数理解析研究所講究録
第 1811 巻 2012 年 123-129

On a perfect isometry between principal p-blocks of finite groups with cyclic p-hyperfocal subgroups

熊本高等専門学校 堀本博 (Hiroshi HORIMOTO)
Kumamoto National College of Technology
熊本大学大学院自然科学研究科 (理学系) 渡邉アツミ (Atumi WATANABE)
Department of Mathematics, Faculty of Science, Kumamoto University

1 はじめに

$(\mathcal{K}, \mathcal{O}, k)$ を十分大きな p-モジュラー 系とする. G を有限群, $O^p(G)$ を G の p-正則元全体 $G_{p'}$ で生成される G の正規部分群とする. P を G の Sylow p-部分群とし,

$$\tilde{P} = \langle\ [\ T,\ O^p(N_G(T))\ ]\ |\ T \leq P\ \rangle$$

を Puig [11], [12] における p-ブロックの超焦点部分群にならって G の p-超焦点部分群と呼ぶ. $\tilde{P}$ は G の主ブロック $b(G)$ の超焦点部分群に一致する.

$$\tilde{P} = P \cap O^p(G) \quad \text{(Puig [11])}$$

が成り立つ. 以下について講演を行った.

定理 上の記号の下で, $\tilde{P}$ が巡回群ならば, $b(G)$, $b(N_G(\tilde{P}))$ 及び $b(N_G(P))$ は *perfect isometric.*

この定理は Rouquier 予想 ([13], A.2.) から派生する次の予想や, それの検証例が得られている [5] が動機となって研究を行った.

問題 (Rouquier) $\tilde{P}$ が可換ならば, $b(G)$ と $b(N_G(\tilde{P}))$ は *perfect isometric.*

以下において記号や専門用語はほぼ永尾・津島 [8] に従う.

2 準備

この節では主ブロックに限らず一般のブロックについて述べる. 以下に述べる補題や命題 1 を用いて上の**定理**は証明される. b を有限群 G のブロックとする. $R_{\mathcal{K}}(G, b) = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(b)} \mathbf{Z}\chi$ を内積をもつ加法群と見る, 但し $\mathrm{Irr}(b)$ は b に属する通常既約指標の全体を表す.

有限群 G' とそのブロック b' に対して, $I : R_K(G', b') \to R_K(G, b)$ を内積を保つ同型とする. I は次の 2 条件を満たすとき, b' から b へのパーフェクト・アイソメトリー と呼ばれる (Broué [2]).

(1) $G' \times G$ の任意の元 (g', g) に対して, $\displaystyle\sum_{\chi' \in \mathrm{Irr}(b')} \chi'(g')I(\chi')(g)$ は $\mathcal{O}$ において, $|C_{G'}(g')|$ 及び $|C_G(g)|$ で割り切れる.

(2) $\displaystyle\sum_{\chi' \in \mathrm{Irr}(b')} \chi'(g')I(\chi')(g) \neq 0$ ならば g と g' は共に p-正則であるか, 共に p-非正則である.

b' から b へのパーフェクト・アイソメトリーが存在すれば, $l(b') = l(b)$, 但し $l(b)$ は b に属する Brauer 既約指標全体 $\mathrm{IBr}(b)$ の元の個数を表す. また b, b' の Cartan 行列 C_b, $C_{b'}$ は相似である (Broué [2], 定理 1.5).

$$\bigoplus_{\psi \in \mathrm{IBr}(b)} \mathbf{Z}\psi$$

の $\mathbf{Z}$-基底は b の basic set と呼ばれる (Brauer [1]). basic set を一般に $W(b)$ で表す. (π, b_π) を b-Brauer 元 (b の subsection とも呼ばれる) とし, $W(b_\pi)$ を b_π の basic set とする. $\chi \in \mathrm{Irr}(b)$ に対して G の類関数 $\chi^{(\pi, b_\pi)}$ は次の通り定義される: $\chi^{(\pi, b_\pi)}$ は π の p-section の外で 0 の値をとり, $C_G(\pi)_{p'}$ の任意の元 ρ に対して

$$\chi^{(\pi, b_\pi)}(\pi\rho) = \sum_{\varphi_j^{(\pi)} \in W(b_\pi)} d^{\pi}_{\chi\varphi_j^{(\pi)}} \varphi_j^{(\pi)}(\rho)$$

と表される, 但し $d^{\pi}_{\chi\varphi_j^{(\pi)}} \in \mathcal{O}$. $d^{\pi}_{\chi\varphi_j^{(\pi)}}$ を basic set $W(b_\pi)$ に関する一般分解定数と呼ぶ.

