数理解析研究所講究録
第 1811 巻 2012 年 1-12

頂点代数の twisted 加群について

北海道大学大学院理学研究院数学部門　田辺顕一朗 (Kenichiro Tanabe)
(Department of Mathematics, Hokkaido University)

1 頂点代数，twisted 加群と twisted 加群の拡張

頂点代数とはムーンシャイン予想の解決や 2 次元共形場理論の代数的定式化等を目的として 1986 年に Borcherds[1] によって導入された代数系である．G を頂点代数 V の有限位数の自己同型群としたとき，G によって固定される部分空間 $V^G=\{v\in V\mid gv=v,{}^{\forall}g\in G\}$ は V の部分頂点代数となる．V^G の表現を V と G の情報を用いて書き下すことが V^G の表現論における重要な問題である．V^G の研究は有限群の表現論および正則な頂点代数の新しい構成法と関連している．例えば，ムーンシャイン頂点作用素代数の構成では，Leech 格子から構成される格子頂点作用素代数の，位数 2 の自己同型による固定部分代数が用いられている [7].

V^G の表現論において，twisted V 加群は V の表現と V^G の表現をつなぐ重要な役割を持っている．しかし twisted V 加群には後で紹介するように表現論的に不便な点がある．本稿では，それが解消されるように加群の定義を拡張することをまず述べる．さらに，対応する Zhu 代数を構成することにより，拡張した既約加群の分類が Zhu 代数の既約左加群の分類に帰着することを述べる．

いくつか記号の準備をしてから頂点代数の定義を紹介する．今回述べる頂点代数の定義は専門家にはよく知られていると思うが，形式的級数に関する準備が面倒なので，あまり流通はしていないものである．しかし，後でみるように代数的に分かり易い定義であるとともに twisted 加群の拡張において基本的なものとなる．以下，$x,y,x_1,x_2,\ldots$ は可換な形式的変数とする．U を $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間として

$$\begin{aligned}
U[[x,x^{-1}]]&=\{\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_{(n)}x^n\mid a_{(n)}\in U\},\\
U((x))&=\{\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_{(n)}x^n\in U[[x,x^{-1}]]\mid a_{(n)}=0,n\ll 0\},\\
U[[x]]&=\{\sum_{n=0}^{\infty}a_{(n)}x^n\mid a_{(n)}\in U\},\\
U[[x,y]]&=\{\sum_{n,m\in\mathbb{Z}}a_{(n,m)}x^ny^m\mid a_{(n,m)}\in U\}
\end{aligned}$$

とおく．さらに T を正の整数として $U[[x^{1/T},x^{-1/T}]],U((x))((y))\,(=(U((x)))((y)))$ 等の記号を使う．一般に $U((x))((y))\neq U((y))((x))$ であることに注意する．例えば

$\sum_{i=0}^{\infty} x^{-1-i}y^i \in \mathbb{C}((x))((y))$ であるが，$\sum_{i=0}^{\infty} x^{-1-i}y^i \notin \mathbb{C}((y))((x))$ である．また

$$
\begin{aligned}
&U[[x,y]][x^{-1},y^{-1},(x-y)^{-1}]\\
&= (\text{積閉集合 } \{x^i, y^j, (x-y)^k \mid i,j,k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \text{ による } U[[x,y]] \text{ の局所化})\\
&= (x^{-1},y^{-1},(x-y)^{-1} \text{を変数とする } U[[x,y]] \text{ 係数の多項式空間})
\end{aligned}
$$

とおく．写像 $\iota_{x,y} : U[[x,y]][x^{-1},y^{-1},(x-y)^{-1}] \to U((x))((y))$ を

$$
x^iy^j(x-y)^k \overset{\iota_{x,y}}{\longmapsto} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{k}{m}(-1)^m x^{i+k-m}y^{j+m} \qquad (|x|>|y| \text{ と思って展開})
$$

から自然に誘導されるものとして定める．同様に写像

$$
\begin{array}{cccc}
\iota_{y,x} & U[[x,y]][x^{-1},y^{-1},(x-y)^{-1}] & \to & U((y))((x)) \\
 & x^iy^j(x-y)^k & \longmapsto & \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \binom{k}{m}(-1)^{k-m}y^{j+k-m}x^{i+m}, \\
 & & & (|y|>|x| \text{ と思って展開})
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
\iota_{y,x-y} & U[[x,y]][x^{-1},y^{-1},(x-y)^{-1}] & \to & U((y))((x-y)) \\
 & x^iy^j(x-y)^k & \longmapsto & \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \binom{i}{m}y^{j+i-m}(x-y)^{k+m} \\
\end{array}
$$
$$
(x=y+(x-y) \text{ として } |y|>|x-y| \text{ と思って展開})
$$

