数理解析研究所講究録
第 1813 巻 2012 年 16-26

Multiple zeta values related with the zeta-function of the root system of type B_r

岡本卓也 (Takuya Okamoto)
名古屋大学多元数理科学研究科
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

Mordell-Tornheim 多重ゼータ関数とその類似

多重ゼータ関数の正の整数点での値はこれまでに様々な興味により盛んに考察されてきた. Mordell-Tornheim 多重ゼータ関数

$$\zeta_{MT,r}(s_1,\ldots,s_r;s_{r+1})=\sum_{m_1,\ldots,m_r=1}^{\infty}m_1^{-s_1}\cdots m_r^{-s_r}(m_1+\cdots+m_r)^{-s_{r+1}} \qquad (1)$$

は Matsumoto [2] が Mordell [3] や Tornheim [5] などにより考察されていた 2 重級数を一般化することによって導入された. そして, この関数の正の整数点での値も盛んに研究されている. 例えば Tsumura [6] は 正の整数 $k_1,\ldots,k_{r+1}$ に対して $\zeta_{MT,r}(k_1,\ldots,k_r;k_{r+1})$ は

$$r\not\equiv k_1+\cdots+k_{r+1} \mod 2$$

が成り立つとき $r-1$ 重以下の Mordell-Tornheim ゼータ関数の正の整数点の積の $\mathbb{Q}$ 線形結合として書けるということを示した. これを"parity result"と言う. そして, Onodera [4] がこれについての明示公式を与えた.

本稿では新しい多重ゼータ関数を次により定義する. 正の整数 r に対して

$$T_{MT,r}(s_1,\ldots,s_r;s_{r+1})=\sum_{m_1,\ldots,m_r=1}^{\infty}m_1^{-s_1}\cdots m_r^{-s_r}(2m_1+\cdots+m_r)^{-s_{r+1}} \qquad (2)$$

と定義する. ただし, $s_1,\ldots,s_{r+1}$ は複素変数とする. ここで $s_1,\ldots,s_{r+1}$ が正の整数のときは (2) の右辺は絶対収束する. (2) は (1) の部分的な和になっていることに気づくだろう. つまり, (1) の m_1 が偶数のときのみをわたる和が (2) に帰着できる.

本稿ではこの多重ゼータ関数 (2) の正の整数点での値を考察する. 特に $T_{MT,r}$ が上で

述べた"parity result"を持つかについて考える．

まず，結果を述べる前にこのような多重ゼータ関数 (2) を定義し，考察する動機を述べる．これには次の Witten ゼータ関数が大きく関わっている．

Witten ゼータ関数とその多変数化

Witten [7] は $\mathbb{C}$ 上の半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ に対して Witten ゼータ関数を

$$\zeta_W(s;\mathfrak{g}) = \sum \frac{1}{\dim(\rho)^s}, \tag{3}$$

により定義した．ただし，$s \in \mathbb{C}$ で ρ は $\mathfrak{g}$ の有限次元既約表現全体をわたる．Witten ゼータ関数の正の整数点での値はあるモジュライ空間の体積に関係している．この (3) はワイルの次元公式を用いることにより級数の形で明示的に表すことができる．

例.

$$\zeta_W(s;\mathfrak{sl}(2)) = \zeta(s),$$
$$\zeta_W(s;\mathfrak{sl}(3)) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{2^s}{m^s n^s (m+n)^s},$$
$$\zeta_W(s;\mathfrak{so}(5)) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{6^s}{m^s n^s (m+n)^s (m+2n)^s}$$

となる．ただし，$\zeta(s)$ は Riemann ゼータ関数である．

また，Zagier [8] は正の整数 m に対して

$$\zeta_{\mathfrak{g}}(2m) \in \mathbb{Q}\pi^{2nm},$$

となることを示した．ただし，n は $\mathfrak{g}$ の正のルートの個数である．

しかしながら，Witten ゼータ関数は 1 変数であり，関数として考えると自由度が少なく，扱いにくい点もある．そこで，Komori, Matsumoto, Tsumura [1] は次のような (3) の多変数化 (4) を与えた．