$\Pi \subseteq P$ を G の p-元の共役類の完全代表系とする. また η を G-安定な P の一般指標と仮定する, つまり, もし π と π' が G-共役な P の元であるならば $\eta(\pi) = \eta(\pi')$ が成り立つと仮定する. Brauer の一般指標特徴付け定理 ([8], 3.4.2), ブロックに関する第 2, 第 3 主定理より, もし $\chi \in \mathrm{Irr}(b(G))$ ならば

$$\chi * \eta = \sum_{\pi \in \Pi} \eta(\pi)\chi^{(\pi,\ b(C_G(\pi)))}$$

は $b(G)$ に属する一般指標である.

補題 *G, G' を有限群, b, b' をそれぞれのブロックとする. 以下の 5 条件を仮定する.*

(i) $k(b) = k(b')$. $\mathrm{Irr}(b) = \{\chi_i \mid i = 1, 2, \cdots, k(b)\}$, $\mathrm{Irr}(b') = \{\chi'_i \mid i = 1, 2, \cdots, k(b')\}$ とおく,

(ii) b と b は 同じ不足群 P をもつ. (P, b_P), (P, b'_P) をそれぞれ極大 b-*Brauer* 対, 極大 b'-*Brauer* 対とする,

(iii) P の適当な部分集合 Π に対して, $\{(\pi, b_\pi) \in (P, b_P) \mid \pi \in \Pi\}$ は b-*Brauer* 元の G-共役類の完全代表系をなし, $\{(\pi, b'_\pi) \in (P, b'_P) \mid \pi \in \Pi\}$ は b'-*Brauer* 元の G'-共役類の完全代表系をなす,

(iv) $l(b_\pi) = l(b'_\pi)$ $(\forall \pi \in \Pi)$,

(v) π を $\Pi\backslash\{1\}$ の任意の元とする．b_π の適当な *basic set* $W(b_\pi)=\{\varphi_j^{(\pi)}\mid j=1,2,\cdots,l(b_\pi)\}$ と b'_π の適当な *basic set* $W(b'_\pi)=\{{\varphi'_j}^{(\pi)}\mid j=1,2,\cdots,l(b'_\pi)\}$ に対して

$$d^\pi_{\chi_i\varphi_j^{(\pi)}}=\epsilon_i d^\pi_{\chi'_i{\varphi'_j}^{(\pi)}},\ \epsilon_i=\pm1\ (1\le i\le k(b),\ 1\le j\le l(b_\pi)).$$

このとき，

$$\chi'_i\in R_{\mathcal{K}}(G',b')\mapsto\epsilon_i\chi_i\in R_{\mathcal{K}}(G,b)$$

は b' から b へのパーフェクト・アイソメトリーを導く．

命題 1 ([10]) G を有限群, b を (P,b_P) を 極大 *b-Brauer* 対とする G のブロックとする．さらに $\tilde{P}$ を [11] の意味で b の超焦点部分群とする．$\tilde{P}$ が巡回群ならば, *Brauer* 圏 $\mathcal{F}_{(P,b_P)}(G,b)$ と $\mathcal{F}_{(P,b_P)}(N_G(P),{b_P}^{N_G(P)})$ は一致する．特に $b=b(G)$ ならば $N_G(P)$ は G の p-融合を *control* する．

3　$b(G)$ の既約指標

3 節と 4 節で**定理**の証明の概略を述べる．詳細については [6] を参照されたい．$\tilde{G}=O^p(G)$ とおく．仮定から $\tilde{G}$ の Sylow p-部分群は巡回群 $\tilde{P}$ であるから, [3] より $b(\tilde{G})$ については良く分かっている．これを用いて $\mathrm{Irr}(b(G))$ を求める．なお定理を証明するには $\tilde{P}\neq1$ と仮定できる．$b(G)$ の inertial index $|N_G(P)/PC_G(P)|$ を e とし, E を $N_G(P)/O_{p'}(C_G(P))$ の p-補群とする．$e=1$ ならば $\tilde{G}$ が p-冪零, 従って G が p-冪零であるから $e\neq1$ を仮定できる．