を定める．まとめて書くと

$$
\begin{tikzcd}
 & \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \binom{k}{m}(-1)^{k-m}y^{j+k-m}x^{i+m} \in \mathbb{C}((y))((x)) \\
x^iy^j(x-y)^k \arrow[ur, "\iota_{y,x}", "|y|>|x|"'] \arrow[r, "\iota_{x,y}", "|x|>|y|"'] \arrow[dr, "\iota_{y,x-y}", "|y|>|x-y|"'] & \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \binom{k}{m}(-1)^{m}x^{i+k-m}y^{j+m} \in \mathbb{C}((x))((y)) \\
 & \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \binom{i}{m}y^{j+i-m}(x-y)^{k+m} \in \mathbb{C}((y))((x-y))
\end{tikzcd}
\tag{1.1}
$$

となる．一つの対象 $x^iy^j(x-y)^k$ を，$\iota_{x,y}, \iota_{y,x}, \iota_{y,x-y}$ で展開することにより，異なる空間に属する元を得ていることに注意する．この点を踏まえると，次の頂点代数の定義が理解しやすくなる．

定義 1.1. 次の条件を全て満たす三つ組み $(V, Y, \mathbf{1})$ を頂点代数という．

(1) V は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間．

(2) $Y(-,x) : V \to (\mathrm{End}_{\mathbb{C}} V)[[x,x^{-1}]]$ は $\mathbb{C}$ 線型写像．$a \in V$ に対して $Y(a,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^{-n-1}, a_n \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V$ と展開を書く．

(3) $a, b \in V$ に対して $Y(a,x)b \in V(\!(x)\!)$.

(4) $\mathbf{1} \in V$ で $Y(\mathbf{1},x) = \mathrm{id}_V$.

(5) $a \in V$ に対して $Y(a,x)\mathbf{1} \in V[[x]]$ で $a_{-1}\mathbf{1} = a$.

(6) $a, b, c \in V$ に対して $F(a,b,c|x,y) \in V[[x,y]][x^{-1},y^{-1},(x-y)^{-1}]$ が存在して

$$\begin{aligned} \iota_{x,y}F(a,b,c|x,y) &= Y(a,x)Y(b,y)c \in V(\!(x)\!)(\!(y)\!), \\ \iota_{y,x}F(a,b,c|x,y) &= Y(b,y)Y(a,x)c \in V(\!(y)\!)(\!(x)\!), \quad \text{かつ} \\ \iota_{y,x-y}F(a,b,c|x,y) &= Y(Y(a,x-y)b,y)c \in V(\!(y)\!)(\!(x-y)\!). \end{aligned} \tag{1.2}$$

$Y(a,x)b$ が二つの元の積で，$\mathbf{1}$ が単位元のようなものである．(1.2) に現れる $Y(a,x)Y(b,y)c$ に関して念のため注意しておくと，定義より $Y(b,y)c \in V(\!(y)\!)$ であり，さらにこれに $Y(a,x)$ を掛けたので $Y(a,x)Y(b,y)c \in V(\!(x)\!)(\!(y)\!)$ となっている．$Y(b,y)Y(a,x)c, Y(Y(a,x-y)b,y)c$ に関しても同様である．また $\iota_{x,y}$ は単射であるから，F は a,b,c から一意的に決まる．

条件 (1.2) において $Y(a,x)Y(b,y)c$，$Y(b,y)Y(a,x)c$ と $Y(Y(a,x-y)b,y)c$ はそれぞれ異なる空間に属している．条件 (1.2) は，それらが一つの元 $F(a,b,c|x,y)$ の異なる展開で与えられることをいっている．したがって次の意味で，通常の環における可換性と結合律の類似が成立している：

$$\begin{tikzcd} & Y(b,y)Y(a,x)c \arrow[d, Leftrightarrow, "\text{(可換性)}"] & \in V(\!(y)\!)(\!(x)\!) \\ F(a,b,c|x,y) \arrow[ur, "\iota_{y,x}", "|y|>|x|"'] \arrow[r, "\iota_{x,y}", "|x|>|y|"'] \arrow[dr, "\iota_{y,x-y}", "|y|>|x-y|"'] & Y(a,x)Y(b,y)c \arrow[d, Leftrightarrow, "\text{(結合律)}"] & \in V(\!(x)\!)(\!(y)\!) \\ & Y(Y(a,x-y)b,y)c & \in V(\!(y)\!)(\!(x-y)\!). \end{tikzcd} \tag{1.3}$$

(1.2) における変数 $x, y, x-y$ の見た目を対称にしたい場合は，$x = x_1 - x_3, y = x_2 - x_3$ とおけばよい．$x - y = x_1 - x_2$ となるので，

$$\begin{aligned} &F(a,b,c|x_1-x_3,x_2-x_3) \\ &\in V[[x_1-x_3,x_2-x_3]][(x_1-x_3)^{-1},(x_2-x_3)^{-1},(x_1-x_3)^{-1}] \end{aligned}$$