$\mathbb{C}$ 上の半単純リー代数 $\mathfrak{g}$ に対して r を $\mathfrak{g}$ の階数, Δ を $\mathfrak{g}$ のすべてのルートの集合, Δ_+ を $\mathfrak{g}$ のすべての正のルートの集合，$\Psi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ を Δ の基本系とする．このとき，(3) の多変数化を

$$\zeta_r(\mathbf{s};\mathfrak{g}) = \sum_{m_1,\ldots,m_r=1}^{\infty} \prod_{\alpha\in\Delta_+} \langle \alpha^\vee, m_1\lambda_1 + \cdots + m_r\lambda_r \rangle^{-s_\alpha} \tag{4}$$

により定義する．ただし，n は $\mathfrak{g}$ の正のルートの個数，$\mathbf{s} = (s_\alpha)_{\alpha\in\Delta_+} \in \mathbb{C}^n$，$a^\vee$ はルー

ト α に付随するコルート，$\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ は $\alpha_i \in \Psi$ と $1 \le i,j \le r$ に対して $\langle \alpha_i^\vee, \lambda_j\rangle = \delta_{ij}$(Kronecker's delta) を満たす基本ウエイトとする．

(3) はワイルの次元公式によって，

$$\zeta_W(s;\mathfrak{g}) = K(\mathfrak{g})^s \zeta_r(s,\ldots,s;\mathfrak{g})$$

を満たす．ただし，

$$K(\mathfrak{g}) = \prod_{\alpha\in\Delta_+} \langle \alpha^\vee, \lambda_1 + \cdots + \lambda_r\rangle$$

とする．よって, (3) は (4) に帰着できる．ここで, さらに Komori, Matsumoto, Tsumura [1] は (4) が $\mathfrak{g}$ が単純なときに帰着できることを示した．よって，以下，$\mathfrak{g}$ は X_r 型の $\mathbb{C}$ 上の単純リー代数とする．ただし，$X = A, B, C, D, E, F, G$ とする．

このとき， Komori, Matsumoto, Tsumura [1] は (4) の級数表示を与え，それを $\zeta_r(\mathbf{s};\mathfrak{g}) = \zeta_r(\mathbf{s};X_r)$ と表した．そして，それを X_r 型のルート系のゼータ関数と名付けた．

例1． A_r 型のとき, つまり，$\mathfrak{g}$ が正の整数 r に対して $\mathfrak{sl}(r+1)$ のときは

$$\zeta_r(\mathbf{s};A_r) = \sum_{m_1,\ldots,m_r=1}^{\infty} \prod_{1\le i<j\le r+1} (m_i + \cdots + m_{j-1})^{-s_{ij}}, \tag{5}$$

である．ただし，$\mathbf{s} = (s_{ij}) \in \mathbb{C}^{r(r+1)/2}$ とする．

例2． B_r 型のとき, つまり $\mathfrak{g}$ が 2 以上の正の整数 r に対して $\mathfrak{so}(2r+1)$ のときは

$$\begin{aligned}\zeta_r(\mathbf{s};B_r) = &\sum_{m_1,\ldots,m_r=1}^{\infty} \prod_{1\le i\le r} (2(m_i + \cdots + m_{r-1}) + m_r)^{-s_i},\\ &\times \prod_{1\le i<j\le r} (m_i + \cdots + m_{j-1})^{-s_{ij}^-}\\ &\times \prod_{1\le i<j\le r} (m_i + \cdots + m_{j-1} + 2(m_j + \cdots + m_{r-1}) + m_r)^{-s_{ij}^+},\end{aligned} \tag{6}$$

