数理解析研究所講究録
第 1811 巻 2012 年 60-77

バーンサイド環の一般化とその応用

竹ヶ原　裕元

室蘭工業大学

有限群の指標環における Brauer の誘導定理を一般化する手法として, Boltje [4] により導入されたマッキー関手の + 構成の理論がある. マッキー関手の + 構成はバーンサイド環の一般化であるが, これまで, バーンサイド環の理論における第 1 基本定理は一般化されていなかった. 本報告では, + 構成に関する第 1 基本定理を示し, その応用として Brauer の誘導定理の一般化に関する結果を述べる. さらに, 有限群の twisted quantum double の表現論における Brauer の誘導定理の一般化を紹介する.

1　マッキー関手の + 構成

共役関手, 制限関手, マッキー関手, グリーン関手を定義する.

定義 1.1 ([4]) k を単位元をもつ可換環とする.

(1) k 上 G の共役関手とは, k 加群の族 $A(H)$, $H \leq G$ と k 準同型の族

$$\mathrm{con}_H^g : A(H) \to A({}^gH),\ H \leq G,\ g \in G,$$

共役写像, の組 $A = (A, \mathrm{con})$ で, 次の公理を満たすものをいう.

$$\text{(G.1)}\ \mathrm{con}_{{}^rH}^g \circ \mathrm{con}_H^r = \mathrm{con}_H^{gr}, \quad \mathrm{con}_H^h = \mathrm{id}_{A(H)},$$

ここで $H \leq G$, $g, r \in G$, $h \in H$.

(2) k 上 G の制限関手とは, 共役関手 (A, con) と k 準同型の族

$$\mathrm{res}_K^H : A(H) \to A(K),\ K \leq H \leq G,$$

制限写像, から成る組 $A = (A, \mathrm{con}, \mathrm{res})$ で, 次の公理を満たすものをいう.

$$\text{(G.2)}\ \mathrm{res}_L^K \circ \mathrm{res}_K^H = \mathrm{res}_L^H, \quad \mathrm{res}_H^H = \mathrm{id}_{A(H)},$$
$$\text{(G.3)}\ \mathrm{con}_K^g \circ \mathrm{res}_K^H = \mathrm{res}_{{}^gK}^{{}^gH} \circ \mathrm{con}_H^g,$$

ここで $L \leq K \leq H \leq G$, $g \in G$.

(3) k 上 G のマッキー関手とは, 制限関手 $(A, \mathrm{con}, \mathrm{res})$ と k 準同型の族

$$\mathrm{ind}_K^H : A(K) \to A(H),\ K \leq H \leq G,$$

誘導写像, から成る組 $A = (A, \mathrm{con}, \mathrm{res}, \mathrm{ind})$ で, 次の公理を満たすものをいう.

(G.4) $\mathrm{ind}_K^H \circ \mathrm{ind}_L^K = \mathrm{ind}_L^H, \quad \mathrm{ind}_H^H = \mathrm{id}_{A(H)}$,

(G.5) $\mathrm{con}_H^g \circ \mathrm{ind}_K^H = \mathrm{ind}_{{}^gK}^{{}^gH} \circ \mathrm{con}_K^g$,

(G.6) (マッキー公理)

$$\mathrm{res}_K^H \circ \mathrm{ind}_U^H = \sum_{KhU \in K\backslash H/U} \mathrm{ind}_{K\cap {}^hU}^K \circ \mathrm{res}_{K\cap {}^hU}^{{}^hU} \circ \mathrm{con}_U^h,$$

ここで $L \leq K \leq H \leq G$, $U \leq H$, $g \in G$.

(4) k 上 G のグリーン関手とは, マッキー関手 $A = (A, \mathrm{con}, \mathrm{res}, \mathrm{ind})$ で, $A(H)$, $H \leq G$, が k 代数, con_H^g, res_K^H, ここで $K \leq H \leq G$, $g \in G$, が環準同型であって, さらに次の公理を満たすものをいう.

(G.7) (フロベニウス公理)

$$\sigma \cdot \mathrm{ind}_K^H(\tau) = \mathrm{ind}_K^H(\mathrm{res}_K^H(\sigma) \cdot \tau), \quad \mathrm{ind}_K^H(\tau) \cdot \sigma = \mathrm{ind}_K^H(\tau \cdot \mathrm{res}_K^H(\sigma)),$$

ここで $K \leq H$, $\sigma \in A(H)$, $\tau \in A(K)$.

以下, 文献 [4] に従って, '上 + 構成' と '下 + 構成' を定義する. A を k 上 G の共役関手とし, 各 $H \leq G$ に対して,

$$M(H) = \prod_{U \leq H} A(U)$$

とおく. このとき, $M(H)$ は作用が

$$h.(x_U)_{U \leq H} = (\mathrm{con}_U^h(x_U))_{{}^hU \leq H},\ h \in H,\ (x_U)_{U \leq H} \in M(H)$$

で与えられる kH 加群である. 上 + 構成と呼ばれるマッキー関手

$$A^+ = (A^+, \mathrm{con}^+, \mathrm{res}^+, \mathrm{ind}^+)$$

の構成は, 次で与えられる.

$$A^+(H) = \{(x_U)_{U \leq H} \in M(H) \mid h.(x_U)_{U \leq H} = (x_U)_{U \leq H},\ {}^\forall h \in H\},$$

$$\mathrm{con}^{+g}_{H}((x_U)_{U \leq H}) = (\mathrm{con}_H^g(x_U))_{{}^gU \leq {}^gH},$$

$$\mathrm{res}^{+H}_{K}((x_U)_{U \leq H}) = (x_U)_{U \leq K},$$

$$\mathrm{ind}^{+H}_{K}((y_U)_{U \leq K}) = \sum_{hK \in H/K} (c_L^h)_{L \leq H},$$

ここで $K \leq H \leq G$, $g \in G$, $(x_U)_{U \leq H} \in A^+(H)$, $(y_U)_{U \leq K} \in A^+(K)$,

$$c_L^h = \begin{cases} \mathrm{con}_U^h(y_U), & L = {}^hU,\ U \leq K \text{ のとき}, \\ 0, & \text{その他の場合}. \end{cases}$$

各 $H \leq G$ に対して, $I(M(H))$ を H が $M(H)/I(M(H))$ に自明に作用するような最小の kH 部分加群とする. A が制限関手のとき, 下 + 構成と呼ばれるマッキー関手

$$A_+ = (A_+, \mathrm{con}_+, \mathrm{res}_+, \mathrm{ind}_+)$$

の構成は, 次で与えられる.

$$\begin{aligned}
&A_+(H) = M(H)/I(M(H)), \\
&\mathrm{con}_{+H}^{\ g}(\overline{(x_U)_{U \leq H}}) = \overline{(\mathrm{con}_H^g(x_U))_{{}^gU \leq {}^gH}}, \\
&\mathrm{res}_{+K}^{\ H}(\overline{(x_U)_{U \leq H}}) = \sum_{U \leq H} \sum_{KhU \in K\backslash H/U} \overline{(d_L^h)_{L \leq K}}, \\
&\mathrm{ind}_{+K}^{\ H}(\overline{(y_U)_{U \leq K}}) = \overline{(y'_U)_{U \leq H}},
\end{aligned}$$

ここで $K \leq H \leq G$, $g \in G$, $(x_U)_{U \leq H} \in M(H)$, $(y_U)_{U \leq K} \in M(K)$,

$$d_L^h = \begin{cases} \mathrm{res}_{K \cap {}^hU}^{{}^hU} \circ \mathrm{con}_U^h(x_U) & L = K \cap {}^hU \text{ の場合}, \\ 0 & \text{その他の場合}, \end{cases}$$

$$y'_U = \begin{cases} y_U & U \leq K \text{ の場合}, \\ 0 & \text{その他の場合}. \end{cases}$$

A を k 上 G の制限関手とする. $K \leq H \leq G$, $\sigma \in A(K)$ に対して,

$$[K, \sigma] = \overline{(\delta_{KU}\sigma)_{U \leq H}} \in A_+(H)$$

とおく. $A(H)$, $H \leq G$, が k 代数であり, con_H^g, res_K^H, ここで $K \leq H \leq G$, $g \in G$, が環準同型のとき, $A_+(H)$ における積が

$$[K, \sigma] \cdot [U, \tau] = \sum_{KhU \in K\backslash H/U} [K \cap {}^hU, \mathrm{res}_{K \cap {}^hU}^K(\sigma) \cdot \mathrm{res}_{K \cap {}^hU}^{{}^hU} \circ \mathrm{con}_U^h(\tau)]$$

により定義される. このとき, A_+ はグリーン関手である.