で

$$\begin{tikzcd} & Y(b,x_2-x_3)Y(a,x_1-x_3)c \\ & \in V((x_2-x_3))((x_1-x_3)) \\ F(a,b,c|x_1-x_3,x_2-x_3) \arrow[ruu, "|x_2-x_3|>|x_1-x_3|"] \arrow[r, "|x_1-x_3|>|x_2-x_3|"'] \arrow[rdd, "|x_2-x_3|>|x_1-x_2|"] & Y(a,x_1-x_3)Y(b,x_2-x_3)c \\ & \in V((x_1-x_3))((x_2-x_3)) \\ & Y(Y(a,x_1-x_2)b,x_2-x_3)c \\ & \in V((x_2-x_3))((x_1-x_2)). \end{tikzcd} \tag{1.4}$$

となる．多くの元の積を扱う場合にはこうした方が便利である．元に戻したい場合は $x_3=0$ とおけばよい．

条件 (1.2) は，展開係数 a_n 達で書かれた次の恒等式で置き換えることが出来る (cf. [8, Sections 3.2–3.4] か [10, Lemma 2.4])．この恒等式は Borcherds 恒等式，または Jacobi 恒等式と呼ばれている:

(Borcherds 恒等式) $a,b,c\in V$ と $l,m,n\in\mathbb{Z}$ に対して，

$$\sum_{i=0}^{\infty}\binom{m}{i}(a_{l+i}b)_{m+n-i}c=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{l}{i}(-1)^i(a_{l+m-i}b_{n+i}+(-1)^{l+1}b_{l+n-i}a_{m+i})c. \tag{1.5}$$

頂点代数の定義は，多くの場合 Borcherds 恒等式を用いたものか，局所可換性 (下の (1.6) を参照) と導分を用いたものかで与えられている (cf. [8, Chapter 3])．局所可換性と導分については今回はあまり扱わないので，これ以上は述べない．Borcherds[1] では Borcherds 恒等式を二つに分けた本質的に同じ式を用いて頂点代数の定義が述べられている．条件 (1.2) と条件 (1.5) が同値な条件だとすぐに分かる人はおそらくいないであろう．(1.3) を見ていると，頂点代数は確かに「代数」だと思えて安心できるので (1.2) は (1.5) よりは受け入れやすい．また，後でみるように twisted 加群を拡張するためには (1.2) を用いた定義の方が都合がよい．ただし，実際の計算では恒等式である (1.5) をよく使う．ここでさらに (1.2) から導かれる頂点代数の代数らしさをみてみよう．正確に述べると大変になるので大雑把に述べる．証明は省略する．

命題 1.2. n は正の整数で $a^1,a^2,\ldots,a^n\in V$ とする．

(1) $V[[x_1-x_n,\ldots,x_{n-1}-x_n]][(x_i-x_j)^{-1}\mid 1\le i<j\le n]$ ((1.4) の表記法を使う) の元 F が存在して，列 $a^1a^2\cdots a^n$ にどのように括弧を付けて "積" を考えても，それは F を適当に展開したものになっている．

(2) 任意の $\sigma\in S_n$(n 次対称群) に対して "積"$a^{\sigma(1)}a^{\sigma(2)}\ldots a^{\sigma(n)}$ は (1) の F を適当に展開したものになっている．

(3) $1 \le i < j \le n$ なる各 i, j に対して

$$(x-y)^{m_{ij}} Y(a_i, x) Y(a_j, y) = (x-y)^{m_{ij}} Y(a_j, y) Y(a_i, x) \tag{1.6}$$

となる $m_{ij} \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ を一つずつ定める (このような m_{ij} の存在は定義から保証される) と, (1) の F に対して $F \in \prod_{i<j}(x_i - x_j)^{-m_{ij}} V[[x_1 - x_n, \dots, x_{n-1} - x_n]]$ となる.

上記の "積" を $n = 4$ の場合にもう少しきちんと述べてみる. 命題 1.2 (1) ではこの場合 5 通りの括弧の付け方

$$((a^1a^2)a^3)a^4, (a^1(a^2a^3))a^4, a^1((a^2a^3)a^4), a^1(a^2(a^3a^4)), (a^1a^2)(a^3a^4)$$

が考えられるが, これらをきちんと書くと, 次のようになる:

$$\begin{gathered}
Y(Y(Y(a^1, x_1 - x_2)a^2, x_2 - x_3)a^3, x_3 - x_4)a^4 \\
Y(Y(a^1, x_1 - x_3)Y(a^2, x_2 - x_3)a^3, x_3 - x_4)a^4 \\
Y(a^1, x_1 - x_4)Y(Y(a^2, x_2 - x_3)a^3, x_3 - x_4)a^4 \\
Y(a^1, x_1 - x_4)Y(a^2, x_2 - x_4)Y(a^3, x_3 - x_4)a^4 \\
Y(Y(a^1, x_1 - x_2)a^2, x_2 - x_4)Y(a^3, x_3 - x_4)a^4
\end{gathered}$$