である．ただし，$\mathbf{s} = ((s_i),(s_{ij}^-),(s_{ij}^+)) \in \mathbb{C}^{r^2}$ とする．

ここで，(1) と (5) を比べることで

$$\begin{aligned}\zeta_r(\mathbf{s};A_r) &= \sum_{m_1,\ldots,m_r=1}^{\infty} m_1^{-s_{12}} \cdots m_r^{-s_{rr+1}} (m_1 + \cdots + m_r)^{-s_{1r+1}}\\ &= \zeta_{MT,r}(s_{12},\ldots,s_{rr+1};s_{1r+1})\end{aligned}$$

を得る．ただし，$\mathbf{s} = (s_{12}, s_{23}, s_{34}, \ldots, s_{rr+1}, s_{1r+1}, 0, \ldots, 0)$ である．特に，

$$\zeta_2(s_{12},s_{13},s_{23};A_2) = \zeta_{MT,2}(s_{12},s_{23};s_{13})$$

となる．これらのことより，Mordell-Tornheim 多重ゼータ関数は A_r 型のルート系のゼータ関数に含まれる自然な族だと捉えることができ，このような観点から Mordell-Tornheim 多重ゼータ関数の正の整数点での値や関数関係式を考察することは重要だと言える．

そして，次に (2) と (6) を比べることで

$$\begin{aligned}\zeta_r(\mathbf{s};B_r) &= \sum_{m_1,\ldots,m_r=1}^{\infty} m_1^{-s_{r-1r}^-}\cdots m_{r-1}^{-s_{12}^-}m_r^{-s_r}(2m_1+\cdots+m_r)^{-s_{1r-1}^+}\\ &= T_{MT,r}(s_{r-1r}^-,\ldots,s_{12}^-,s_r;s_{1r-1}^+)\end{aligned}$$

を得る．ただし，

$$\mathbf{s}=(s_r,s_{12}^-,s_{23}^-,s_{34}^-,\ldots,s_{r-1r}^-,s_{1r-1}^+,0,\ldots,0)$$

である．また，正の整数 p_1,p_2,p_3,p_4 に対して

$$\begin{aligned}&\zeta_2(p_1,p_2,p_3,p_4;B_2)\\ =&(-1)^{p_3}\Bigg\{\sum_{j=1}^{p_3}\binom{p_3+p_4-j-1}{p_3-j}(-1)^j\zeta_{MT,2}(p_1,p_2+p_3+p_4-j,j)\\ &+\sum_{j=1}^{p_4}\binom{p_3+p_4-j-1}{p_4-j}T_{MT,2}(p_1,p_2+p_3+p_4-j,j)\Bigg\}\end{aligned}$$

であることに注意すると (2) は B_r 型のルート系のゼータ関数に含まれる自然な族だと捉えることができ，この多重ゼータ関数も Mordell-Tornheim 多重ゼータ関数と同様に大切であることが分かる．

以上によって研究の動機もわかったので，ここからは (2) の正の整数点での値について考察していく．もう一度問題を確認すると，

問題.

$$T_{MT,r}\text{ が"parity result"を持つか？}$$

であった．これを考えるために Onodera [4] の方法を応用する．この方法は Milnor の多重三角関数とベールヌーイ多項式の性質を用いるものである．よって，Milnor の多重三角関数とベールヌーイ多項式について復習しておく．

Milnor の多重三角関数とベールヌーイ多項式の性質

r を正の整数とするとき，Milnor の多重三角関数を $x\in(0,1)$ に対して次のように定義

する．

$$S_r(x) = \mathbf{\Gamma}_r(x)^{-1}\mathbf{\Gamma}_r(1-x)^{(-1)^r}.$$

ただし，

$$\mathbf{\Gamma}_r(x) = \exp\Big(\frac{\partial}{\partial s}\zeta(s,x)\mid_{s=1-r}\Big)$$

とする．この Milnor の多重三角関数に関して次のことが知られている．$r \geq 1$ の奇数に対しては，

$$\log S_r(x) = (-1)^{\frac{r+1}{2}}\frac{(r-1)!}{(2\pi)^{r-1}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi m x)}{m^r}, \tag{7}$$