各 $H \leq G$ に対して, マーク準同型 $\rho_H^A : A_+(H) \to A^+(H)$ は

$$\rho_H^A(\overline{(x_U)_{U \leq H}}) = \sum_{U \leq H} \left(\sum_{hU \in H/U,\, K \leq {}^hU} \mathrm{res}_K^{{}^hU} \circ \mathrm{con}_U^h(x_U) \right)_{K \leq H}, \quad (x_U)_{U \leq H} \in M(H)$$

により定義され, 写像 $\eta_H^A : A^+(H) \to A_+(H)$ は

$$\eta_H^A((y_K)_{K\leq H}) = \sum_{K\leq H}\sum_{U\leq K} |U|\mu(U,K)[U, \mathrm{res}_U^K(y_K)],\ (y_K)_{K\leq H} \in A^+(H),$$

ここで μ は G の部分群束のメービウス関数 ([1] 参照), により定義される.

命題 1.2 ([4]) A を k 上 G の制限関手とする. このとき, 各 $H \leq G$ に対して,

$$\eta_H^A \circ \rho_H^A = |H|\mathrm{id}_{A_+(H)},\ \rho_H^A \circ \eta_H^A = |H|\mathrm{id}_{A^+(H)}$$

が成り立つ.

2 斜マッキー関手

以下, S を G モノイドとし, $\mathrm{Stab}(G;S) = \{G_s \mid s \in G\}$, ここで G_s は s の安定化群, とおく. k 上 $\mathrm{Stab}(G;S)$ の制限束とは, 斜共役写像と呼ばれる k 準同型の族

$$\mathrm{con}_{s}{}_H^g : A_s(H) \to A_{{}^gs}({}^gH),\ s\in S,\ H \leq G_s,\ g\in G$$

を備えた k 上 G_s, $s \in S$ の制限関手の集まり $A = \{A_s = (A_s, \mathrm{con}, \mathrm{res})\}_{s\in S}$ で, 次の公理を満たすものをいう.

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{C}.0)\ \ \mathrm{con}_{s}{}_H^t = \mathrm{con}_H^t,\\
&(\mathrm{C}.1)\ \ \mathrm{con}_{{}^rs}{}_{{}^rH}^g \circ \mathrm{con}_{s}{}_H^r = \mathrm{con}_{s}{}_H^{gr},\\
&(\mathrm{C}.2)\ \ \mathrm{con}_{s}{}_K^g \circ \mathrm{res}_K^H = \mathrm{res}_{{}^gK}^{{}^gH} \circ \mathrm{con}_{s}{}_H^g,
\end{aligned}$$

ここで $s \in S$, $K \leq H \leq G_s$, g, $r \in G$, $t \in G_s$. この場合, A は A_s, $s \in S$ で構成される制限束と呼ばれる. k 上 G の制限関手 A は自然に $A_s := A = (A, \mathrm{con}, \mathrm{res})$, $s \in S$ で構成される制限束と考えられる.

A を k 上 $\mathrm{Stab}(G;S)$ の制限束とする. k 上 G の制限関手

$$A_S = (A_S, \mathrm{con}_S, \mathrm{res}_S)$$

を

$$A_S(H) = \left\{ (x(s))_{s\in S} \in \prod_{s\in S} A_s(H_s) \;\middle|\; x(s) = 0,\ {}^\forall s \in S - C_S(H) \right\},$$

$$\mathrm{con}_S{}_H^g((x(s))_{s\in S}) = (\mathrm{con}_{s}{}_H^g(x(s)))_{{}^gs\in S},$$

$$\mathrm{res}_S{}_K^H((x(s))_{s\in S}) = (\mathrm{res}_{K_s}^{H_s}(x(s)))_{s\in S},$$

ここで $K \le H \le G$, $g \in G$, $(x(s))_{s\in S} \in A_S(H)$, により定義し, A の上の斜制限関手と呼ぶ. A が制限関手で, $A(H)$, $H \le G$, が k 代数, con_H^g, res_K^H, ここで $K \le H \le G$, $g \in G$, が環準同型のとき, $A_S(H)$ における積が

$$(x(s))_{s\in S}(y(t))_{t\in S} = \left(\sum_{(s,t)\in C_S(H)\times C_S(H),\, st=r} x(s)y(t) \right)_{r\in S}$$

により与えられる. このとき, A_{S+} はグリーン関手である.

k 上 $\mathrm{Stab}(G;S)$ のマッキー束とは, 斜共役写像と呼ばれる k 準同型の族

$$\mathrm{con}_{s\,H}^{\;g} : X_s(H) \to X_{^gs}({}^gH),\ s \in S,\ H \le G_s,\ g \in G$$

を備えた k 上 G_s, $s \in S$ のマッキー関手の集まり $X = \{X_s = (X_s, \mathrm{con}, \mathrm{res}, \mathrm{ind})\}_{s\in S}$ で, 公理 (C.0)–(C.2) と次の公理を満たすものをいう.

$$\text{(C.3)}\ \ \mathrm{con}_{s\,H}^{\;g} \circ \mathrm{ind}_K^H = \mathrm{ind}_{^gK}^{^gH} \circ \mathrm{con}_{s\,K}^{\;g},$$

ここで $s \in S$, $K \le H \le G_s$, $g \in G$. この場合, X は X_s, $s \in S$ で構成されるマッキー束と呼ばれる. k 上 G のマッキー関手 X は自然に $X_s := X = (X, \mathrm{con}, \mathrm{res}, \mathrm{ind})$, $s \in S$ で構成されるマッキー束と考えられる.

X を k 上 $\mathrm{Stab}(G;S)$ のマッキー束とする. k 上 G のマッキー関手

$$X_S = (X_S, \mathrm{con}_S, \mathrm{res}_S, \mathrm{ind}_S)$$

を

$$X_S(H) = \left\{ (x(s))_{s\in S} \in \prod_{s\in S} X_s(H_s) \;\middle|\; \mathrm{con}_{s\,H_s}^{\;h}(x(s)) = x({}^hs),\ {}^\forall h \in H \right\},$$

$$\mathrm{con}_{S\,H}^{\;g}((x(s))_{s\in S}) = (\mathrm{con}_{s\,H_s}^{\;g}(x(s)))_{^gs\in S},$$

$$\mathrm{res}_{S\,K}^{\;H}((x(s))_{s\in S}) = (\mathrm{res}_{K_s}^{H_s}(x(s)))_{s\in S},$$

$$\mathrm{ind}_{S\,K}^{\;H}((y(s))_{s\in S}) = \left(\sum_{H_shK\in H_s\backslash H/K} \mathrm{ind}_{(^hK)_s}^{H_s} \circ \mathrm{con}_{h^{-1}s\,K_{h^{-1}s}}^{\;h}(y({}^{h^{-1}}s)) \right)_{s\in S},$$

ここで $K \le H \le G$, $g \in G$, $(x(s))_{s\in S} \in X_S(H)$, $(y(s))_{s\in S} \in X_S(K)$, により定義し ([14] 参照), X の上の斜マッキー関手とよぶ. X がマッキー関手のとき, この構成は Dress 構成と呼ばれる. X がグリーン関手のとき, $X_S(H)$ における積が

$$(x(s))_{s\in S}(y(t))_{t\in S} = \left(\sum_{(s,t)\in \overline{H_r\backslash S\times S},\, st=r} \mathrm{ind}_{H_{s,t}}^{H_r}(\mathrm{res}_{H_{s,t}}^{H_s}(x(s)) \cdot \mathrm{res}_{H_{s,t}}^{H_t}(y(t))) \right)_{r\in S},$$

ここで $H_{s,t} = H_s \cap H_t$, により与えられ, X_S はグリーン関手となる ([5, 14] 参照).