(1) は, これらが $V[[x_1 - x_4, x_2 - x_4, x_3 - x_4]][(x_i - x_j)^{-1} \mid 1 \le i < j \le 4]$ のある元 F の適当な展開で全て与えられることを主張している. 例えば最初の元は $|x_3 - x_4| > |x_2 - x_3| > |x_1 - x_2|$ と思って展開した $\iota_{x_3 - x_4, x_2 - x_3, x_1 - x_2} F$ に一致する. 命題 1.2 (2) は, 任意の $\sigma \in S_4$(4 次対称群) に対して, 上記の 5 つの積において $(a^i, x_i) \mapsto (a^{\sigma(i)}, x_{\sigma(i)})$ と記号を置き換えたものは, 再び F の適当な展開になっていることを主張している. 例えば $Y(a^{\sigma(1)}, x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(2)})Y(a^{\sigma(2)}, x_{\sigma(2)} - x_{\sigma(3)})Y(a^{\sigma(3)}, x_{\sigma(3)} - x_{\sigma(4)})a^{\sigma(4)}$ は F を $|x_{\sigma(1)} - x_{\sigma(2)}| > |x_{\sigma(2)} - x_{\sigma(3)}| > |x_{\sigma(3)} - x_{\sigma(4)}|$ と思って展開したものになっている.

頂点代数にさらに条件を課したものを頂点作用素代数というが, ここではあまり頂点作用素代数は出てこないので定義は省略する (cf. [8]). 以降, V は頂点代数を表すことにする. 次に twisted V 加群の定義を紹介する. $g \in GL(V)$ で $g(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ かつ任意の $a, b \in V, n \in \mathbb{Z}$ に対して $g(a_n b) = (ga)_n (gb)$ となるものを V の自己同型という.

定義 1.3. (cf. [6, p.92]) g を V の有限位数の自己同型とし, $|g| = t$ とおく. $V^{(g,r)} = \{v \in V \mid gv = e^{-2\pi\sqrt{-1}r/t} v\}$ $(r = 0, 1, \dots, t-1)$ とおく. 次の条件を全て満たす組 (M, Y_M) を g-twisted V 加群という.

(1) M は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間.

(2) $Y_M(-, x) : V \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}} M)[[x^{1/t}, x^{-1/t}]]$ は $\mathbb{C}$ 線型写像. さらに, $a \in V^{(g,r)}$ に対して

$$Y_M(a, x) = \sum_{n \in r/t + \mathbb{Z}} a_n x^{-n-1}, \ a_n \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}} M \tag{1.7}$$

と展開される.

(3) $a \in V, w \in M$ に対して $Y_M(a,x)w \in M(\!(x^{1/t})\!)$.

(4) $Y_M(\mathbf{1},x) = \mathrm{id}_M$.

(5) $a, b \in V, w \in M$ に対して $F(a,b,w|x,y) \in M[[x^{1/t}, y^{1/t}]][x^{-1/t}, y^{-1/t}, (x-y)^{-1}]$ が存在して

$$\begin{aligned}
\iota_{x,y}F(a,b,w|x,y) &= Y(a,x)Y(b,y)w \in M(\!(x^{1/t})\!)(\!(y^{1/t})\!),\\
\iota_{y,x}F(a,b,w|x,y) &= Y(b,y)Y(a,x)w \in M(\!(y^{1/t})\!)(\!(x^{1/t})\!), \quad \text{かつ}\\
\iota_{y,x-y}F(a,b,w|x,y) &= Y(Y(a,x-y)b,y)w \in M(\!(y^{1/t})\!)(\!(x-y)\!). \qquad (1.8)
\end{aligned}$$

$g = \mathrm{id}_V$ とおいたときの id_V-twisted V 加群が通常の V 加群である．twisted 加群に対しても補題 1.2 の類似が成立している．条件 (1.8) は，やはり次の Borcherds 恒等式に置き換えることが出来て，そちらが頂点代数における twisted 加群の元々の定義である [5]:

(twisted 加群の Borcherds 恒等式)
$a \in V^{(g,r)}, b \in V, w \in M, l \in \mathbb{Z}, m \in r/t + \mathbb{Z}, n \in (1/t)\mathbb{Z}$ に対して，

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{m}{i} (a_{l+i}b)_{m+n-i}u = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{l}{i} (-1)^i (a_{l+m-i}b_{n+i} + (-1)^{l+1} b_{l+n-i}a_{m+i})u. \quad (1.9)$$

