

Rudvalis 群に対する複素格子について

千葉大学・理学研究科 北詰 正顕 (Masaaki Kitazume)
Graduate school of Sciences,
Chiba University

※本研究は、千吉良直紀氏（熊本大・自然科学）との共同研究である。

1 はじめに

ここ数年 Rudvalis 群 Ru について研究を進め、いくつかの結果を得ていた。その結果については、その一端を研究集会で発表もしている。内容を簡単に書いておく。

- (1) Ru の 4060 次の置換表現によって不変な、長さ 4060 の自己双対符号がちょうど 3 つ存在する。(北詰, 「散在型単純群の周辺」, 第 53 回代数学シンポジウム (盛岡市), 2008 年 8 月)
- (2) 28 点上の 5 つの 2-design が存在して、点とブロックを用いて、 Ru が作用する 4060 点からなる rank 3 graph の再構成ができる。(千吉良, 「Rudvalis 群と符号」, 第 28 回代数的組合せ論シンポジウム (大分大学), 2011 年 6 月)

どちらの結果も、研究対象は Ru の 4060 次の置換表現である。この置換表現は rank 3 (1 点の固定部分群の orbit の個数が 3) であり、そこから作った rank 3 グラフは、パラメータ (4060, 1755, 730, 780) の strongly regular graph になる。すなわち、1 点の隣接点の個数が 1755 個で、2 点に共通する隣接点の個数が、2 点が隣接するとき 730 個、隣接しないとき 780 個である。

この置換表現は、1 点の固定部分群が ${}^2F_4(2)$ と書かれる例外型 (しかも twisted) の Lie 型の群で、その指数 2 の交換子群 ${}^2F_4(2)'$ が Tits 群と呼ばれる単純群になる。これは Lie 型の群としては例外的なことで、27 個めの散在型単純群であると言っても良さそうな (要は、非常に難しい、と言いたい) 群である。そのせいもあって、我々はこの 4060 次の置換表現をきちんと把握しないまま研究を進めていた。どうしていたかという、群や組合せ構造を扱うことのできるソフトウェア Magma を用いて、そのデータベースから 4060 次の置換表現を呼び出して、さまざまな計算を行っていたのである。

しかしながら、いつまでも放置しておくわけにはいかない。そこで、この置換表現について改めて勉強することにしたという次第である。その結果、過去の文献における (ちょっとした) 記述ミスを発見し、そこを修正しながら、4060 点の具体的な記述について理解することができた。本稿は、その経緯について報告したいと思う。

なお、今回の研究の進行に当たっては、共同研究者 (千吉良氏) のみならず、いくつかの議論に付き合ってくれた島倉裕樹氏 (東北大情報) に負う部分が少なくない。ここに記して感謝したい。

2 ATLAS の記述から (1)

Rudvalis 群に関する基本的な文献としてここで取り上げるのは ATLAS [2] である。ATLAS における記述は、個人の署名記事ではないが、極大部分群を計算した論文 [5] や、有限単純群についての著書 [6] に同等の記述があることから R. A. Wilson によるものと考えて良いと思われる。

そこでの記述によれば、Rudvalis 群 Ru は、 $\mathbb{Z}[i](i = \sqrt{-1})$ 上の 28 次元の複素格子 (complex lattice) L の自己同型群から得られる。すなわち、 $\text{Aut}(L)$ は $4 \cdot Ru = 2 \cdot (2 \times Ru)$ という、 i 倍という作用が生成する位数 4 の中心を持つ群である。この 28 次元の空間の基底として、 $U_3(3)$ が 2 重可移に作用する 28 点集合を index に持つものがとれ、その基底の元での monomial 部分群 (これを仮に M とおく) として、 $2^6 \cdot G_2(2) \cong (2^6 : U_3(3)) \cdot 2$ と書かれる構造を持つ部分群を含んでいるという。この lattice L には 4060×4 個の short vectors があり、これらは 3 種類 (後述の (i), (ii), (iii)) の M -orbit に別れるのであるが、その代表元が与えられている。