命題 2.1 ([16]) A を k 上 G の制限関手とする．このとき，マッキー関手 A_{S+} は A_{+S} と同型である．すなわち，k 準同型の族 $f_H : A_{S+}(H) \to A_{+S}(H)$, $H \leq G$, が存在して，$f_{{}^gH} \circ \mathrm{con}_{S+}{}^g_H = \mathrm{con}_{+S}{}^g_H \circ f_H$, $f_K \circ \mathrm{res}_{S+}{}^H_K = \mathrm{res}_{+S}{}^H_K \circ f_H$, $f_H \circ \mathrm{ind}_{S+}{}^H_K = \mathrm{ind}_{+S}{}^H_K \circ f_K$, ここで $K \leq H \leq G$, $g \in G$, となっている．

k 上 G の制限関手 $\underline{k} = (\underline{k}, \mathrm{con}, \mathrm{res})$ を $\underline{k}(H) = k$, $H \leq G$, $\mathrm{con}^g_H = \mathrm{res}^H_K = \mathrm{id}_k$, ここで $K \leq H \leq G$, $g \in G$, により定義する．$k = \mathbb{Z}$ のとき，$\underline{\mathbb{Z}}_+$ はバーンサイド環関手 Ω ([18] 参照) と同一視され，さらに，$\underline{\mathbb{Z}}_{S+}$ は斜バーンサイド環関手 $C\Omega(-,S)$ ([14] 参照) と同一視される．

系 2.2 グリーン関手 $C\Omega(-,S)$ は Ω_S と同型である．すなわち，命題 2.1 における f_H, $H \leq G$, は環準同型である．

3 標準誘導公式

$X = (X, \mathrm{con}, \mathrm{res}, \mathrm{ind})$ を k 上 G のマッキー関手とする．A を X の制限部分関手，すなわち，$A(H)$, $H \leq G$ は $X(H)$ の k 部分加群とし，A の共役写像と制限写像は con^g_H と res^H_K, ここで $K \leq H \leq G$, $g \in G$, の制限とする．誘導射 $\Theta^{X,A} : A_+ \to X$ は k 準同型の族 $\Theta^{X,A}_H : A_+(H) \to X(H)$, $H \leq G$ で，$\Theta^{X,A}_H([K,\sigma]) = \mathrm{ind}^H_K(\sigma)$, $[K,\sigma] \in A_+(H)$ を満たすものとして定義される．制限関手の射 $\Psi : X \to A_+$, すなわち，k 準同型の族 $\Psi_H : X(H) \to A_+(H)$, $H \leq G$ で，$\Psi_{{}^gH} \circ \mathrm{con}^g_H = \mathrm{con}_+{}^g_H \circ \Psi_H$, $\Psi_K \circ \mathrm{res}^H_K = \mathrm{res}_+{}^H_K \circ \Psi_H$, ここで $K \leq H \leq G$, $g \in G$, を満たすものが X に関する A からの標準誘導公式であるとは，$\Theta^{X,A} \circ \Psi = \mathrm{id}_X$ が成り立つことをいう ([4] 参照)．

$\lambda : X \to A$ を共役関手の射，すなわち，k 準同型の族 $\lambda_H : X(H) \to A(H)$, $H \leq G$ で，$\lambda_{{}^gH} \circ \mathrm{con}^g_H = \mathrm{con}^g_H \circ \lambda_H$, ここで $H \leq G$, $g \in G$, を満たすものとする．このとき，$(\lambda_K \circ \mathrm{res}^H_K(x))_{K \leq H} \in A^+(H)$, ここで $H \leq G$, $x \in X(H)$, が成り立つ．$|G|$ が k における単数であるとき，制限関手の射 $\Psi^{X,A,\lambda} : X \to A_+$ は k 準同型の族 $\Psi^{X,A,\lambda}_H : X(H) \to A_+(H)$, $H \leq G$ で，

$$\begin{aligned}\Psi^{X,A,\lambda}_H(x) &= \frac{1}{|H|}\eta^A_H((\lambda_K \circ \mathrm{res}^H_K(x))_{K \leq H}) \\ &= \frac{1}{|H|}\sum_{K \leq H}\sum_{U \leq K}|U|\mu(U,K)[U, \mathrm{res}^K_U \circ \lambda_K \circ \mathrm{res}^H_K(x)],\ x \in X(H)\end{aligned}$$

を満たすものとして定義される．

X の部分制限関手 $\mathcal{K}^X = (\mathcal{K}^X, \mathrm{con}, \mathrm{res})$ を

$$\mathcal{K}^X(H) = \bigcap_{K<H}\{x \in X(H) \mid \mathrm{res}^H_K(x) = 0\},\ H \leq G$$

により定義する．G の部分群 H が X に関して coprimordial であるとは，$\mathcal{K}^X(H) \neq \{0\}$ を満たすことをいう ([4] 参照)．そのような G の部分群の集合を $\mathcal{C}(X)$ で表す．

命題 3.1 ([4]) X を k 上 G のマッキー関手とし, A を X の制限部分関手とする. $|G|$ が k における単数であるとし, $\lambda : X \to A$ を共役関手の射とする. このとき, 次の 2 条件は同値である:

(1) $\Psi^{X,A,\lambda}$ は X に関する A からの標準誘導公式である;

(2) 任意の $H \in \mathcal{C}(X)$, $x \in X(H)$ に対して

$$\frac{1}{|H|}\sum_{K \le H} |K|\mu(K,H)\mathrm{ind}_K^H \circ \mathrm{res}_K^H(\lambda_H(x) - x) = 0.$$

次に, X を k 上 $\mathrm{Stab}(G;S)$ のマッキー束とする. G の部分群 H が X に関して coprimordial であるとは, ある $s \in C_S(H)$ に対して $\mathcal{K}^{X_s}(H) \neq \{0\}$ であることをいう. X に関して coprimordial である G の部分群の集合を $\mathcal{C}(X)$ で表す. $\mathcal{K}^{X_s}$, $s \in S$ で構成される k 上 $\mathrm{Stab}(G;S)$ の制限束を $\mathcal{K}^X$ で表す.

命題 3.2 ([16]) X を k 上 $\mathrm{Stab}(G;S)$ のマッキー束とする. $|G|$ が k における単数であるとき, 任意の $H \le G$ に対して, $\mathcal{K}^{X_S}(H) = (\mathcal{K}^X)_S(H)$ が成り立つ. 特に, $\mathcal{C}(X_S) = \mathcal{C}(X)$ である.

4 ＋ 構成の基本定理

A を k 上 G の制限関手とする. A の安定 k 基底とは, $A(H)$ の k 基底の族 $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}(H)\}_{H \le G}$ で, $\mathcal{B}({}^gH) = \{\mathrm{con}_H^g(\sigma) \mid \sigma \in \mathcal{B}(H)\}$, ここで $H \le G$, $g \in G$, を満たすものをいう ([4] 参照). $\mathcal{B}$ を A の安定 k 基底とする. $H \le G$ とし,

$$\mathfrak{S}(H,\mathcal{B}) = \{(K,\sigma) \mid K \le H,\ \sigma \in \mathcal{B}(K)\}$$

とおく. このとき, $\mathfrak{S}(H,\mathcal{B})$ の上への H の作用が

$$h.(K,\sigma) = ({}^hK, \mathrm{con}_K^h(\sigma)),\ h \in H,\ (K,\sigma) \in \mathfrak{S}(H,\mathcal{B})$$

により与えられる. $\mathfrak{R}(H,\mathcal{B})$ を $\mathfrak{S}(H,\mathcal{B})$ における H 軌道の完全代表系とする.

補題 4.1 ([4]) A を k 上 G の制限関手とし, $\mathcal{B}$ を A の安定 k 基底とする. 各 $H \le G$ に対して, $\{[K,\sigma] \mid (K,\sigma) \in \mathfrak{R}(H,\mathcal{B})\}$ は $A_+(H)$ の k 基底を成す.