頂点代数の表現論において twisted 加群を考える理由を説明しよう．V の有限位数の自己同型群 G に対して部分頂点代数 $V^G = \{v \in V \mid gv = v, \ ^\forall g \in G\}$ を考える．$g \in G$ に対して g-twisted V 加群は V^G 加群になっていることが定義より分かる．V が良い性質を持つ場合は，V^G 加群は twisted V 加群の部分加群を考えることにより全て得られることが予想されている [2]．しかし twisted V 加群には表現論の観点から次のような不便さがある．

Remark 1.4. (twisted 加群の不便さ)

(1) g, h を V の有限位数の自己同型群 G の二つの異なる元とし，M を g-twisted V 加群，N を h-twisted V 加群とする．このとき，直和 $(M \oplus N, Y_{M\oplus N} = Y_M + Y_N)$ は V^G 加群であるが，一般に (twisted) V 加群ではない．これは，V の二つの固有空間分解 $V = \oplus_{r=0}^{|g|-1} V^{(g,r)} = \oplus_{s=0}^{|h|-1} V^{(h,s)}$ と $Y_{M\oplus N} = Y_M + Y_N$ の展開 (1.7) との整合性を考えればすぐに分かる．

(2) V を単純な頂点作用素代数で 3 次対称群 S_3 を自己同型にもつとする (そのような例としては単純な頂点作用素代数 U の 3 つのテンソル積 $U^{\otimes 3}$ がある)．$\tau \in S_3$ を位数 2 の元，$\sigma \in S_3$ を位数 3 の元として σ-twisted 既約 V 加群 M を考える．$V^{\langle \tau \rangle}$ は V の部分頂点代数であるにもかかわらず，M は (twisted) $V^{\langle \tau \rangle}$ 加群ではない．これは σ が $V^{\langle \tau \rangle}$ の自己同型でないことから導かれる．

(1) に関してであるが，もちろん固定された自己同型 g に対しては二つの g-twisted V 加群の直和はまた g-twisted V 加群になっている．これまでのほとんどの研究はそのように個別の自己同型に対する twisted 加群が扱われてきたため，(1) の不便さはあまり気にされてこなかったと思われる．ただし，[9] では (1) の状況を扱う必要があり非常に苦労した．このときは，拡張した Zhu 代数 $A_G(V)$ を構成することによりこの問題を克服した．

問題点の解消を目的として次のように twisted V 加群を拡張する．これは twisted 加群の定義 1.3 から自己同型の情報を除こうと思えば自然に得ることが出来るものの一つである．

定義 1.5. [10, Definition 2.1] T を正の整数とする．次の条件を全て満たす組 (M, Y_M) を (V, T) 加群という:

(1) M は $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間.

(2) $Y_M(-, x) : V \to (\mathrm{End}\, M)[[x^{1/T}, x^{-1/T}]]$ は $\mathbb{C}$ 線型写像.

(3) $a \in V, w \in M$ に対して $Y_M(a, x)w \in M((x^{1/T}))$.

(4) $Y_M(\mathbf{1}, x) = \mathrm{id}_M$.

(5) $a, b \in V, w \in M$ に対して，$F(a, b, w|x, y) \in M[[x^{1/T}, y^{1/T}]][x^{-1/T}, y^{-1/T}, (x-y)^{-1}]$ が存在して

$$\begin{aligned} \iota_{x,y} F(a, b, w|x, y) &= Y_M(a, x) Y_M(b, y) w, \\ \iota_{y,x} F(a, b, w|x, y) &= Y_M(b, y) Y_M(a, x) w, \\ \iota_{y,x-y} F(a, b, w|x, y) &= Y_M(Y(a, x-y)b, y) w \end{aligned} \tag{1.10}$$

となる．

定義 1.3 から自己同型の箇所を除き，$Y_M(a, x)$ の展開 (1.7) において g の固有空間からくる添え字の制限を取り除いたものが定義 1.5 である．(V, T) 加群に対しても補題 1.2 の類似が成り立つ．(V, T) 加群に関して簡単に分かる性質を挙げる:

補題 1.6. (1) $(V, 1)$ 加群の定義は V 加群の定義に一致する．

(2) 有限位数の自己同型 $g \in \mathrm{Aut}\, V$ に対して g-twisted V 加群は $(V, |g|)$ 加群である．

(3) V の部分頂点代数 U に対して，(V, T) 加群は (U, T) 加群となる．

(4) T' を T の正の倍数とすると，(V, T) 加群は自然に (V, T') 加群となる．特に二つの正の整数 T_1, T_2 に対して，T_3 をその正の公倍数とすると，(V, T_1) 加群と (V, T_2) 加群の直和は (V, T_3) 加群となる．

Remark 1.4 (2) の M は既約 $(V^{\langle\tau\rangle}, 3)$ 加群になっており，twisted 加群達の直和になっていない (V, T) 加群の例を与えている．