ここで、ATLAS に書かれている代表元の記述を採録しておく。記号の意味は省略するが、上記の基底が e_a, e_b という記号、あるいは、 $e(\infty), e(z, t)$ などのパラメータが入った記号で表されていることだけを注意しておく。

$$(i) \quad e_a + e_b + e_{a+b} + e_{a-b}$$

$$(ii) \quad \frac{1}{2}e(\infty) + \frac{1}{2} \sum \{e(t, 0) + e(t - i, t) - e(i - t, t) - ie(t, 1) - ie(t, -1)\}$$

$$(iii) \quad \frac{1}{2+2i} \{(1 - 2i)e(\infty) + \sum e(z, t)\}$$

一見した時点で我々が困惑したのが、(ii) における和の取り方、および、係数の付け方の意味である。これが M -orbit を取ることで、いったい何個になるのか、見当もつかなかったのである。かろうじてわかることは、 e_a 達が正規直交基底を表しているとすれば、(i)-(iii) のいずれもノルムが 4 だということである。

* * *

我々は、こうした記述を理解するために、順を追って考えることにした。はじめにすべきことは、これらが M -orbit として与えられている以上、 M の理解である。この monomial group M を理解しようとするうちに、我々が気づいたのは $\text{Aut}(L)$ には $2^6 \cdot G_2(2)$ という部分群が作れないということだった。どうしても $2^7 \cdot G_2(2)$ になってしまう。これが、今回の話のポイントのひとつである。ここを解決した結果、ベクトルの (ii) についても理解することができた、というのが第 2 のポイントである。

3 ユニタリ群 $U_3(3)$ に関する準備

今回の話の中心は、ユニタリ群 $U_3(3)$ である。キーポイントは $U_3(3) \cong G_2(2)'$ もしくは $U_3(3) : 2 \cong G_2(2)$ という同型対応である。

まずは、記号や用語を定めながら、この群を定義しよう。基礎体は 9 元体であり、素体 (3 元体) に 1 の原始 4 乗根を付け加えた体である。この原始 4 乗根は (記号を

乱用して) 複素数と同様に i で表すことにする:

$$\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[i] = \{ x + yi \mid x, y \in \mathbb{F}_3 = \{0, 1, -1\} \}.$$

ここには体の自己同型 (位数 2 のガロア群の元) が定義されている。これを,

$$\overline{a + bi} = a - bi$$

と表すことにする。次に, ユニタリ計量が入った \mathbb{F}_9 上の 3次元空間 V を考える。ここでは (簡単のため) $V = \mathbb{F}_9^3$ (数ベクトル空間) として, 計量は

$$((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + x_3 \overline{y_3}$$

で定まるものとする。ユニタリ群 $U_3(3)$ は, 3次のユニタリ行列で行列式が 1 のものの全体と定義する。このとき $U_3(3)$ は単純群である。

注意 3.1. 従って, 単純群にするために中心による剰余群を考える必要はない。だから $U_3(3)$ は V に作用している。今後 V において, 定数倍を無視することは多々あるが, 定数倍を区別できないわけではないことを, ここで注意しておきたい。

また, 上述の体の自己同型は, $U_3(3)$ の位数 2 の外部自己同型を与える。これを付け加えることで $U_3(3) : 2 \cong G_2(2)$ が生成される。

V の長さ 0, 非 0 のベクトルの全体をそれぞれ Ω, Γ と表し, (定数倍を無視して) 生成する 1次元部分空間 (これを $[v] = \mathbb{F}_9 v$ と表す) の全体を Ω^*, Γ^* と表すことにする。

$$\begin{aligned} \Omega &= \{ v \in V \setminus \{0\} \mid (v, v) = 0 \}, & \Omega^* &= \{ [v] \mid v \in \Omega \} \\ \Gamma &= \{ v \in V \mid (v, v) \neq 0 \}, & \Gamma^* &= \{ [v] \mid v \in \Gamma \} \end{aligned}$$

よく知られた性質であるが, $U_3(3)$ は 28 点集合 Ω^* に 2重可移に作用する。

Ω^* の異なる 2元 $[a], [b]$ に対し, 2次元部分空間 $\langle a, b \rangle$ は (2重可移性から, これらの取り方によらず) Ω^* の元 (1次元部分空間) をちょうど 4つ含んでいる。定数倍を調整して $(a, b) = i$ (または $-i$) としておけば, $[a], [b], [a + b], [a - b]$ の 4つである。これを hyperbolic line と呼ぶことにする。hyperbolic line は全部で $63 = (28 \times 27) / (4 \times 3)$ 個である。前節で列挙した short vector の (i) が, これに対応していることを, ここで注意しておこう。