となり，$r \geq 2$ の偶数に対しては，

$$\log S_r(x) = (-1)^{\frac{r}{2}}\frac{(r-1)!}{(2\pi)^{r-1}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi m x)}{m^r}, \tag{8}$$

となり，$r \geq 2$ に対しては $x \downarrow 0$ で極限が存在し，それを $\log S_r(0)$ と表し，

$$\log S_r(0) = \begin{cases} (-1)^{\frac{r+1}{2}}\frac{(r-1)!}{(2\pi)^{r-1}}\zeta(r) & r \geq 3 \text{ で奇数のとき,} \\ 0 & r \geq 2 \text{ で偶数のとき} \end{cases}$$

となる．

次にベルヌーイ多項式の基本的事項を確認しておく．r を負でない整数とするとき，$B_r(x)$ を r 次のベルヌーイ多項式と呼ぶ．ベルヌーイ多項式は $r \geq 1$ の奇数に対しては，

$$B_r(x-[x]) = 2(-1)^{\frac{r+1}{2}}\frac{r!}{(2\pi)^r}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2\pi m x)}{m^r}, \tag{9}$$

となり，$r \geq 2$ の偶数に対しては，

$$B_r(x-[x]) = 2(-1)^{\frac{r}{2}-1}\frac{r!}{(2\pi)^r}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2\pi m x)}{m^r}, \tag{10}$$

となる．

正の整数点での $T_{MT,r}$ の積分表示

これらの性質を用いると次の Theorem 1($T_{MT,r}$ の積分表示) を得る．Theorem 1 を述べる前に以下の記号を準備する．正の整数 p と q に対して，$a_1,\ldots,a_p,b_1,\ldots,b_q$ を正の整数とし，$\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_p)$，$\mathbf{b}=(b_1,\ldots,b_q)$ とおく．このとき，以下の記号を定義する．

$$I_{p,q}(\mathbf{a};\mathbf{b}) = \prod_{m=1}^{p}B_{a_m}(x)\prod_{l=1}^{q}\log S_{b_l}(x)$$

とし，$|\mathbf{a}| = a_1 + \cdots + a_p$ とする．また，集合 $K = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$ $(1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n)$ に対して $\mathbf{x}_K = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ とおく．ここで，記号には柔軟性を持たせるものとする．つまり，$I_{p,q}(\mathbf{a}, a_p; \mathbf{b})$ ($\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_{p-1})$，$\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_q)$) は $I_{p,q}(\mathbf{a}'; \mathbf{b})$ ($\mathbf{a}' = (a_1, \ldots, a_p)$，$\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_q)$) と書いてもよいことにする．

これらの記号の元で $T_{MT,r}$ は次のような積分表示を持つ．

Theorem 1.

正の整数 r に対して，$a_1, \ldots, a_{r+1}$ を正の整数とし，$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_{r+1})$ とおく．$|\mathbf{a}| + r \in 2\mathbb{N} + 1$ のとき，

$$
\begin{aligned}
T_{MT,r}(a_1, \ldots, a_r; a_{r+1}) &= (-1)^{\frac{|\mathbf{a}|+r+3}{2} + a_{r+1}} \frac{(2\pi)^{|\mathbf{a}|-r+1}}{2a_1! \cdots a_{r+1}!} \\
\times \int_0^1 \Bigg\{ & a_1 \log S_{a_1}(2x - [2x]) \\
& \times \sum_{\substack{k=1 \\ k:odd}}^{r-1} \sum_{\substack{K \subset \{2,\ldots,r\} \\ |K|=k}} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \pi^{k-1} I_{k+1,r-k-1}(a_{r+1}, \mathbf{a}_K; \mathbf{a}_{\{2,\ldots,r\} \setminus K}) \\
& + B_{a_1}(2x - [2x]) \\
& \times \sum_{\substack{k=0 \\ k:even}}^{r-1} \sum_{\substack{K \subset \{2,\ldots,r\} \\ |K|=k}} (-1)^{\frac{k}{2}} \pi^{k} I_{k+1,r-k-1}(a_{r+1}, \mathbf{a}_K; \mathbf{a}_{\{2,\ldots,r\} \setminus K}) \Bigg\} dx,
\end{aligned}
$$