定義 1.5 は定義 1.3 の自明な拡張であるが，Borcherds 恒等式 (1.9) を用いた元々の twisted 加群の定義から定義 1.5 に辿り着くことは無理だと思う．以下でみるように，(V, T) 加群において条件 (1.10) に対応する Borcherds 恒等式が非常に複雑だからである．(V, T) 加群は twisted 加群に似ているように思えるが，このことからそうではないことが分かる:

補題 1.7. ((V, T) 加群の Borcherds 恒等式) 定義 1.5 において条件 (1.10) は次の条件に置き換えることが出来る:

(条件) $a, b \in V$ とする．このとき，T 個の線型写像

$$Y_M^{(s)}(a, b|x, y) = \sum_{j \in (1/T)\mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}} Y_M^{(s)}(a, b; j, l) x^{-j-1} y^{-l-1} : M \to M(\!(x^{1/T})\!)(\!(y)\!),$$
$$Y_M^{(s)}(a, b; j, l) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}} M, \quad s = 0, \ldots, T-1$$

が存在して，$j, k \in (1/T)\mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}$ と $w \in M$ に対して

$$\sum_{s=0}^{T-1} Y_M^{(s)}(a, b|x, y) = Y_M(Y(a, x)b, y) \tag{1.11}$$
$$\Bigl(\sum_{s=0}^{T-1} Y_M^{(s)}(a, b; j, l) = (a_l b)_j\Bigr)$$

と

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{j}{i} Y_M^{(s)}(a, b; j+k-i, l+i)(w)$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{l}{i} (-1)^i (a_{l+j-i} b_{k+i} + (-1)^{l+1} b_{l+k-i} a_{j+i}) w. \tag{1.12}$$

が成り立つ．

twisted 加群の Borcherds 恒等式 (1.9) の左辺は V の元 $a_i b$ を用いて書けているが，(1.12) の左辺にはよく分からない線型写像 $Y_M^{(s)}(a, b; j, l)$ が現れている．g-twisted 加群 M の場合には，$Y_M^{(s)}(a, b; j, l)$ は

$$Y_M^{(s)}(a, b; j, l) = (a_l^{(g,s)} b)_j$$

となっている．もちろん一般にはこのような簡明な表示は持たないと思う．

定義の自然さから既に (V, T) 加群を考えついていた人はいたと思われるが，Borcherds 恒等式 (1.12) が複雑であるため，その性質を調べることは難しかったと思われる．しかし，頂点 (作用素) 代数の表現論で基本的な Zhu 代数の類似は構成できたので，それを次の節で報告する．

2　次数付き加群と Zhu 代数

以下，頂点代数 V は次の条件を満たす次数付け $V=\oplus_{n\in\mathbb{Z}}V_n$ を持つと仮定する．$a\in V_n$ のとき a を斉次元といい，n を $\mathrm{wt}\,a$ と書く:

- $\mathbf{1}\in V_0$.
- $\Delta\in\mathbb{Z}$ が存在して $n<\Delta\Rightarrow V_n=0$.
- 斉次元 $a\in V$ と $i,j\in\mathbb{Z}$ に対して $a_iV_j\subset V_{\mathrm{wt}\,a-i-1+j}$.

V が頂点作用素代数ならば上記の仮定は全て満たされる．以下，正の整数 T を一つ固定する．$(1/T)\mathbb{N}$ 次数付き (V,T) 加群の定義を紹介する．

定義 2.1. (V,T) 加群 M は，次の条件を満たす次数付け $M=\oplus_{n\in(1/T)\mathbb{N}}M(n)$ を持つとき，$(1/T)\mathbb{N}$ 次数付きであるという: 斉次元 $a\in V$ と $i,j\in(1/T)\mathbb{Z}$ に対して

$$a_iM(j)\subset M(\mathrm{wt}\,a-i-1+j). \tag{2.1}$$

ここで $M(j)=0,j<0$ とおいている．

$(1/T)\mathbb{N}$ 次数付 (V,T) 加群 $M=\oplus_{n\in(1/T)\mathbb{N}}M(n)$ に対して，$a_{\mathrm{wt}\,a-1}\in\mathrm{End}\,M$ は $a_{\mathrm{wt}\,a-1}M(j)\subset M(j)$ と各斉次空間を不変にする．$o^M(a)=a_{\mathrm{wt}\,a-1}$ と書く．

ここで Zhu の結果 [11] を思いだそう．斉次元 $a\in V$ と $b\in V$ に対して二つの積

$$a*b=\mathrm{Res}_x Y(a,x)bx^{-1}(1+x)^{\mathrm{wt}\,a},$$
$$a\circ b=\mathrm{Res}_x Y(a,x)bx^{-2}(1+x)^{\mathrm{wt}\,a}$$