次に, V の直交基底 (定数倍を無視) 全体の集合を \mathcal{B} とおく。

$$\mathcal{B} = \{ \{ [v_1], [v_2], [v_3] \} \mid (v_i, v_j) = 0 (i \neq j), V = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \}$$

このとき, 計量の性質として, 上記の定義式で $[v_i] \in \Gamma^*$ であることを注意しておく。 $a \in \Gamma$ を一つ取ると, a を含む直交基底はちょうど 3つ存在する。この 3つからなる集合を $L(a)$ とおき, その全体を \mathcal{L} とおく。ここで, $|\mathcal{B}| = |\mathcal{L}| = 63$ であるが, この 2つの置換表現は同値ではない。なお, $a \in \Gamma$ の直交補空間は, 前述の hyperbolic line を与える。だから \mathcal{L} への作用と, hyperbolic line の全体への作用は同じである。

この $(\mathcal{B}, \mathcal{L})$ が, $U_3(3)$ を $G_2(2)'$ と見たときの rank 2 building を与えている。すなわち,

補題 3.2. (B, \mathcal{L}) は order $(2, 2)$ の generalized hexagon である。

ここでは (煩雑になるだけなので) 言葉の定義は省略するが, $B \cup \mathcal{L}$ から 2 つの元を任意にとるとき, それらが必ず, (B の元を頂点, \mathcal{L} の元を辺とみて) 六角形に含まれているというのである。また, order $(2, 2)$ とは, 頂点を含む辺の個数, 辺に含まれる頂点の個数, が共に $3 (= 2 + 1)$ であることを意味している。

さて, 特に, B の 2 点を結ぶ辺の最小個数で距離を定義すると, 2 点間の距離は高々 3 であり, $D, E (\neq) \in B$ に対し

$$\begin{aligned} D \text{ と } E \text{ が距離 } 1 &\Leftrightarrow D \text{ と } E \text{ は共有元を持つ} \\ D \text{ と } E \text{ が距離 } 2 &\Leftrightarrow D \text{ のある元と } E \text{ のある元が直交する} \\ D \text{ と } E \text{ が距離 } 3 &\Leftrightarrow D \text{ の元と } E \text{ の元は直交しない} \end{aligned}$$

が成り立つ。

B の部分集合 S に対し, S^\perp という記号で, S のすべての元と距離が 2 以下になっている B の元全体を表すことにする。直交補空間のような記号を使ったが, $S^{\perp\perp} = S$ とは言えない。実際,

補題 3.3. 任意の $D, E (\neq) \in B$ に対し, ある F が存在して, $\{D, E\}^{\perp\perp} = \{D, E, F\}$ が成り立つ。

D, E が距離 1 のときは, $\{D, E, F\} \in \mathcal{L}$ である。これを ordinary line と呼び, D, E が距離 2 のときの $\{D, E, F\}$ のことを ideal line と呼ぶ。Ronan [4] によれば, この ideal line の存在 (D, E から F が一意に決まること) が classical な (すなわち Lie 型の群に対応する) generalized hexagon を特徴付ける。 D, E が距離 3 のときの F についても, 図形的な意味づけができるが, ここでは省略する。

続いて 28 点集合 Ω^* について考える。 $\mathcal{P}(\Omega^*)$ で Ω^* の部分集合全体を表すことにすると, $\mathcal{P}(\Omega^*)$ は対称差を和として定義する ($X + Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$) ことにより, 2 元体上の 28 次元ベクトル空間と見ることが出来る。零ベクトルは空集合 \emptyset である。

直交基底 $E = \{[a], [b], [c]\} \in B$ に対して定まる, 次のような Ω^* の部分集合 $\delta(E)$ が重要である。

$$\delta(E) = \{ [v] \in \Omega^* \mid (v, a)(v, b)(v, c) \neq 0 \}$$

すなわち a, b, c のどれとも直交しない $[v]$ の集合である。 a, b, c はそれぞれ hyperbolic line と直交し, そこに共通部分はないので, $|\delta(E)| = 28 - 4 \times 3 = 16$ となる。