3.1. 命題 1 と $\tilde{P}$ が巡回群であることから

$$N_G(\tilde{P})=O_{p'}(C_{\tilde{G}}(\tilde{P}))N_G(P),\ O_{p'}(C_{\tilde{G}}(\tilde{P}))\cap N_G(P)=O_{p'}(C_G(P)),$$

$$\therefore\quad E\cong N_{\tilde{G}}(\tilde{P})/C_{\tilde{G}}(\tilde{P}).$$

特に $b(\tilde{G})$ の inertial index も e である．

3.2. $\tilde{P}$ の定義や Glauberman の補題 ([7], 13.8) を用いて次が示される：$P=\tilde{P}\rtimes C_P(E)$, $G=\tilde{G}\rtimes C_P(E)$．従って

$$P/[\tilde{P},P]\cong(\tilde{P}/[\tilde{P},P])\times C_P(E). \tag{1}$$

$\tilde{\mathcal{M}}$ を $\mathrm{Irr}(\tilde{P})\backslash\{1_{\tilde{P}}\}$ の E-共役類 (3.1. より E-共役類は $N_{\tilde{G}}(\tilde{P})$-共役類に一致する) の完全代表系とする．$\tilde{m}=|\tilde{\mathcal{M}}|$ とおく．$\mu\in\tilde{\mathcal{M}}$ に対して

$$\eta_\mu:=\sum_{a\in E}\mu^a.$$

η_μ は $\tilde{G}$-安定な $\tilde{P}$ の指標である．

3.3. ([3] または [4], §68) $b(\tilde{G})$ の通常既約指標は e 個の非例外指標 $\tilde{\chi}_1 = 1_{\tilde{G}}, \tilde{\chi}_2, \cdots, \tilde{\chi}_e$ と $\tilde{m}$ 個の例外指標 $\tilde{\chi}_\mu$ $(\mu \in \tilde{\mathcal{M}})$ から成り

$$1_{\tilde{G}} * \eta_\mu = (e-1)1_{\tilde{G}} - \sum_{i=2}^{e} \epsilon_i \tilde{\chi}_i + \epsilon \tilde{\chi}_\mu,\ \epsilon_i,\ \epsilon = \pm 1$$

を満たす. なお $\epsilon_1 = 1$ とおく.

$\mu \in \mathcal{M} \cap \mathrm{Irr}_P(\tilde{P})$ とする, 但し $\mathrm{Irr}_P(\tilde{P})$ は P-不変な $\mathrm{Irr}(\tilde{P})$ の元の全体を表す. (1) より μ は $C_P(E) \subseteq \mathrm{Ker}\ \hat{\mu}$ を満たす P の 1 次指標 $\hat{\mu}$ へ一意的に拡張される.

$$\eta_{\hat{\mu}} := \sum_{a \in E} \hat{\mu}^a.$$

命題 1 から $\eta_{\hat{\mu}}$ は G-安定な P の指標である. 次の 3.4. は 3.3. や一般指標の内積の計算から導かれる.

3.4. 任意の $\mu \in \mathcal{M} \cap \mathrm{Irr}_P(\tilde{P})$ に対して

$$1_G * \eta_{\hat{\mu}} = (e-1)1_G - \sum_{i=2}^{e} \epsilon_i \chi_i + \epsilon \chi_\mu, \tag{2}$$

$$\chi_i \downarrow_{\tilde{G}} = \tilde{\chi}_i, \chi_\mu \downarrow_{\tilde{G}} = \tilde{\chi}_\mu$$

を満たす χ_i, $\chi_\mu \in \mathrm{Irr}(b(G))$ が一意的に存在する. χ_μ を $\tilde{\chi}_\mu$ の G への canonical 拡張という. $\chi_1 = 1_G$ とおく. (2) は χ_k $(2 \leq k \leq e)$ についても成り立つ.

$$\epsilon_k(\chi_k * \eta_{\hat{\mu}}) = (e-1)\chi_k - \sum_{i \neq k} \epsilon_i \chi_i + \epsilon \chi_\mu,\ (\forall \mu \in \mathcal{M} \cap \mathrm{Irr}_P(\tilde{P})).$$

$\nu \in \tilde{\mathcal{M}}$ の P における stabilizer を P_ν で表し, $G_\nu = \tilde{G}P_\nu$ とおく. G_ν は $\tilde{\chi}_\nu$ の G のおける stabilizer に一致する. χ_ν を $\tilde{\chi}_\nu$ の G_ν への canonical 拡張とする. $b(G)$ は $b(\tilde{G})$ の cover する唯一のブロックであるから, Clifford の定理と 3.4. より次のことが成り立つ.