となり，$|\mathbf{a}| + r \in 2\mathbb{N}$ のときは

$$
\begin{aligned}
T_{MT,r}(a_1, \ldots, a_r; a_{r+1}) &= (-1)^{\frac{|\mathbf{a}|+r+2}{2} + a_{r+1}} \frac{(2\pi)^{|\mathbf{a}|-r}}{a_1! \cdots a_{r+1}!} \\
\times \int_0^1 \Bigg\{ & a_1 \log S_{a_1}(2x - [2x]) \\
& \times \sum_{\substack{k=0 \\ k:even}}^{r-1} \sum_{\substack{K \subset \{2,\ldots,r\} \\ |K|=k}} (-1)^{\frac{k}{2}} \pi^{k} I_{k+1,r-k-1}(a_{r+1}, \mathbf{a}_K; \mathbf{a}_{\{2,\ldots,r\} \setminus K}) \\
& + B_{a_1}(2x - [2x]) \\
& \times \sum_{\substack{k=1 \\ k:odd}}^{r-1} \sum_{\substack{K \subset \{2,\ldots,r\} \\ |K|=k}} (-1)^{\frac{k+1}{2}} \pi^{k+1} I_{k+1,r-k-1}(a_{r+1}, \mathbf{a}_K; \mathbf{a}_{\{2,\ldots,r\} \setminus K}) \Bigg\} dx
\end{aligned}
$$

となる．

この証明は対数関数 $Li_s(x)$ の積の積分

$$\int_{\frac{1}{2}(t-1)+\epsilon}^{\frac{1}{2}t-\epsilon} Li_{a_1}(e^{4\pi ix})\Big\{\prod_{j=2}^{r} Li_{a_j}(e^{2\pi ix})\Big\} Li_{a_{r+1}}(e^{-2\pi ix})dx \tag{11}$$

を2つの方法で計算する．ただし，t は1または2，$a_1,\ldots,a_{r+1}$ は正の整数，ϵ は小さい正の数とする．1つ目は (7)〜(10) の性質を用いて対数関数を Milnor の多重三角関数とベールヌーイ多項式に書き換えればよい．2つ目の方法は次の補題を用いる．

Lemma 1.

t を $t\in[1,2]$ を満たす整数, r を正の整数，ϵ を小さい正の数とする．

このとき，$x\in[\frac{1}{2}(t-1)+\epsilon, \frac{1}{2}t-\epsilon]$，正の整数 $a_1,\ldots,a_{r+1}$ に対して

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty}\sum_{m_1,\ldots,m_{r+1}=1}^{N}\frac{e^{2\pi ix(2m_1+m_2+\cdots+m_r-m_{r+1})}}{m_1^{a_1}m_2^{a_2}\cdots m_{r+1}^{a_{r+1}}}\\
&=\lim_{M_1\to\infty}\sum_{m_1=1}^{M_1}\frac{e^{4\pi ixm_1}}{m_1^{a_1}}\lim_{M_2\to\infty}\sum_{m_2=1}^{M_2}\frac{e^{2\pi ixm_2}}{m_2^{a_2}}\cdots\lim_{M_r\to\infty}\sum_{m_r=1}^{M_r}\frac{e^{2\pi ixm_r}}{m_r^{a_r}}\\
&\qquad\qquad\times\lim_{M_{r+1}\to\infty}\sum_{m_{r+1}=1}^{M_{r+1}}\frac{e^{-2\pi ixm_{r+1}}}{m_{r+1}^{a_{r+1}}}
\end{aligned}$$