以下, $k = \mathbb{Z}$, A を $\mathbb{Z}$ 上 G の制限関手, $\mathcal{B}$ を A の安定 $\mathbb{Z}$ 基底とする. $H \le G$ とし,

$$\mathcal{G}_A(H) = \coprod_{(K,\sigma)\in\mathfrak{R}(H,\mathcal{B})} \mathbb{Z}$$

とおく. $K \leq H$, $\chi \in A(K)$ に対して, $\langle \chi, \sigma \rangle$, $\sigma \in \mathcal{B}(K)$ を

$$\chi = \sum_{\sigma \in \mathcal{B}(K)} \langle \chi, \sigma \rangle \sigma$$

により定義する. $\mathbb{Z}$ 加群準同型 $\varphi_{A,H} : A_+(H) \to \mathcal{G}_A(H)$ を

$$\varphi_{A,H}([K,\sigma]) = \left(\sum_{hK \in H/K,\, U \leq {}^hK} \langle \mathrm{res}_U^{{}^hK} \circ \mathrm{con}_K^h(\sigma), \tau \rangle \right)_{(U,\tau) \in \mathfrak{R}(H,\mathcal{B})}, \quad (K,\sigma) \in \mathfrak{R}(H,\mathcal{B})$$

により定義し, バーンサイド準同型と呼ぶ. 命題 1.2 より, $\varphi_{A,H}$ は単射である.

$(K,\sigma) \in \mathfrak{R}(H,\mathcal{B})$ に対して, $N_H(K,\sigma)$ を H における (K,σ) の安定化群とし, $W_H(K,\sigma) = N_H(K,\sigma)/K$ とおく.

補題 4.2 ([16]) (K,σ), $(U,\tau) \in \mathfrak{R}(H,\mathcal{B})$ とする. 任意の $Q \leq W_H(U,\tau)$ に対して,

$$\sum_{rU \in Q} \sum_{hK \in H/K,\, \langle r \rangle U \leq {}^hK} \langle \mathrm{res}_U^{{}^hK} \circ \mathrm{con}_K^h(\sigma), \tau \rangle \equiv 0 \pmod{|Q|}$$

が成り立つ.

群 $\mathrm{Obs}_A(H)$ を次のように定義する:

$$\mathrm{Obs}_A(H) = \coprod_{(U,\tau) \in \mathfrak{R}(H,\mathcal{B})} \mathbb{Z}/|W_H(U,\tau)|\mathbb{Z}.$$

$(U,\tau) \in \mathfrak{R}(H,\mathcal{B})$, $(x_{(K,\sigma)})_{(K,\sigma) \in \mathfrak{R}(H,\mathcal{B})} \in \mathcal{G}_A(H)$ に対して, $x_{h.(U,\tau)} = x_{(U,\tau)}$, $h \in H$ と定める. $\mathbb{Z}$ 加群準同型 $\psi_{(U,\tau)} : \mathcal{G}_A(H) \to \mathbb{Z}/|W_H(U,\tau)|\mathbb{Z}$, $(U,\tau) \in \mathfrak{R}(H,\mathcal{B})$, は

$$\psi_{(U,\tau)}\left((x_{(K,\sigma)})_{(K,\sigma) \in \mathfrak{R}(H,\mathcal{B})}\right) \equiv \sum_{\substack{rU \in W_H(U,\tau), \\ \nu \in \mathcal{B}(\langle r \rangle U)}} x_{(\langle r \rangle U, \nu)} \cdot \langle \mathrm{res}_U^{\langle r \rangle U}(\nu), \tau \rangle \pmod{|W_H(U,\tau)|},$$

$$(x_{(K,\sigma)})_{(K,\sigma) \in \mathfrak{R}(H,\mathcal{B})} \in \mathcal{G}_A(H)$$

により定義される. $\mathbb{Z}$ 加群準同型 $\psi_{A,H} : \mathcal{G}_A(H) \to \mathrm{Obs}_A(H)$ を

$$\psi_{A,H}\left((x_{(K,\sigma)})_{(K,\sigma) \in \mathfrak{R}(H,\mathcal{B})}\right) = \left(\psi_{(U,\tau)}\left((x_{(K,\sigma)})_{(K,\sigma) \in \mathfrak{R}(H,\mathcal{B})}\right)\right)_{(U,\tau) \in \mathfrak{R}(H,\mathcal{B})},$$
$$(x_{(K,\sigma)})_{(K,\sigma) \in \mathfrak{R}(H,\mathcal{B})} \in \mathcal{G}_A(H)$$

により定義し, コーシー・フロベニウス準同型と呼ぶ.

次の定理は [20, Proposition 2.9] の一般化である ([7, Proposition 1.3.5], [13, Theorem 4.4], [15, Theorem 4.5], [19, Lemma 2.1] 参照).

定理 4.3 (第 1 基本定理 [16]) 次の $\mathbb{Z}$ 加群の列は完全である.

$$0 \longrightarrow A_+(H) \xrightarrow{\varphi_{A,H}} \mathcal{G}_A(H) \xrightarrow{\psi_{A,H}} \mathrm{Obs}_A(H) \longrightarrow 0$$

$\mathbb{Z}$ 加群準同型 $\xi_{(U,\tau)} : \mathcal{G}_A(H) \to \mathbb{Z}/|W_H(U,\tau)|\mathbb{Z}$, $(U,\tau) \in \mathfrak{R}(H,\mathcal{B})$, は

$$\begin{aligned}&\xi_{(U,\tau)}\left((x_{(K,\sigma)})_{(K,\sigma)\in\mathfrak{R}(H,\mathcal{B})}\right)\\ &\qquad \equiv \sum_{(K,\sigma)\in\mathfrak{S}(H,\mathcal{B})_{\geq(U,\tau)}} \mu(U,K)x_{(K,\sigma)} \cdot \langle \mathrm{res}^K_U(\sigma), \tau\rangle \pmod{|W_H(U,\tau)|},\end{aligned}$$

ここで $\mathfrak{S}(H,\mathcal{B})_{\geq(U,\tau)} = \{(K,\sigma) \in \mathfrak{S}(H,\mathcal{B}) \mid U \leq K,\ \langle \mathrm{res}^K_U(\sigma), \tau\rangle \neq 0\}$, により定義される. $\mathbb{Z}$ 加群準同型 $\xi_{A,H} : \mathcal{G}_A(H) \to \mathrm{Obs}_A(H)$ を

$$\begin{aligned}\xi_{A,H}\left((x_{(K,\sigma)})_{(K,\sigma)\in\mathfrak{R}(H,\mathcal{B})}\right) = \left(\xi_{(U,\tau)}\left((x_{(K,\sigma)})_{(K,\sigma)\in\mathfrak{R}(H,\mathcal{B})}\right)\right)_{(U,\tau)\in\mathfrak{R}(H,\mathcal{B})},\\ (x_{(K,\sigma)})_{(K,\sigma)\in\mathfrak{R}(H,\mathcal{B})} \in \mathcal{G}_A(H)\end{aligned}$$

により定義する.

次の定理は [6, Corollary 4.2] の類似である ([9, Theorem 1.1], [13, Corollary 5.3], [20, Theorem 8.3] 参照).

定理 4.4 (第 2 基本定理) 次の $\mathbb{Z}$ 加群の列は完全である.

$$0 \longrightarrow A_+(H) \xrightarrow{\varphi_{A,H}} \mathcal{G}_A(H) \xrightarrow{\xi_{A,H}} \mathrm{Obs}_A(H) \longrightarrow 0$$

5 整数係数標準誘導公式

X を $\mathbb{Z}$ 上 G のマッキー関手とし, A を X の制限部分関手とする. X を $\mathbb{Q}$ 上のマッキー関手に線形に拡張し, A を $\mathbb{Q}$ 上の制限関手に線形に拡張する.