を定め，$O(V)=\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{a\circ b\mid 斉次元\ a\in V,b\in V\}$ とおく．ここで $f(x)=\sum_{i\in(1/T)\mathbb{Z}}f_{(i)}z^i$ に対して $\mathrm{Res}_x f(x)=f_{(-1)}$ と定めている．$V*O(V)\subset O(V)$，$O(V)*V\subset O(V)$ と $(a*b)*c-a*(b*c)\in O(V)$ $(a,b,c\in V)$ が成り立ち，剰余空間 $A(V)=V/O(V)$ は積 $*$ に関して単位元 $\mathbf{1}+O(V)$ を持つ $\mathbb{C}$ 多元環となる．$A(V)$ を Zhu 代数という．

しばらく，$T=1$ として通常の $\mathbb{N}$ 次数付 V 加群 $(=(V,1)$ 加群$)M=\oplus_{n\in\mathbb{N}}M(n)$ を考える．この場合，(1.9) で $g=\mathrm{id}_V$，あるいは (1.12) で $(a_lb)_j=Y_M^{(0)}(a,b;j,l)$ としたときの Borcherds 恒等式が成り立つ．(1.9) または (1.12) を用いると斉次元 $a,b\in V$ に対して

$$\begin{aligned}&o^M(\mathrm{Res}_x Y(a,x)bx^j(1+x)^i)\\&=\mathrm{Res}_{x_1}\mathrm{Res}_{x_2}Y(a,x_1)Y(b,x_2)(x_1-x_2)^jx_1^ix_2^{\mathrm{wt}\,a+\mathrm{wt}\,b-i-j-2}\\&\quad-\mathrm{Res}_{x_1}\mathrm{Res}_{x_2}Y(b,x_2)Y(a,x_1)(-x_2+x_1)^jx_1^ix_2^{\mathrm{wt}\,a+\mathrm{wt}\,b-i-j-2}\end{aligned}\tag{2.2}$$

を得る．これと (2.1) を用いると，

$$
\begin{aligned}
&o^M(a*b)|_{M(0)} = o^M(a)|_{M(0)}o^M(b)|_{M(0)},\\
&o^M(a\circ b)|_{M(0)} = 0
\end{aligned}
$$

を得るので，$M(0)$ は左 $A(V)$ 加群であることが分かる．以上の準備をして，Zhu は次のことを示した．

定理 2.2. [11, Theorem 2.2.1] 既約 $\mathbb{N}$ 次数付 V 加群 $M=\oplus_{n\in\mathbb{N}}M(n), M(0)\neq 0$ に対して $M(0)$ は既約左 $A(V)$ 加群となる．逆に既約左 $A(V)$ 加群 N に対して既約 $\mathbb{N}$ 次数付 V 加群 $M=\oplus_{n\in\mathbb{N}}M(n)$ で左 $A(V)$ 加群として $M(0)\cong N$ となるものが同型を除いて一意的に存在する．

これまでの具体的な頂点作用素代数の既約加群の分類の研究のほとんどは，定理 2.2 を用いて，つまり Zhu 代数の既約加群を求めることによって行われている．$g\in \mathrm{Aut}\, V, |g|=t<\infty$ としたとき，g-twisted 加群に対しても Zhu 代数 $A_g(V)$ を定めることが出来，$(1/t)\mathbb{N}$ 次数付 V 加群に対して同様の結果が成り立つことが分かっている [5].

以降，T は一般の正の整数とする．この場合に Zhu 代数 $A^T(V)$ 存在し，$(1/T)\mathbb{N}$ 次数付 (V,T) 加群に対して同様の結果が成り立つことを期待するのは自然であるが，(1.12) の左辺に現れているものは線型写像 $Y_M^{(s)}(a,b;j,l)$ であるため，一見すると (2.2) と同様の議論は出来そうにない．実はなんとか同様の議論が可能であることを以下でみていく．手法の一部は [3, 4, 9] のものを用いる．まず V 上ではなく，$\mathbb{C}[z,z^{-1}]$ 上である部分空間 $O^{T,1}(\alpha,\beta;z)$ を準備をする必要がある．$s=0,\dots,T-1$ と $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ に対して，$O^{(T;s),1}(\alpha,\beta;z)$ を

$$
\mathrm{Res}_x\left((1+x)^{\alpha-1+\delta(s\le 0)+s/T}x^{-\delta(s\le 0)-1+j}\sum_{i\in\mathbb{Z}_{\le\alpha+\beta-1-\Delta}} z^i x^{-i-1}\right), j=0,-1,\dots \tag{2.3}
$$

と $z^i, i\in\mathbb{Z}_{\ge\alpha+\beta-\Delta}$ で張られる $\mathbb{C}[z,z^{-1}]$ の部分空間とする．ここで

$$
\delta(i\le j)=\begin{cases}1 & \text{if } i\le j,\\ 0 & \text{if } i>j.\end{cases} \tag{2.4}
$$

である．さらに $O^{T,1}(\alpha,\beta;z)=\cap_{s=0}^{T-1}O^{(T;s),1}(\alpha,\beta;z)$ とおく．