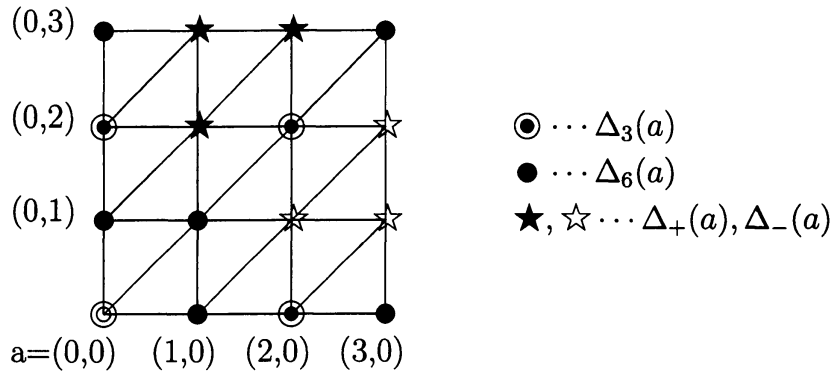
補題 3.4. 任意の $D, E (\neq) \in B$ と, D, E から補題 3.3 で定まる F に対し,

$$\delta(D) + \delta(E) = \begin{cases} \delta(F) & (D, E \text{ の距離が } 1 \text{ か } 2) \\ \delta(F) + \Omega^* & (D, E \text{ の距離が } 3) \end{cases}$$

が成り立つ。特に, 集合 $\{ \emptyset, \Omega^*, \delta(E), \delta(E) + \Omega^* \mid E \in B \}$ は, 和 (=対称差) で閉じており, $\mathcal{P}(\Omega^*)$ の 7 次元部分空間になる。

注意 3.5. 補題 3.4 で, 距離 3 のときに $\delta(F) + \Omega^*$ が現れてしまうので, $\{ \emptyset, \delta(E) \mid E \in B \}$ だけで閉じてはいない。

最後に、この 16 点集合 $\delta(E)$ に定義されるグラフの構造について述べておく。 $\delta(E)$ に hyperbolic line の 4 点が含まれているとき、この 4 点は互いに隣接しているとして、グラフの構造を入れるのである。これが (有名な) Shrikhande graph と呼ばれるグラフと同型になる。このグラフの (ひとつの) 定義は、 $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ を点集合として、 (i, j) の隣接点を $(i, k), (k, j), (i+k, j+k)$ ($k \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$) とするものである。(特に、隣接点は 9 点、非隣接点は 6 点になる。)



このグラフは、strongly regular graph ではあるが、rank 3 グラフではない。すなわち、グラフの自己同型群が隣接する 2 点の組の上に可移に働いていない。1 点 $[a] \in \delta(E)$ を固定すると、その固定部分群は隣接点の上に 2 つの orbit を持ち、その長さは 3 と 6 になる。この二つの orbit を、 $\Delta_3(a), \Delta_6(a)$ と表すことにする。一方、非隣接点の 6 点に対しては、固定部分群は可移に働くが、原始的ではなく 3 点からなる非原始ブロックを持っている。グラフの構造で言うと、この 6 点は三角柱の点と辺の形をしており、2 つの三角形が非原始ブロックを作る。これらを $\Delta_+(a), \Delta_-(a)$ と表すことにする。この \pm の記号は便宜的なもので、実際には区別できない。上で与えた Shrikhande graph の記述で、 $[a]$ が $(0,0)$ に対応するとき、

$$\Delta_3(a) = \{(2,0), (0,2), (2,2)\}, \Delta_6(a) = \{(1,0), (3,0), (0,1), (0,3), (1,1), (3,3)\},$$

$$\Delta_+(a), \Delta_-(a) = \{(1,2), (1,3), (2,3)\}, \{(2,1), (3,1), (3,2)\}$$

である。

4 ATLAS の記述から (2) monomial group

まず、 $U_3(3)$ が作用する Ω のベクトルを用いて、28 次元空間 \mathbb{C}^{28} の正規直交基底を $e_v (v \in \Omega)$ と定める。ただし、 V における定数倍について、

$$e_{cv} = c^2 e_v$$

と定めることとする。ここで、定数 c は、左辺においては $\mathbb{F}_9 \setminus \{0\}$ の元を表し、右辺においては複素数 $(\pm 1, \pm i)$ を表していると約束する。従って Ω^* と $\mathbb{C}e_v$ たちが 1 対 1 に対応して、空間の次元は 28 になる。