命題 2 *$\mathcal{M}(\subseteq \tilde{\mathcal{M}})$ を $\mathrm{Irr}(\tilde{P}) \backslash \{1_{\tilde{P}}\}$ の $N_G(P)$-共役類の完全代表系とする.*

$$\mathrm{Irr}(b(G)) = \Big(\bigcup_{i=1}^{e} \Big\{ \chi_i \lambda_i \mid \lambda_i \in \mathrm{Irr}(G/\tilde{G}) = \mathrm{Irr}(P/\tilde{P}) \Big\} \Big)$$

$$\bigcup \Big(\bigcup_{\nu \in \mathcal{M}} \Big\{ (\chi_\nu \lambda_\nu) \uparrow_{G_\nu}^{G} \mid \lambda_\nu \in \mathrm{Irr}(G_\nu/\tilde{G}) = \mathrm{Irr}(P_\nu/\tilde{P}) \Big\} \Big).$$

3.5. [3] より $l(b(\tilde{G})) = e \leq p-1$ であり, $G/\tilde{G}$ は p-群であるから $l(b(G)) = e$.

4 一般分解定数

P の元 u に対して $b_u = b(C_G(u))$ とおく.

4.1. $C_G(u)$ は Sylow p-部分群 $C_P(u)$ を持つ.

4.2. b_u の inertial index は 1 か e である. 前者の場合 b_u は冪零ブロックである.

$W(b_u)$ を b_u の basic set とし, C^{b_u} を $W(b_u)$ に関するカルタン行列とする.

$$D^{(u,b_u)} = \left(d^u_{\chi\varphi_j^{(u)}}\right)_{\chi\in \mathrm{Irr}(b),\varphi_j^{(u)}\in W(b_u)}$$

とおく. 一般分解定数とカルタン定数の関係から ([9], Lemma 4.5 参照)

$$^t(D^{(u,b_u)})D^{(u^{-1},b_u)} = C^{b_u}. \tag{3}$$

(2) と (3) から, 一般分解定数 $d^u_{\chi\varphi_j^{(u)}}$ を求める問題は 一般分解定数 $d^u_{\chi_i\varphi_j^{(u)}}$ $(1\le i,j\le e)$ を求める問題に帰着され, 従って

$$G = \langle \tilde{G}, u\rangle$$

を仮定することが出来る. 以上から

命題 3 *b_u の inertial index は 1 であると仮定する. b_u の basic set として自明な Brauer 既約指標 $(1_{C_G(u)})\downarrow_{C_G(u)_{p'}}$ を選ぶとき,*

$$D^{(u,b_u)} = \begin{array}{|c|c|}\hline & 1_{C_G(u)} \\ \hline \chi_1\lambda_1 & \epsilon_1\lambda_1(u) \\ \chi_2\lambda_2 & \epsilon_2\lambda_2(u) \\ \vdots & \vdots \\ \chi_e\lambda_e & \epsilon_e\lambda_e(u) \\ (\chi_\nu\lambda_\nu)\uparrow^G_{G_\nu} & \epsilon((\eta_{\hat{\nu}}\lambda_\nu)\uparrow^P_{P_\nu})(u) \\ \hline\end{array}$$

但し

$$\begin{cases} \lambda_i \in \mathrm{Irr}(P/\tilde{P}) = \mathrm{Irr}(G/\tilde{G}), \\ \nu \in \mathcal{M}, \\ \lambda_\nu \in \mathrm{Irr}(P_\nu/\tilde{P}) = \mathrm{Irr}(G_\nu/\tilde{G}). \end{cases}$$

次に b_u の inertial index は e であると仮定する. このとき $u \in C_P(E)$ と仮定できる. 従って一般分解定数 $d^u_{\chi_i\varphi_j^{(u)}}$ を求めるには,

$$G = \langle \tilde{G}, u\rangle = \tilde{G} \rtimes \langle u\rangle,\ P = \tilde{P} \rtimes \langle u\rangle$$