$M=\oplus_{n\in(1/T)\mathbb{N}}M(n)$ を $(1/T)\mathbb{N}$ 次数付き (V,T) 加群とする．$a,b\in V$ を斉次元とする．$P(z)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\lambda_i z^i\in O^{(T;s),1}(\mathrm{wt}\, a,\mathrm{wt}\, b;z)$ に対して

$$
\sum_{i\in\mathbb{Z}}\lambda_i Y_M^{(s)}(a,b;\mathrm{wt}\, a+\mathrm{wt}\, b-2-i,i)|_{M(0)}=0
$$

となることが (1.12) を用いて (2.2) と同様の議論で分かる．したがって $P(z) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i z^i \in O^{T,1}(\mathrm{wt}\, a, \mathrm{wt}\, b; z)$ に対して (1.11) を用いることによって

$$\begin{aligned} & o^M(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i a_i b)|_{M(0)} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i o^M(a_i b)|_{M(0)} \\ &= \sum_{s=0}^{T-1} \sum_{i\in\mathbb{Z}} \lambda_i Y_M^{(s)}(a, b; \mathrm{wt}\, a + \mathrm{wt}\, b - 2 - i, i)|_{M(0)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となることが分かる．つまり $O^{T,1}(V)$ を

$$\left\{ P(z)|_{z^j = a_j b} \in V \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{斉次元}\, a, b \in V \\ P(z) \in O^{T,1}(\mathrm{wt}\, a, \mathrm{wt}\, b; z) \end{array} \right\}. \tag{2.5}$$

で張られる V の部分空間とすると，$o^M(O^{T,1}(V))|_{M(0)} = 0$ となる．さらに $O^{T,0}(V)$ を

$$\{a_{-2}\mathbf{1} + (\mathrm{wt}\, a)a \in V \mid \text{斉次元}\, a \in V\}$$

で張られる V の部分空間とすると，やはり $o^M(O^{T,1}(V))|_{M(0)} = 0$ となることが分かる．Zhu 代数を定義するためには積 $*^T$ を定める必要があるが，さらに準備が必要なので省略する．$O^T(V)$ を，$O^{T,0}(V) + O^{T,1}(V)$ からその積で生成される V の部分空間とし，$A^T(V) = V/O^T(V)$ とおいたものが目標の Zhu 代数である．定理 2.2 の類似が成り立つ:

定理 2.3. [10, Corollary 5.14] 既約 $(1/T)\mathbb{N}$ 次数付 (V, T) 加群 $M = \oplus_{n\in\mathbb{N}} M(n), M(0) \neq 0$ に対して $M(0)$ は既約左 $A^T(V)$ 加群となる．逆に既約左 $A^T(V)$ 加群 N に対して既約 $(1/T)\mathbb{N}$ 次数付 (V, T) 加群 $M = \oplus_{n\in(1/T)\mathbb{N}} M(n)$ で左 $A^T(V)$ 加群として $M(0) \cong N$ となるものが同型を除いて一意的に存在する．

$T = 1$ とおくと，$A^1(V) = A(V)$ となる．また $A_g(V)$ は $A^{|g|}(V)$ の剰余環になっている．

参考文献

[1] R. Borcherds, Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **83** (1986), 3068–3071.

[2] R. Dijkgraaf, C. Vafa, E. Verlinde, and H. Verlinde, The operator algebra of orbifold models, *Comm. Math. Phys.* **123** (1989), 485–526.

[3] C. Dong and C. Jiang, Bimodules associated to vertex operator algebras, *Math. Z.* **259** (2008), 799–826.

[4] C. Dong and C. Jiang, Bimodules and g-rationality of vertex operator algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **360** (2008), 4235–4262.

[5] C. Dong, H.S. Li, and G. Mason, Twisted representations of vertex operator algebras, *Math. Ann.* **310** (1998), 571–600.

[6] E. Frenkel and D. Ben-Zvi, *Vertex algebras and algebraic curves*, 2nd edn. Mathematical Surveys and Monographs, Vol. **88**, American Mathematical Society, Providence, 2004.

[7] I. B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, *Vertex Operator Algebras and the Monster*, Pure and Applied Math., Vol. **134**, Academic Press, 1988.

[8] J. Lepowsky and H.S. Li, *Introduction to Vertex Operator Algebras and their Representations*, Progress in Mathematics, **227**, Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 2004.

[9] M. Miyamoto and K. Tanabe, Uniform product of $A_{g,n}(V)$ for an orbifold model V and G-twisted Zhu algebra. *J. Algebra* **274** (2004), 80–96.

[10] K. Tanabe, A generalization of twisted modules over vertex algebras, arXiv:1203.4024

[11] Y. Zhu, Modular invariance of characters of vertex operator algebras, *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), 237–302.