$\lambda : X \to A$ を共役関手の射とし, $\mathcal{B}$ を A の安定 $\mathbb{Z}$ 基底とする. 制限関手の射 $\Psi^{X,A,\lambda} : \mathbb{Q}X \to \mathbb{Q}A_+$ が $\mathbb{Q}$ 線形写像の族 $\Psi^{X,A,\lambda}_H : \mathbb{Q}X(H) \to \mathbb{Q}A_+(H)$, $H \leq G$ で,

$$\Psi^{X,A,\lambda}_H(x) = \frac{1}{|H|}\eta^A_H((\lambda_K \circ \mathrm{res}^H_K(x))_{K\leq H}),\ x \in X(H) \tag{I}$$

を満たすものとして定義される. 任意の $H \leq G$ に対して,

$$\Psi^{X,A,\lambda}_H(x) = \sum_{(U,\tau)\in\mathfrak{R}(H,\mathcal{B})} m_\tau(x)[U,\tau],\ x \in X(H),$$

ここで

$$m_\tau(x) = \frac{1}{|W_H(U,\tau)|}\sum_{(K,\sigma)\in\mathfrak{S}(H,\mathcal{B})_{\geq(U,\tau)}} \mu(U,K)\langle \lambda_K \circ \mathrm{res}^H_K(x), \sigma\rangle \cdot \langle \mathrm{res}^K_U(\sigma), \tau\rangle,$$

が成り立つ. $\Psi_H^{X,A,\lambda}(x) \in A_+(H)$, ここで $H \leq G$, $x \in X(H)$, ならば, $\Psi^{X,A,\lambda}$ を $\mathbb{Z}$ 加群準同型の族 $\Psi_H^{X,A,\lambda} : X(H) \to A_+(H)$, $H \leq G$ で, (I) を満たすものとして定義される制限関手の射 $\Psi^{X,A,\lambda} : X \to A_+$ とみなす.

定理 4.3 は次の定理の証明に応用される.

定理 5.1 ([4]) X を $\mathbb{Z}$ 上 G のマッキー関手とし, A を X の制限部分関手とする. $\lambda : X \to A$ を共役関手の射とし, $\mathcal{B}$ を A の安定 $\mathbb{Z}$ 基底とする. さらに, 条件

$$\langle \lambda_U \circ \mathrm{res}_U^H(x), \tau \rangle = \sum_{\sigma \in \mathcal{B}(K)} \langle \lambda_K \circ \mathrm{res}_K^H(x), \sigma \rangle \cdot \langle \mathrm{res}_U^K(\sigma), \tau \rangle, \ x \in X(H) \qquad \text{(II)}$$

が, K/U は巡回群であり, $r \in K$ ならば $\mathrm{con}_U^r(\tau) = \tau$ となっているような, 任意の $U \trianglelefteq K \leq H \leq G$, $\tau \in \mathcal{B}(U)$ について満たされているとする. このとき, 任意の $H \leq G$ に対して,

$$\sum_{(U,\tau) \in \mathfrak{R}(H,\mathcal{B})} m_\tau(x)[U, \tau] \in A_+(H), \ x \in X(H)$$

が成り立つ.

系 5.2 ([4]) 定理 5.1 の仮定のもとで, 任意の $H \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}X)$ に対して,

$$\frac{1}{|H|} \sum_{K \leq H} |K| \mu(K, H) \mathrm{ind}_K^H \circ \mathrm{res}_K^H(\lambda_H(x) - x) = 0, \ x \in X(H)$$

が成り立つとする. このとき, $\Psi^{X,A,\lambda}$ は X に関する A からの標準誘導公式である.

以下, この節では次を仮定する.

(i) S は G モノイド.

(ii) X は $\mathbb{Z}$ 上 $\mathrm{Stab}(G; S)$ のマッキー束.

(iii) A は $\mathbb{Z}$ 上 $\mathrm{Stab}(G; S)$ の制限束で, 各 $s \in S$ に対して, A_s は X_s の制限部分関手であり, 斜共役写像 $\mathrm{con}_{s\,H}^{\,g}$, ここで $H \leq G_s$, $g \in G$, は X の斜共役写像 $\mathrm{con}_{s\,H}^{\,g}$ の制限である.

(iv) $\lambda_s : X_s \to A_s$, $s \in S$, は共役関手の射であり, 次を満たす:

$$\mathrm{con}_{s\,H}^{\,g} \circ \lambda_{s\,H} = \lambda_{{}^gs\,{}^gH} \circ \mathrm{con}_{s\,H}^{\,g}, \ s \in S, \ H \leq G_s, \ g \in G.$$

(v) 各 $s \in S$ に対して, $\mathcal{B}_s$ は安定 $\mathbb{Z}$ 基底であり, 次を満たす:

$$\mathcal{B}_{{}^gs}({}^gH) = \{\mathrm{con}_{s\,H}^{\,g}(\sigma_s) \mid \sigma_s \in \mathcal{B}_s(H)\}, \ H \leq G_s, \ g \in G.$$

仮定から, 斜制限関手 A_S は斜マッキー関手 X_S の制限部分関手である. 共役関手の射 $\lambda_S : X_S \to A_S$ を $\mathbb{Z}$ 加群準同型の族 $\lambda_{S\,H} : X_S(H) \to A_S(H)$, $H \leq G$ で,

$$\lambda_{S\,H}((x(s))_{s\in S}) = (y_H(s))_{s\in S},\ (x(s))_{s\in S} \in X_S(H),$$

ここで, $s \in C_S(H)$ の場合 $y_H(s) = \lambda_{s\,H}(x(s))$, その他の場合 $y_H(s) = 0$, を満たすものとして定義する. A_S の安定 $\mathbb{Z}$ 基底 $\mathcal{B}_S$ を $A_S(H)$ の $\mathbb{Z}$ 基底の族 $\mathcal{B}_S(H)$, $H \leq G$ で,

$$\mathcal{B}_S(H) = \{(\delta_{st}\sigma_s)_{t\in S} \in A_S(H) \mid s \in C_S(H),\ \sigma_s \in \mathcal{B}_s(H)\}$$

を満たすものとして定義する.

命題 5.3 **([16])** K/U は巡回群であり, $r \in K$ ならば $\mathrm{con}_{s}{}^{r}_{U}(\tau_s) = \tau_s$ となっているような, 任意の $U \trianglelefteq K \leq H \leq G$, $s \in C_S(H)$, $\tau_s \in \mathcal{B}_s(U)$ について, 条件

$$\langle \lambda_{s\,U} \circ \mathrm{res}^H_U(x), \tau_s \rangle = \sum_{\sigma_s \in \mathcal{B}_s(K)} \langle \lambda_{s\,K} \circ \mathrm{res}^H_K(x), \sigma_s \rangle \cdot \langle \mathrm{res}^K_U(\sigma_s), \tau_s \rangle,\ x \in X_s(H)$$

が満たされているとする. 任意の $H \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}X)$, $s \in C_S(H)$ に対して,

$$\frac{1}{|H|} \sum_{K \leq H} |K|\mu(K,H)\mathrm{ind}^H_K \circ \mathrm{res}^H_K(\lambda_{s\,H}(x) - x) = 0,\ x \in X_s(H)$$

が成り立つならば, $\Psi^{X_S, A_S, \lambda_S}$ は X_S に関する A_S からの標準誘導公式であり, 任意の $H \leq G$ に対して,

$$\Psi^{X_S,A_S,\lambda_S}_H((x(s))_{s\in S}) = \sum_{(U,\tau)\in \mathfrak{R}(H,\mathcal{B}_S)} m_\tau((x(s))_{s\in S})[U,\tau],\ (x(s))_{s\in S} \in X_S(H),$$

ここで

$$m_\tau((x(s))_{s\in S}) = \frac{1}{|W_H(U,\tau)|} \sum_{(K,\sigma)\in \mathfrak{S}(H,\mathcal{B}_S)_{\geq (U,\tau)}} \mu(U,K)$$
$$\times \langle \lambda_{S\,K} \circ \mathrm{res}_{S}{}^{H}_{K}((x(s))_{s\in S}), \sigma \rangle \cdot \langle \mathrm{res}_{S}{}^{K}_{U}(\sigma), \tau \rangle,$$

が成り立つ.

6 捻れ群環の表現における誘導定理

以後, 単に加群というときには, 左加群を意味する. $\alpha : G \times G \to \mathbb{C}^\times$ は標準化された 2 コサイクル, すなわち,

$$\alpha(rs,t)\alpha(r,s) = \alpha(r,st)\alpha(s,t),\ r,\ s,\ t \in G$$

であり, s または t が単位元である限り, $\alpha(s,t)=1$ であるとする. 各 $H\le G$ に対して, $\mathbb{C}^{\alpha}H$ により, 基底が $\{\bar{s}\}_{s\in H}$ で与えられ, 積が $\bar{s}\,\bar{t}=\alpha(s,t)\overline{st}$, s, $t\in H$ で与えられる $\mathbb{C}$ 代数を表し, それを捻れ群環と呼ぶ. $\mathbb{C}$ の標数が $|G|$ を割らなければ, $\mathbb{C}^{\alpha}H$, $H\le G$, は半単純環である ([10] 参照).