この基底に対する monomial な作用を定義する。最初に $\sigma \in U_3(3)$ に対しては、自然に $\sigma(e_v) = e_{\sigma(v)}$ と定める。次に、体 \mathbb{F}_9 の共役写像に対応する線形写像 θ を以下のように定める。 $v_0 \in \Omega$ をひとつ fix する。簡単のため $v_0 = (1, 0, 0)$ と思って良い。このとき、 $(v, v_0) = 1$ をみたす $v \in \Omega$ に対して $\theta(e_v) = e_{\bar{v}}$ とする。一般には、 $(v, v_0) = \alpha$ のとき、 $((1/\alpha)v, v_0) = 1$ であるから

$$\theta(v) = \theta(e_{\alpha \times (1/\alpha)v}) = \alpha^2 \theta(e_{(1/\alpha)v}) = \alpha^2 e_{(1/\bar{\alpha})\bar{v}} = \alpha^2 \times (1/\bar{\alpha}^2) e_{\bar{v}} = \alpha^4 e_{\bar{v}}$$

となる。 $\alpha^8 = 1$ なので、 $\theta^2 = 1$ すなわち $\theta^{-1} = \theta$ である。

さて $\sigma \in U_3(3)$ に対し、その行列としての成分を共役写像で置き換えた $\bar{\sigma}$ はまた $U_3(3)$ に含まれる。一方、上記の θ による共役 $\theta\sigma\theta$ も $U_3(3)$ の元である。この θ による共役が、共役写像とは少し異なっているところから、monomial group における diagonal な作用が生じてくるのである。

補題 4.1. $\sigma \in U_3(3)$ に対し、ある直交基底 E が存在して、 $\bar{\sigma}^{-1}\theta\sigma\theta = d_D$ or $-d_D$ となる。ただし、 d_E とは

$$d_E(e_v) = \begin{cases} -e_v & (v \in \delta(E)) \\ e_v & (v \notin \delta(E)) \end{cases}$$

で定義される diagonal な作用である。

d_E 達は、補題 3.4 の 7 次元空間と同型な elementary abelian group を生成する。 $U_3(3)$ との半直積に、さらに θ を加えて、 $(2^7 : U_3(3)) \cdot 2 \cong 2^7 \cdot G_2(2)$ という形の monomial な作用の群が生成されることになる。注意 3.5 は、これが $2^6 \cdot G_2(2)$ という形には納まらないことを意味する。

注意 4.2. これが monomial group の正しい形であると言いたいところであるが、実は、最も基本的な定数倍である i 倍が入っていない。 $(-1$ 倍は 2^7 の中に入っている。) つまり、中心による i 倍という定数倍を無視するという立場ならば、 -1 倍も無視することになって、 $2^6 \cdot G_2(2)$ で良いことにはなる。 $\text{Aut}(L) \cong 4 \cdot Ru$ の中心による剰余群である Ru の部分群を考えるとということであるなら。

結局、最も正しい monomial group の形は i 倍も含めて、 $M \cong (4 \times 2^6) \cdot G_2(2)$ あるいは $M \cong 2^7 \cdot (2 \times G_2(2))$ ということなのだろうと思う。

5 ATLAS の記述から (3) short vectors

ここでは、Section 2 に列挙した、short vector (i), (ii), (iii) を完全に理解することを目指す。monomial group M は、注意 4.2 の $M \cong (4 \times 2^6) \cdot G_2(2)$ を採用する。

(i) これは hyperbolic line 上の 4 つの isotropic vector に対応するものである。

$$e_a + e_b + e_{a+b} + e_{a-b} \quad (a, b, a+b, a-b \in \Omega)$$

Section 3 でも触れたが、 $a, b \in \Omega$ かつ $(a, b) = \pm i$ であればよい。 a や b について、定数倍の自由度があるが、内積の条件があるので、 a を ta に替えても、 b は $\pm tb$ に

変わるよりない。よって、全体として t^2 倍されるだけになる。従って、この型のベクトルの総数は、定数倍を除くと hyperbolic line の総数である 63 個であり、これが $U_3(3)$ -orbit になっている。

Monomial group M -orbit を考えるには、diagonal な作用での変化を見れば良く、結論としては、偶数個の符号変化が可能である。従って、符号変化したものの総数は、定数倍を除いて 63×3 となり、これが $U_3(3)$ -orbit になっている。

(ii) これは $\delta(E)(E \in \mathcal{B})$ と $[a] \in \delta(E)$ を決めることによって定まるベクトルである。ここで $\delta(E)$ の Shrikhande graph としての構造が本質的に関わっていることが、ここでのポイントである。また、 Δ_+, Δ_- が区別できないことから、ベクトルも 2 通り (復号同順) 現れる。

$$e_a + \sum_{b \in \Delta_3} e_b + (-i) \sum_{b \in \Delta_6} e_b \pm \sum_{b \in \Delta_+} e_b \mp \sum_{b \in \Delta_-} e_b$$

