=n(X_{(1)}-\gamma)$$

とおくと, (3.7) より

$$\begin{aligned}U&=Z_1-\frac{(\partial\lambda_1/\partial\gamma)}{\sqrt{\lambda_2 n}}T-\frac{\lambda_3}{2\lambda_2\sqrt{\lambda_2 n}}\left\{Z_1^2-\frac{2(\partial\lambda_1/\partial\gamma)}{\sqrt{\lambda_2 n}}Z_1T\right\}-\frac{(\partial\lambda_2/\partial\gamma)}{\lambda_2 n}Z_1T+O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\\&=Z_1-\frac{(\partial\lambda_1/\partial\gamma)}{\sqrt{\lambda_2 n}}T-\frac{\lambda_3}{2\lambda_2^{3/2}\sqrt{n}}Z_1^2+\frac{\delta}{\lambda_2 n}Z_1T+O_p\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\end{aligned} \tag{3.8}$$

になる. ただし, $\lambda_i=\lambda_i(\theta,\gamma)$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ とし

$$\delta:=\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\cdot\frac{\partial\lambda_1}{\partial\gamma}-\frac{\partial\lambda_2}{\partial\gamma}$$

とする.

注意 3.1 切断母数 γ が既知, 未知のそれぞれの場合の最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma}$, $\hat{\theta}_{ML}$ の漸近展開 (3.3), (3.8) から 1 次 (定数) のオーダーは

$$U_\gamma=\sqrt{\lambda_2 n}(\hat{\theta}_{ML}^{\gamma}-\theta)=Z_1+O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$
$$U=\sqrt{\lambda_2 n}(\hat{\theta}_{ML}-\theta)=Z_1+O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

となり, また $\lambda_1(\theta,\gamma)=E_{\theta,\gamma}[u(X_1)]$ であることと中心極限定理より $n\to\infty$ のとき Z_1 は漸近的に $N(0,1)$ に従う. よって, $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma}$ と $\hat{\theta}_{ML}$ は $n\to\infty$ のとき同じ極限分布をもつことが分かる ([B84]).

注意 3.2 切断母数 γ が既知のときの最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma}$ の漸近展開 (3.3) は Z_1 の多項式で表わされるから, その高次のオーダーまでの漸近分布は正規分布, 自由度 1 のカイ 2 乗分布等に従う確率変数の線形和の分布として把えられる. また, 切断母数 γ が未知のときの最尤推定量 $\hat{\theta}_{ML}$ の漸近展開 (3.8) から, その高次のオーダーまでの漸近分布は正規分布, 指数分布, 自由度 1 のカイ 2 乗分布等に従う確率変数の線形和の分布になることが分かる. 従って, $\hat{\theta}_{ML}^{\gamma}$ と $\hat{\theta}_{ML}$ の漸近分布は 1 次 (定数) のオーダーでは正規分布であるが, 2 次 $(n^{-1/2})$, 3 次 (n^{-1}) のオーダーでは異なる分布となることが分かる.

4. おわりに

本稿では，非正則分布族の典型として切断指数型分布族を取り上げ，局外母数が既知または未知の場合に関心のある母数の最尤推定量の漸近展開を求めた．その結果，その漸近展開の第１項は正規分布に従う確率変数になるが，第２項以後は正規分布，自由度１のカイ２乗分布，指数分布等に従う確率変数の線形和として表わされることが分かった．このことから高次のオーダーまで考えることによって最尤推定量の漸近的構造が明らかになった．今後，高次のオーダーまで分散や集中確率等による推定量の精確な漸近的比較によって，さらなる進展が期待される．

参考文献

[A86] Akahira, M. (1986). *The Structure of Asymptotic Deficiency of Estimators.* Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics 75, Queen's University Press, Kingston, Canada.

[AT82] Akahira, M. and Takeuchi, K. (1982). On asymptotic deficiency of estimators in pooled samples in the presence of nuisance parameters. *Statistics and Decisions*, **1**(1), 17–38.

[AT95] Akahira, M. and Takeuchi, K. (1995). *Non-Regular Statistical Estimation.* Lecture Notes in Statistics 107, Springer, New York.

[B84] Bar-Lev, S. K. (1984). Large sample properties of the MLE and MCLE for the natural parameter for a truncated exponential family. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **36**, Part A, 217–222.

[Barn78] Barndorff-Nielsen, O. (1978). *Information and Exponential Families in Statistical Theory.* Wiley, New York.