$R_\alpha(H)$, $H\le G$, を有限生成 $\mathbb{C}^{\alpha}H$ 加群の同型類の $\mathbb{Z}$ 線形結合からなり, 直和を加法とする加法群とする. $R_\alpha=(R_\alpha,\mathrm{con},\mathrm{res},\mathrm{ind})$ により, 通常の共役, 制限, 誘導写像をもつマッキー関手を表す ([2] 参照). これを $\mathbb{C}^{\alpha}G$ 表現関手と呼ぶ.

補題 6.1 ([16]) *$U\trianglelefteq K\le G$ とし, K/U は巡回群であると仮定する. N を 1 次元 $\mathbb{C}^{\alpha}U$ 加群 とし, $r\in K$ ならば N は $\mathrm{con}_U^r(N)$ と同型であるとする. M が既約 $\mathbb{C}^{\alpha}K$ 加群であり, N が $\mathrm{res}_U^K(M)$ の組成因子ならば, N は $\mathrm{res}_U^K(M)$ と同型である.*

各 $H\le G$ に対して, $\mathrm{Irr}_\alpha(H)$ を既約 $\mathbb{C}^{\alpha}H$ 加群の同型類全体の集合とし, $\mathrm{Lin}_\alpha(H)$ を 1 次元 $\mathbb{C}^{\alpha}H$ 加群の同型類全体の集合とする. R_α^{ab} により $\mathbb{C}^{\alpha}G$ 表現関手 R_α の制限部分関手で, $R_\alpha^{\mathrm{ab}}(H)$, $H\le G$, が $\mathbb{Z}$ 上 $\mathrm{Lin}_\alpha(H)$ で張られるものを表し, 共役関手の射 $\lambda^\alpha : R_\alpha\to R_\alpha^{\mathrm{ab}}$ を $\mathbb{Z}$ 加群準同型の族 $\lambda_H^\alpha : R_\alpha(H)\to R_\alpha^{\mathrm{ab}}(H)$, $H\le G$ で

$$\lambda_H^\alpha(\chi)=\begin{cases}\chi, & \chi\in\mathrm{Lin}_\alpha(H)\ \text{の場合},\\ 0, & \chi\in\mathrm{Irr}_\alpha(H)-\mathrm{Lin}_\alpha(H)\ \text{の場合}\end{cases}$$

を満たすものとして定義する. R_α^{ab} の安定 $\mathbb{Z}$ 基底 $\mathcal{B}^\alpha$ を $\mathcal{B}^\alpha(H)=\mathrm{Lin}_\alpha(H)$, $H\le G$ により定義する. 補題 6.1 より, 定理 5.1 における条件 (II) が $X=R_\alpha$, $A=R_\alpha^{\mathrm{ab}}$, $\lambda=\lambda^\alpha$, $\mathcal{B}=\mathcal{B}^\alpha$ に対して成り立つ. また, $\mathcal{C}(\mathbb{Q}R_\alpha)$ は G の巡回部分群の集合であり ([16]), 任意の $H\in\mathcal{C}(\mathbb{Q}R_\alpha)$ に対して, $R_\alpha^{\mathrm{ab}}(H)=R_\alpha(H)$ と $\lambda_H^\alpha=\mathrm{id}_{R_\alpha(H)}$ が成り立つ. これより, 系 5.2 から, $\Psi^{R_\alpha,R_\alpha^{\mathrm{ab}},\lambda^\alpha}$ は R_α に関する R_α^{ab} からの標準誘導公式であり, 任意の $H\le G$ に対して,

$$\Psi_H^{R_\alpha,R_\alpha^{\mathrm{ab}},\lambda^\alpha}(\chi)=\sum_{(U,\tau)\in\mathfrak{R}(H,\mathcal{B}^\alpha)} m_\tau^\alpha(\chi)[U,\tau],\ \chi\in R_\alpha(H),$$

ここで

$$m_\tau^\alpha(\chi)=\frac{1}{|W_H(U,\tau)|}\sum_{(K,\sigma)\in\mathfrak{S}(H,\mathcal{B}^\alpha)_{\ge(U,\tau)}}\mu(U,K)\langle\lambda_K^\alpha\circ\mathrm{res}_K^H(\chi),\sigma\rangle,$$

が成り立つ. 特に, 次の結果を得る.

命題 6.2 ([3, 16]) 上記の記号の元で, 次が成り立つ:

$$\chi=\sum_{(U,\tau)\in\mathfrak{R}(G,\mathcal{B}^\alpha)} m_\tau^\alpha(\chi)\mathrm{ind}_U^G(\tau),\ \chi\in R_\alpha(G).$$

7 有限群の twisted quantum double の表現における誘導定理

$(\mathbb{C}G)^*$ を群環 $\mathbb{C}G$ から $\mathbb{C}$ への $\mathbb{C}$ 線形写像全体とする. 任意の $f_1, f_2 \in (\mathbb{C}G)^*$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ に対して, $(c_1f_1+c_2f_2)(g) = c_1f_1(g)+c_2f_2(g)$, $(f_1f_2)(g) = f_1(g)f_2(g)$ と定め, $(\mathbb{C}G)^*$ を $\mathbb{C}$ 代数と考える. 各 $s \in G$ に対して, $\phi_s \in (\mathbb{C}G)^*$ を, $s \neq g \in G$ の場合に $\phi_s(g) = 0$, $\phi_s(s) = 1$ と定める. このとき, $\{\phi_s \mid s \in G\}$ は $(\mathbb{C}G)^*$ の $\mathbb{C}$ 基底を成す.

$\omega : G \times G \times G \to \mathbb{C}^\times$ は標準化された 3 コサイクル, すなわち,

$$\omega(g,r,s)\omega(g,rs,t)\omega(r,s,t) = \omega(gr,s,t)\omega(g,r,st), \ g,\ r,\ s,\ t \in G$$

であり, g, r あるいは s が単位元である限り $\omega(g,r,s) = 1$ であるとする. ω に関する G の twisted quantum double $D^\omega(G)$ はベクトル空間 $(\mathbb{C}G)^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}G$ において

$$\begin{array}{ll} \text{積} & (\phi_s \otimes g)(\phi_t \otimes r) = \theta_s(g,r)\phi_s\phi_{{}^g t} \otimes gr, \\ \text{余積写像} & \Delta(\phi_r \otimes g) = \displaystyle\sum_{s,\, t \in G,\, st=r} \gamma_g(s,t)(\phi_s \otimes g) \otimes (\phi_t \otimes g), \end{array}$$

ここで

$$\theta_s(g,r) = \frac{\omega(s,g,r)\omega(g,r,{}^{(gr)^{-1}}s)}{\omega(g,{}^{g^{-1}}s,r)}, \ \gamma_s(g,r) = \frac{\omega(g,r,s)\omega(s,{}^{s^{-1}}g,{}^{s^{-1}}r)}{\omega(g,s,{}^{s^{-1}}r)},$$

を与えて定義される準三角準ホップ代数である ([8, 11, 12, 17] 参照).

各 $H \leq G$ に対して, $D^\omega(G)$ の部分代数 $D^\omega_G(H)$ を

$$D^\omega_G(H) = \sum_{s \in G,\, h \in H} \mathbb{C}\phi_s \otimes h$$

により定義する. 各 $h \in H$ は $\sum_{s\in G} \phi_s \otimes h \in D^\omega_G(H)$ と同一視され, $(\mathbb{C}G)^*$ は $D^\omega_G(H)$ の部分代数 $(\mathbb{C}G)^* \otimes \epsilon$, ここで ϵ は G の単位元, と同一視される.

$RD^\omega_G(H)$, $H \leq G$, を有限生成 $D^\omega_G(H)$ 加群の同型類の $\mathbb{Z}$ 線形結合からなり, 直和を加法とする加法群とする. $RD^\omega_G = (RD^\omega_G, \mathrm{Dcon}, \mathrm{Dres}, \mathrm{Dind})$ により, 通常の共役, 制限, 誘導写像をもつマッキー関手を表す ([2] 参照). これを $D^\omega(G)$ 表現関手と呼ぶ.