が成り立つ．

Lemma 1 により (11) の被積分関数を書き換えて，

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{m_1,\ldots,m_{r+1}=1}^{N}\frac{e^{2\pi ix(2m_1+m_2+\cdots+m_r-m_{r+1})}}{m_1^{a_1}m_2^{a_2}\cdots m_{r+1}^{a_{r+1}}}$$

の収束についての議論をしっかりすることにより，項別積分を行えば，$T_{MT,r}(a_1,\ldots,a_r;a_{r+1})$ となることがわかる．そして，$T_{MT,r}(a_1,\ldots,a_r;a_{r+1})$ が実数であることに注意して，1つ目の方法で出てきた積分の実数部分と比べれば Theorem 1 を得る．

$T_{MT,r}$ は"parity result"持つか.

そして，Theorem 1 で得た式の右辺を計算することにより，次の Theorem を得る．

Theorem 2.

正の整数 $r\geq 2$ に対して，$a_1,\ldots,a_{r+1}$ を正の整数とし，$\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_{r+1})$ とおき，

$|\mathbf{a}|+r\in 2\mathbb{N}+1$ を仮定する．このとき，もし，$a_2+\cdots+a_r+r-1\in 2\mathbb{N}+1$ ならば

$$
\begin{aligned}
&T_{MT,r}(a_1,\ldots,a_r;a_{r+1})\\
&=\sum_{j=0}^{[(r-2)/2]}\frac{2^{2j+2}-1}{j+1}\sum_{\substack{K\subset\{2,\ldots,r\}\\ |K|=2j+1}}\sum_{l'}\mathcal{B}_{2j+2}(\mathbf{a}_K,a_{r+1};l')(-1)^{|\mathbf{a}_K|+l'+1}\\
&\qquad\times\frac{(2\pi)^{2l'}(a_{r+1}+|\mathbf{a}_K|-2l')!}{a_{r+1}!\prod_{t\in K}a_t!}\\
&\qquad\qquad\qquad\times T_{MT,r-2j-1}(a_1,\mathbf{a}_{\{2,\ldots,r\}\setminus K};a_{r+1}+|\mathbf{a}_K|-2l')\\
&+\frac{1}{2}\sum_{\substack{n,m\geq 0\\ a_1\geq m+n\\ a_{r+1}+m+n:even}}\sum_{l}\mathcal{B}_3(m,n,a_{r+1};l)(-1)^{\frac{a_1-m-n}{2}+a_{r+1}+l+1}\\
&\qquad\times\frac{(a_{r+1}+m+n-2l)!(2\pi)^{a_1-m-n+2l}}{m!n!(a_1-m-n+1)!a_{r+1}!}\\
&\qquad\qquad\qquad\times\zeta_{MT,r-1}(a_2,\ldots,a_r;a_{r+1}+m+n-2l)\\
&+2\sum_{\substack{n,m\geq 0\\ a_1\geq m+n\\ a_{r+1}+m+n:odd}}\sum_{l}\mathcal{B}_3(m,n,a_{r+1};l)(-1)^{\frac{a_1-m-n-1}{2}+a_{r+1}+l}\\
&\qquad\times\frac{(a_{r+1}+m+n-2l)!(2\pi)^{a_1-m-n+2l-1}}{m!n!(a_1-m-n+1)!a_{r+1}!}\\
&\times\Bigg\{\sum_{j=1}^{[\frac{a_{r+1}+m+n}{2}-l]}\{\phi_{MT,1}(a_{r+1}+m+n-2l-(2j-1))\phi_{MT,r-1}(a_2,\ldots,a_r;2j)\\
&\qquad\qquad-\zeta_{MT,1}(a_{r+1}+m+n-2l;-2j-1)\zeta_{MT,r-1}(a_2,\ldots,a_r;2j)\}\\
&\qquad-\phi_{MT,r-1}(a_2,\ldots,a_r;a_{r+1}+m+n-2l+1)\\
&\qquad\qquad\qquad+\zeta_{MT,r-1}(a_2,\ldots,a_r;a_{r+1}+m+n-2l+1)\Bigg\}\\
&+(-1)^{\frac{|\mathbf{a}|+r+1}{2}+a_{r+1}}\frac{(2\pi)^{|\mathbf{a}|-r+1}}{2a_1!\cdots a_{r+1}!}\sum_{j=0}^{[(r-2)/2]}W_{2j+2},
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ただし，l' は $[0,(|\mathbf{a}_K|+a_{r+1})/2)$ のすべての整数，l は $[0,(a_{r+1}+m+n)/2)$ のすべての整数をわたるとする．また，$s_1,\ldots,s_{r+1}\in\mathbb{C}$ に対して $\phi_{MT,r}(s_1,\ldots,s_r;s_{r+1})$ を