ベクトルの総数は、直交基底の個数 (63) に、 $\delta(E)$ の 1 点の決め方 (16) と符号 (\pm) の 2 通りをかけて、 $63 \times 16 \times 2$ となる。

ここは、実際問題としては非常にわかりづらいのだが、diagonal な作用により新しいベクトルは出てこない。これらが $U_3(3)$ -orbit であり、 M -orbit でもある。

(iii) これは $a \in \Omega$ をひとつ取ると、ひとつ決まるベクトルである。

$$\frac{1}{2+2i} \left\{ e_a + \sum_{b \in \Omega, (a,b)=1} e_b \right\}$$

28 個からなる $U_3(3)$ -orbit を作る。また、diagonal な作用 d_E により得られるベクトルは、 $a \in \delta(E)$ か $a \notin \delta(E)$ かによって、異なる $U_3(3)$ -orbit を与える。前者は 28×36 、後者は 28×27 という長さの orbit になる。

以上で、Rudvalis 群の拡大 $4 \cdot Ru$ が作用する 28 次元 complex lattice の 4060×4 個のノルム 4 のベクトル (short vectors) が具体的に与えられたことになる。ここで

$$4060 = (63 + 63 \times 3) + (63 \times 16 \times 2) + (28 + 28 \times 27 + 28 \times 36)$$

であり、右辺はベクトルの定数倍を無視したときの $U_3(3)$ -orbit (6 つ) の長さの和となっている。

6 いくつかの結果

前節までの知見により、我々の結果を含むいくつかの事実が、具体的なベクトルに対する計算結果として述べる事が出来るようになった。

最初の命題は、過去の文献で見たことはない。ただ、これを新しい結果と言うよりは、計算機の進歩の一例を示すものと理解すべきものであろう。

命題 6.1. 前節で与えた (4060×4 個の) short vector が生成する複素格子は、ランク 56 の実格子として even unimodular であり、その theta series は

$$1 + 0 \cdot q + (4060 \times 4)q^2 + \dots$$

となる。すなわち、この 4060×4 個が minimal norm (=4) のベクトルの全体を与えている。

ベクトルの記述が具体的であることから、ATLAS にも書かれている次の性質が直接計算から導かれる。ただし、これを手計算で示すことは、まだまだ難しいと思う。

命題 6.2. 相異なる 2 つの short vector の内積は、 $0, \pm 1, \pm i$ のいずれかである。

記号 Λ で定数倍を同一視したときの 4060 個の short vector 全体の集合を表すことにする。

命題 6.3. Λ を点集合として、その内積が 0 であるときに辺で結ばれるとしてグラフを定義すれば、パラメータ $(4060, 1755, 730, 780)$ の strongly regular graph になる。

前節で述べたように Λ は 6 つの $U_3(3)$ -orbit に分かれる。これらのうち、前節 (iii) の長さ 28 の orbit を Λ_0 とおき、残りを前節で述べた順に $\Lambda_1, \dots, \Lambda_5$ と表すことにする。すなわち $|\Lambda_1| = 63$, $|\Lambda_2| = 63 \times 3$, $|\Lambda_3| = 63 \times 16 \times 2$, $|\Lambda_4| = 28 \times 36$, $|\Lambda_5| = 28 \times 27$ である。

この Λ_0 を点集合として、他の $\Lambda_k (k = 1, \dots, 5)$ をブロックの集合として design を考える。ただし、デザインの結合関係は直交すること（従って、上記のグラフで辺で結ばれること）として定義する。 $U_3(3)$ は Λ_0 に 2 重可移に作用するので、これらは 2-design になる。ブロックサイズは、順に 24, 8, 17, 9, 12 であり、より詳しいパラメータは下記の通りである。

- $(\Lambda_0, \Lambda_1) : 2-(28, 24, 46)$ design
- $(\Lambda_0, \Lambda_2) : 2-(28, 8, 14)$ design
- $(\Lambda_0, \Lambda_3) : 2-(28, 12, 352)$ design
- $(\Lambda_0, \Lambda_4) : 2-(28, 9, 96)$ design
- $(\Lambda_0, \Lambda_5) : 2-(28, 17, 272)$ design