$H \leq G$, $s \in G$ とする. g, r, $t \in H_s$ ならば

$$\theta_s(g,r) = \gamma_s(g,r) = \frac{\omega(s,g,r)\omega(g,r,s)}{\omega(g,s,r)}, \ \theta_s(tg,r)\theta_s(t,g) = \theta_s(t,gr)\theta_s(g,r)$$

が成り立つ. このように

$$\theta_s : H_s \times H_s \to \mathbb{C}^\times, \quad (g,r) \mapsto \theta_s(g,r)$$

は標準化された 2 コサイクルである.

G^c を G が共役 ${}^r s$, ここで $r, s \in G$, により作用する G モノイド G とし, $\overline{H\backslash G^c}$ を G^c における H 軌道の完全代表系とする.

各 $s \in G^c$ に対して, $D^\omega_G(H)$ の両側イデアル $D^\omega_s(H)$ を

$$D^\omega_s(H) = \sum_{rH_s \in H/H_s} \sum_{h\in H} \mathbb{C}\phi_{{}^r s} \otimes h$$

により定義する. $D^\omega_G(H)$ は $D^\omega_s(H)$, $s \in \overline{H\backslash G^c}$ の直和で表され, 任意の $D^\omega_G(H)$ 加群 M は部分加群 $D^\omega_s(H)M$, $s \in \overline{H\backslash G^c}$ の直和で表される. 任意の $D^\omega_s(H)$ 加群, $s \in G^c$, は $D^\omega_G(H)$ 加群とみなされる.

$s \in G^c$ とし, $D^\omega_s(H)$ の左イデアル $E^\omega_s(H)$ を

$$E^\omega_s(H) = \sum_{h\in H} \mathbb{C}\phi_{{}^h s} \otimes h$$

により定義する. 捻れ群環 $\mathbb{C}^{\theta_s}H_s$ を $E^\omega_s(H)$ の部分空間とみなし, $\overline{h} \in \mathbb{C}^{\theta_s}H_s$, $h \in H_s$ を $\phi_s \otimes h \in E^\omega_s(H)$ と同一視する. このとき, $E^\omega_s(H)$ は右 $\mathbb{C}^{\theta_s}H_s$ 加群と考えられる. また, $D^\omega_G(H)$ 加群 M に対して, $\phi_s M := \{\phi_s x \mid x \in M\}$ を左 $\mathbb{C}^{\theta_s}H_s$ 加群と考える.

準備として, いくつか補題を述べる.

補題 7.1 ([16]) $H \le G$, $s \in G^c$ に対して $\mathbb{C}^{\theta_s}H_s$ 加群の圏 $\mathbb{C}^{\theta_s}H_s$-**mod** と $D^\omega_s(H)$ 加群の圏 $D^\omega_s(H)$-**mod** の間の圏同値が, 関手

$$\zeta^1_{H,s} : \mathbb{C}^{\theta_s}H_s\text{-}\mathbf{mod} \to D^\omega_s(H)\text{-}\mathbf{mod}, \quad N \mapsto E^\omega_s(H) \otimes_{\mathbb{C}^{\theta_s}H_s} N,$$

$$\zeta^2_{H,s} : D^\omega_s(H)\text{-}\mathbf{mod} \to \mathbb{C}^{\theta_s}H_s\text{-}\mathbf{mod}, \quad M \mapsto \phi_s M$$

により与えられる.

以下, 補題 7.1 における記号を用いる. $s \in G^c$, $g \in G$ とする. $H \le G_s$ のとき, $N \in \mathbb{C}^{\theta_s}H$-**mod** に対して, $\mathrm{con}_s{}^g_H(N) \in \mathbb{C}^{\theta_{{}^g s}}{}^gH$ を

$$\begin{aligned}\mathrm{con}_s{}^g_H(N) &= \zeta^2_{{}^gH,{}^gs} \circ \mathrm{Dcon}^g_H \circ \zeta^1_{H,s}(N) \\ &= (\phi_{{}^gs} \otimes g) \otimes_{D^\omega_G(H)} (E^\omega_s(H) \otimes_{\mathbb{C}^{\theta_s}H} N),\end{aligned}$$

ここで $\mathrm{Dcon}^g_H \circ \zeta^1_{H,s}(N) \in D^\omega_{{}^gs}({}^gH)$-**mod** と考えている, により定義する.

$H \le G$, $M \in D^\omega_G(H)$-**mod** に対して, 写像

$$\begin{aligned}&\phi_{{}^gs}\mathrm{Dcon}^g_H(M)(= (\phi_{{}^gs} \otimes g) \otimes_{D^\omega_G(H)} M) \to \mathrm{con}_s{}^g_{H_s}(\phi_s M), \\ &(\phi_{{}^gs} \otimes g) \otimes x \mapsto (\phi_{{}^gs} \otimes g) \otimes (\phi_s \otimes \phi_s x)\end{aligned}$$

は $\mathbb{C}^{\theta_{{}^gs}}{}^gH_{{}^gs}$ 加群同型である. このことから, 次の補題の (b) が示される.

補題 7.2 ([16]) $H \le G$, $s \in G^c$, $h \in H$ とする.

(a) 任意の $N \in \mathbb{C}^{\theta_s}H_s$-**mod** に対して, 次の $D^\omega_G(H)$ 加群同型がある:

$$\zeta^1_{H,s}(N) \cong \zeta^1_{H,{}^hs} \circ \mathrm{con}_s{}^h_{H_s}(N).$$

(b) 任意の $M \in D^\omega_G(H)$-**mod** に対して, 次の $\mathbb{C}^{\theta_{{}^hs}}H_{{}^hs}$ 加群同型がある:

$$\phi_{{}^hs}M \cong \mathrm{con}_s{}^h_{H_s}(\phi_s M).$$

$s \in G^c$, $H \le G_s$, $N \in \mathbb{C}^{\theta_s}H$-**mod** に対して, $[N]$ は N を含む同型類を表す. $\mathbb{Z}$ 加群準同型 $\mathrm{con}_s{}^g_H : R(\mathbb{C}^{\theta_s}H) \to R(\mathbb{C}^{\theta_{{}^gs}}{}^gH)$, ここで $s \in G^c$, $H \le G_s$, $g \in G$, を

$$\mathrm{con}_s{}^g_H([N]) = [\mathrm{con}_s{}^g_H(N)] = [\zeta^2_{{}^gH,{}^gs} \circ \mathrm{Dcon}^g_H \circ \zeta^1_{H,s}(N)],\ N \in \mathbb{C}^{\theta_s}H\text{-}\mathbf{mod}$$

により定め, 斜共役写像と呼ぶ.

補題 7.3 ([16]) マッキー関手の集まり $R^\theta_s := R_{\theta_s} = (R_{\theta_s}, \mathrm{con}, \mathrm{res}, \mathrm{ind})$, $s \in G^c$ と斜共役写像 $\mathrm{con}_s{}^g_H : R(\mathbb{C}^{\theta_s}H) \to R(\mathbb{C}^{\theta_{{}^gs}}{}^gH)$, ここで $s \in G^c$, $H \le G_s$, $g \in G$, は $\mathbb{Z}$ 上 $\mathrm{Stab}(G; G^c)$ のマッキー束 R^θ を定める.

$H \le G$, $M \in D^\omega_G(H)$-**mod** に対して $[M]$ は M を含む同型類を表す. 補題 7.2 より, 各 $H \le G$ に対して, $\mathbb{Z}$ 加群準同型

$$\Gamma_H : RD^\omega_G(H) \to R^\theta_{G^c}(H), \quad [M] \mapsto ([\phi_s M])_{s\in G^c} = ([\zeta^2_{H,s}(D^\omega_s(H)M)])_{s\in G^c},$$

$$\Gamma'_H : R^\theta_{G^c}(H) \to RD^\omega_G(H), \quad ([N(s)])_{s\in G^c} \mapsto \sum_{s\in\overline{H\backslash G^c}} [\zeta^1_{H,s}(N(s))]$$

が存在する. 補題 7.1 より, $\Gamma_H^{-1} = \Gamma'_H$ である.