$$\phi_{MT,r}(s_1,\ldots,s_r;s_{r+1})=\sum_{m_1,\ldots,m_r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(m_1+\cdots+m_r)}}{m_1^{s_1}\cdots m_r^{s_r}(m_1+\cdots+m_r)^{s_{r+1}}}$$

で定義し，$\mathcal{B}_p(\mathbf{a};l)$ は正の整数 p に対して，$a_1,\ldots,a_p\in\mathbb{N}$ とし，$\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_p)$ とお

くとき，整数 $l\in[0,|\mathbf{a}|/2)$ に対して

$$\mathcal{B}_p(\mathbf{a};l)=\frac{-2}{|\mathbf{a}|-2l}\sum_{\substack{l_1,\dots,l_p\geq 0\\ l_1+\cdots+l_p=2l+1}}\prod_{j=1}^{p}\binom{a_j}{l_j}B_{l_j}$$

と定義する．そして，W_{2j+2} は $A^{-1}BY={}^t(W_2,\dots,W_{2\lfloor(r-2)/2\rfloor+2})$ で定義する．ただし，$0\leq i,j\leq[(r-2)/2]$ に対して $A=\left\{\binom{2j+1}{2i+1}\right\}$，$B=\left\{\binom{2j+2}{2i+1}\right\}$ とし，$Y={}^t(Y_2,\dots,Y_{2[(r-2)/2]+2})$ は

$$Y_{2j+2}=\int_0^1 B_{a_1}(2x-[2x])\times\sum_{\substack{K\subset\{2,\cdots,r\}\\ |K|=2j+2}}(-1)^{j+1}\pi^{2j+2}I_{2j+3,r-2j-3}(a_{r+1},\mathbf{a}_K;\mathbf{a}_{\{2,\cdots,r\}\setminus K})dx$$

で与えられるものとする．

注意． $a_2+\cdots+a_r+r-1\in 2\mathbb{N}$ のときも同様な結果を得ることができる．

ここでは証明の詳細は省き，スケッチのみを与える．まず，1つの Lemma を準備する．

Lemma 2.

p,q を正の整数とし，$\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_p)\in\mathbb{N}_0^p$，$\mathbf{b}=(b_0,\dots,b_{q-1})\in\mathbb{N}^q$ とおく．もし，$|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|+q$ が偶数ならば，

$$\begin{aligned}&\sum_{0\leq l<|\mathbf{a}|/2}\mathcal{B}_p(\mathbf{a};l)\widehat{T}_{MT,q}(\mathbf{b};|\mathbf{a}|-2l)\\
&=\int_0^1\Big\{b_0\log S_{b_0}(2x-[2x])\\
&\qquad\times\sum_{\substack{k=0\\ k:even}}^{q-1}\sum_{\substack{K\subset\{1,\dots,q-1\}\\ |K|=k}}(-1)^{\frac{k}{2}}\pi^k I_{p+k,q-k-1}(\mathbf{a},\mathbf{b}_K;\mathbf{b}_{\{1,\dots,q-1\}\setminus K})\\
&\quad+B_{b_0}(2x-[2x])\\
&\qquad\times\sum_{\substack{k=1\\ k:odd}}^{q-1}\sum_{\substack{K\subset\{1,\dots,q-1\}\\ |K|=k}}(-1)^{\frac{k+1}{2}}\pi^{k+1}I_{p+k,q-k-1}(\mathbf{a},\mathbf{b}_K;\mathbf{b}_{\{1,\dots,q-1\}\setminus K})\Big\}dx,\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし，$|\mathbf{c}|+r$ が偶数であるような $\mathbf{c}=(c_1,\dots,c_{r+1})\in\mathbb{N}^{r+1}$ に対して，