我々の主結果の一つ (1 節の (2)) は、これらのデザインからグラフの辺集合が復元できるというものである。すなわち、2 つのブロックが辺で結ばれるかどうか、2 つのブロックの intersection から読み取ることができるというのである。具体的には intersection の偶奇を見るのだが、この結果をより簡潔に述べるために、少し工夫をしておく。

まず、 Λ_0 の各元を Λ_0 の 1 点部分集合と見る。次に、偶数位数のブロック ($\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$) を、その補集合 (これを $\overline{\Lambda_1}, \overline{\Lambda_2}, \overline{\Lambda_3}$ と書くことにする) に取り替える。ブロックをその補集合に変えても、デザインであることは変わらない。念のため、パラメータを書いておく。

- $(\Lambda_0, \overline{\Lambda_1}) : 2-(28, 4, 1)$ design
 $(\Lambda_0, \overline{\Lambda_2}) : 2-(28, 20, 95)$ design
 $(\Lambda_0, \overline{\Lambda_3}) : 2-(28, 16, 640)$ design

このとき、次が成り立つ。

定理 6.4. $X, Y \in \Lambda_0 \cup \overline{\Lambda_1} \cup \overline{\Lambda_2} \cup \overline{\Lambda_3} \cup \Lambda_4 \cup \Lambda_5$ に対し、 X と Y がグラフにおいて辺で結ばれることは、 Λ_0 の部分集合として

$$|X \cap Y| \equiv |X| \times |Y| \pmod{2}$$

が成り立つことと同値である。

7 おわりに

最後に、これからの話などをいくつか書いておく。

(1) ここに書いたことは、Rudvalis 群の話としてはまだまだ不十分で、monomial group M が作用する範囲でしかない。 Ru 全体を理解するには、やはり ${}^2F_4(2)$ に対するアプローチが必要である。4060 点のグラフにおいて、1 点の隣接点全体に ${}^2F_4(2)$ は作用し、そこには (ランク 2 の Lie 型の群として) generalized octagon の構造が入る。具体的には short vector v をひとつ固定したとき、 v と直交する short vector u_1, u_2, u_3 で

$$v \equiv u_1 + u_2 + u_3 \pmod{(1+i)L}$$

が成り立つときに $\{u_1, u_2, u_3\}$ を line と定義すればよい。例えば、 $v = e_a + e_b + e_{a+b} + e_{a-b}$ であるとき、 u_1, u_2, u_3 として、 v の符号を変化させたもの (3通り) を取れば良い。このような計算を通して、1 点の隣接点全体に ${}^2F_4(2)$ が作用することを示せると良いと思う。あるいは、このような記述を通して、 ${}^2F_4(2)$ という群のよりよい理解が出来るようになると良いと思っている。

(2) 今回の話では、最終的に (定理 6.4) Λ_0 という集合が重要な役割を果たしている。これは \mathbb{C}^{28} のベクトルとして 1 次独立であり、これらの内積は、すべて non-zero である。一方、Conway [1] で中心となるのは、互いに直交する 28 個の short vector である。これについても、学生との研究成果を発表したことがある (葛田一慶, Rudvalis 群と関連する 2-design について, 研究集会「有限群論と代数的組合せ論」(京都大学数理解析研究所), 2007 年 12 月) が、研究成果としてはまだまだ満足行く形ではない。今回の研究を通して、新たな知見が得られないかを考えたいと共に、難しい (と思っている) Conway の論文に再度取り組んでみるのも良いかと思っているところである。

References

- [1] J. H. Conway, A quaternionic construction for the Rudvalis group, in "Topics in group theory and computation" (Proc. Summer School, University Coll., Galway, 1973), 69–81. Academic Press, London, 1977.

- [2] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, Atlas of Finite Groups, Clarendon Press, Oxford, 1985.
- [3] J. H. Conway, D. B. Wales, Construction of the Rudvalis group of order 145,926,144,000, *J. Algebra* 27 (1973), 538–548.
- [4] M. A. Ronan, A Geometric Characterization of Moufang Hexagons, *Invent. Math.* 57 (1980), 227–262.
- [5] R. A. Wilson, The Geometry and Maximal Subgroups of the Simple Groups of A. Rudvalis and J. Tits, *Proc. London Math. Soc.* 48 (1984), 533–563.
- [6] R. A. Wilson, The finite simple groups, Springer, 2009.