定理 7.4 ([16]) マッキー関手 RD^ω_G は $R^\theta_{G^c}$ と同型である. 実際, 上の記号のもとで, $\mathbb{Z}$ 加群同型の族 $\Gamma_H : RD^\omega_G(H) \to R^\theta_{G^c}(H)$, $H \le G$, は $\Gamma_{{}^gH} \circ \mathrm{Dcon}^g_H = \mathrm{con}_{G^c}{}^g_H \circ \Gamma_H$, $\Gamma_K \circ \mathrm{Dres}^H_K = \mathrm{res}_{G^c}{}^H_K \circ \Gamma_H$, $\Gamma_H \circ \mathrm{Dind}^H_K = \mathrm{ind}_{G^c}{}^H_K \circ \Gamma_K$, ここで $K \le H \le G$, $g \in G$, を満たし, マッキー関手の同型 $\Gamma : RD^\omega_G \to R^\theta_{G^c}$ を定める.

各 $H \le G$ に対して, $D^\omega_G(H)$-$\overline{\mathbf{mod}}$ を $D^\omega_G(H)$ 加群の同型類全体の集合として,

$$\mathrm{Irr}(D^\omega_G(H)) = \left\{ [M] \in D^\omega_G(H)\text{-}\overline{\mathbf{mod}} \;\middle|\; \begin{array}{l} [\phi_s M] \in \mathrm{Irr}_{\theta_s}(H_s) \text{ である } s \in \overline{H\backslash G^c} \text{ が} \\ \text{存在し, } s \ne t \in \overline{H\backslash G^c} \text{ ならば } \phi_t M = \{0\}. \end{array} \right\},$$

$$\mathrm{Lin}(D^\omega_G(H)) = \left\{ [N] \in D^\omega_G(H)\text{-}\overline{\mathbf{mod}} \;\middle|\; \begin{array}{l} \dim_{\mathbb{C}}(\phi_s N) = 1 \text{ である } s \in \overline{H\backslash G^c} \text{ が} \\ \text{存在し, } s \ne t \in G^c \text{ ならば } \phi_t N = \{0\}. \end{array} \right\}$$

とおく．定理 7.4 より，$D^\omega_G(H)$, $H \le G$, は半単純代数であり，$\mathrm{Irr}(D^\omega_G(H))$ は既約 $D^\omega_G(H)$ 加群の同型類全体の集合である．$R^{\mathrm{ab}}D^\omega_G$ により RD^ω_G の制限部分関手で，$R^{\mathrm{ab}}D^\omega_G(H)$, $H \le G$, が $\mathbb{Z}$ 上 $\mathrm{Lin}(D^\omega_G(H))$ で張られるものを表す．共役関手の射 $\lambda^\omega_G : RD^\omega_G \to R^{\mathrm{ab}}D^\omega_G$ を $\mathbb{Z}$ 加群準同型の族 $\lambda^\omega_{GH} : RD^\omega_G(H) \to R^{\mathrm{ab}}D^\omega_G(H)$, $H \le G$ で

$$\lambda^\omega_{GH}(\chi) = \begin{cases} \chi, & \chi \in \mathrm{Lin}(D^\omega_G(H)) \text{ の場合}, \\ 0, & \chi \in \mathrm{Irr}(D^\omega_G(H)) - \mathrm{Lin}(D^\omega_G(H)) \text{ の場合} \end{cases}$$

を満たすものとして定義する．$R^{\mathrm{ab}}D^\omega_G$ の安定 $\mathbb{Z}$ 基底 $\mathcal{B}^\omega_G$ を $\mathcal{B}^\omega_G(H) = \mathrm{Lin}(D^\omega_G(H))$, $H \le G$ により定義する．

$H \le G$, $(U,\tau) \in \mathfrak{R}(H, \mathcal{B}^\omega_G)$ に対して，

$$W_H(U,\tau) = \{hU \in N_H(U)/U \mid \mathrm{Dcon}^h_U(\tau) = \tau\}$$

とおく．命題 5.3 と定理 7.4 より，次の定理が得られる．

定理 7.5 ([16]) $\Psi^{RD^\omega_G, R^{\mathrm{ab}}D^\omega_G, \lambda^\omega_G}$ は RD^ω_G に関する $R^{\mathrm{ab}}D^\omega_G$ からの標準誘導公式であり，任意の $H \le G$ に対して，

$$\Psi^{RD^\omega_G, R^{\mathrm{ab}}D^\omega_G, \lambda^\omega_G}(\chi) = \sum_{(U,\tau)\in\mathfrak{R}(G,\mathcal{B}^\omega_G)} m^\omega_\tau(\chi)[U,\tau],\ \chi \in RD^\omega_G(H),$$

ここで

$$m^\omega_\tau(\chi) = \frac{1}{|W_H(U,\tau)|} \sum_{(K,\sigma)\in\mathfrak{S}(H,\mathcal{B}^\omega_G)_{\ge(U,\tau)}} \mu(U,K)\langle \lambda^\omega_{GK} \circ \mathrm{Dres}^H_K(\chi), \sigma\rangle$$

が成り立つ．

Brauer の誘導定理は次の様に一般化される．

系 7.6 ([16]) 定理 7.5 の記号のもとで，M を $D^\omega(G)$ 加群とする．このとき，

$$[M] = \sum_{(U,[N])\in\mathfrak{R}(G,\mathcal{B}^\omega_G)} m^\omega_{[N]}([M])[D^\omega(G) \otimes_{D^\omega_G(U)} N]$$

が成り立つ．

系 7.6 の hyper elementary 版も証明される ([16] 参照)．

参考文献

[1] M. Aigner, Combinatorial theory, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 234, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.

[2] P. R. Boisen, The representation theory of fully group-graded algebras, J. Algebra **151** (1992), 160–179.

[3] R. Boltje, A canonical Brauer induction formula, Astérisque, **181–182** (1990), 31–59.

[4] R. Boltje, A general theory of canonical induction formulae, J. Algebra **206** (1998), 293–343.

[5] S. Bouc, Hochschild constructions for Green functors, Comm. Algebra **31** (2003), 403–436.

[6] O. Coşkun and E. Yalçın, A Tate cohomology sequence for generalized Burnside rings. J. Pure Appl. Algebra **213** (2009), 1306–1315.

[7] T. tom Dieck, Transformation Groups and Representation Theory, Lecture Notes in Mathematics, 766, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[8] R. Dijkgraaf, V. Pasquier, and P. Roche, Quasi Hopf algebras, group cohomology and orbifold models, Nuclear Phys. B (Proc. Suppl.) 18B (1990), 60–72.

[9] R. Hartmann and E. Yalçın, Generalized Burnside rings and group cohomology, J. Algebra **310** (2007), 917–944.

[10] G. Karpilovsky, Projective representations of finite groups, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 94, Marcel Dekker, Inc., New York, 1985.

[11] C. Kassel, Quantum groups, Springer-Verlag, New York, 1995.

[12] G. Mason and Siu-Hung Ng, Group cohomology and gauge equivalence of some twisted quantum doubles. Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 3465–3509.

[13] F. Oda and T. Yoshida, Crossed Burnside rings I. The fundamental theorem, J. Algebra **236** (2001), 29–79.

[14] F. Oda and T. Yoshida, Crossed Burnside rings II: The Dress construction of a Green functor, J. Algebra **282** (2004), 58–82.

[15] Y. Takegahara, Multiple Burnside rings and Brauer induction formulae, J. Algebra **324** (2010), 1656–1686.

[16] Y. Takegahara, On induction formulae for representations of the twisted quantum double of a finite group, submitted.

[17] S. J. Witherspoon, The representation ring of the twisted quantum double of a finite group, Canad. J. Math. **48** (1996), 1324–1338.

[18] T. Yoshida, On G-functors (I): transfer theorems for cohomological G-functors, Hokkaido Math. J. **9** (1980), 222–257.

[19] T. Yoshida, On the unit groups of Burnside rings, J. Math. Soc. Japan **42** (1990), 31–64.

[20] T. Yoshida, The generalized Burnside ring of a finite group, Hokkaido Math. J. **19** (1990), 509–574.