を仮定出来る. このとき $C_G(u)/\langle u\rangle$ の主ブロックは不足群として巡回群 $C_P(u)/\langle u\rangle \cong C_{\tilde{P}}(u)$ を持つ. 従って [2], 定理 1.5 と 5.3 より, b_u のカルタン行列は, 適当な basic set $W(b_u) =$

$\{\varphi_1^{(u)} = (1_{C_G(u)})\downarrow_{C_G(u)_{p'}}, \varphi_2^{(u)}, \cdots, \varphi_e^{(u)}\}$ に関して

$$C^{b_u} = |\langle u\rangle| \begin{pmatrix} m+1 & m & \cdots & m \\ m & m+1 & \cdots & m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m & m & \cdots & m+1 \end{pmatrix}_{e\times e} \tag{4}$$

となる, 但し $m = \frac{|C_{\tilde{P}}(u)|-1}{e}$. (2), (3), (4) から次の命題が得られる.

命題 4 *b_u の inertial index は e であるとする. b_u の適当な basic set* $\{\varphi_1^{(u)} = (1_{C_G(u)})\downarrow_{C_G(u)_{p'}}, \varphi_2^{(u)}, \cdots, \varphi_e^{(u)}\}$ に関して,

$D^{(u,b_u)} =$

	$\varphi_1^{(u)}$	$\varphi_2^{(u)}$	$\cdots$	$\varphi_e^{(u)}$
$\chi_1\lambda_1$	$\epsilon_1\lambda_1(u)$	0	$\cdots$	0
$\chi_2\lambda_2$	0	$\epsilon_2\lambda_2(u)$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\chi_e\lambda_e$	0	0	$\cdots$	$\epsilon_e\lambda_e(u)$
$(\chi_\nu\lambda_\nu)\uparrow_{G_\nu}^{G}$	$\epsilon(\lambda_\nu\uparrow_{P_\nu}^{P})(u)$	$\epsilon(\lambda_\nu\uparrow_{P_\nu}^{P})(u)$	$\cdots$	$\epsilon(\lambda_\nu\uparrow_{P_\nu}^{P})(u)$

但し

$$\begin{cases} \lambda_i \in \mathrm{Irr}(P/\tilde{P}) = \mathrm{Irr}(G/\tilde{G}), \\ \nu \in \mathcal{M}, \\ \lambda_\nu \in \mathrm{Irr}(P_\nu/\tilde{P}) = \mathrm{Irr}(G_\nu/\tilde{G}). \end{cases}$$

命題 1 から $N_G(\tilde{P})$ と $N_G(P)$ はそれぞれ p-超焦点部分群 $\tilde{P}$ を持つから, 補題, 命題 2, 3, 4 より定理は成り立つ.

参考文献

[1] R. Brauer, Some applications of the theory of blocks of characters of finite groups I, J. Algebra, **1**(1964), 152-167.

[2] M. Broué, Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées, *Astérisque*, **181-182**(1990), 61-92.

[3] E. C. Dade, Blocks with cyclic defect groups, Ann. Math. **84**(1966), 20-48.

[4] L. Dornhoff, "Group Representation Theory, Part B", Marcel Dekker, New York, 1972.

[5] M. Holloway, S. Koshitani and N. Kunugi, Blocks with non-abelian defect groups which have cyclic subgroups of index p, Arch. Math. **94**(2010), 101-116.

[6] H. Horimoto and A. Watanabe, On a perfect isometry between principal p-blocks of finite groups with cyclic p-hyperfocal subgroups, preprint.

[7] I.M. Isaacs, "Character Theory of Finite Groups", Academic Press, New York, 1976.

[8] H. Nagao and Y. Tsushima, "Representation Theory of Finite Groups", Academic Press, Boston, 1989.

[9] G. Navarro, " Characters and Blocks of Finite Groups", London Math. Soc., LNS **250**, 1998.

[10] T. Okuyama and A. Watanabe, On the Brauer category of a block with abelian hyperfocal subgroup.

[11] L. Puig, The hyperfocal subalgebra of a block, Invent. math., **141**(2000), 365-397.

[12] L. Puig, "Blocks of Finite Groups", The hyperfocal subalgebra of a block, Springer, Berlin, 2002.

[13] R. Rouquier, Block theory via stable and Rickard equivalences, Modular representation theory of finite groups (Charlottesville, VA, 1998), 101-146, de Gruyter, Berlin, 2001.