$$\widehat{T}_{MT,r}(c_1,\dots,c_r;c_{r+1})=(-1)^{\frac{|\mathbf{c}|+r+2}{2}+c_{r+1}}\frac{c_1!\cdots c_{r+1}!}{(2\pi)^{|\mathbf{c}|-r}}T_{MT,r}(c_1,\dots,c_r;c_{r+1})$$

とおく．

この証明は [4] の Lemma 3.1 と同様にできる.

Theorem 2 の証明に戻る. 証明としては Lemma 2 を Theorem 1 で得た式の右辺に用いればよい. ただ, これは Mordell-Tornhrim 多重ゼータのとき ([4]) のように上手くはいかない. それは, Lemma 2 を用いることで無駄な部分 (Theorem 2 の等式の右辺の第 4 項) が現れることと Theorem 1 で得た式の右辺で Theorem 2 を用いることができない部分が現れることである. ただ, Lemma 2 を用いることができない部分は個別に計算することができて, その結果が Theorem 2 の等式の右辺の第 2 項と第 3 項である. 以上によって, Theorem 2 を得る.

Theorem 2 の等式を見ると右辺の第 4 項が邪魔であるが, これは r が小さいと Riemann ゼータ関数の正の整数点の積の $\mathbb{Q}$ 線形結合で書けることがわかる. 実際, $r=2$ のときはこの部分は消えてしまう. また, $r=3$ のときは

$$\int_0^1 B_{a_1}(2x-[2x])I_{3,0}(a_2,a_3,a_4)dx$$

を計算すればよいが, これはベルヌーイ多項式の関係式を用いると,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 B_{a_1}(2x-[2x])I_{3,0}(a_2,a_3,a_4)dx\\
=&\sum_{\substack{n,m\geq 0\\ a_1\geq m+n\\ a_1+m+n:even}} \frac{2a_1!}{m!n!(a_1-m-n+1!)}\int_0^{\frac{1}{2}} I_{5,0}(n,m,a_2,a_3,a_4)dx\\
+&\sum_{\substack{n,m\geq 0\\ a_1\geq m+n\\ a_1+m+n:odd}} \frac{2a_1!}{m!n!(a_1-m-n+1!)}\sum_l \mathcal{B}_4(\mathbf{a};l)\int_0^{\frac{1}{2}} I_{2,0}(|\mathbf{a}|-2l,a_4)dx\\
+&\sum_{\substack{n,m\geq 0\\ a_1\geq m+n\\ a_1+m+n:odd}} \frac{2a_1!}{m!n!(a_1-m-n+1!)}\int_0^{\frac{1}{2}} I_{1,0}(a_4)dx\int_0^1 I_{4,0}(n,m,a_2,a_3)dx,
\end{aligned}$$

となり (ただし, $l\in[0,|\mathbf{a}|/2)$), それぞれが Riemann ゼータ関数の正の整数点の積の $\mathbb{Q}$ 線形結合で書けることは [4] の Proposition 2.5 や変数変換などを行えば分かる.

このように, $r<5$ までなら複雑ではなく計算できるが $r\geq 5$ のときは複雑であり, その項の計算は難しい.

よって, Theorem 2 と上で述べたことと $\phi_{MT,1}$, $\zeta_{MT,1}$ がリーマンゼータ関数で書けることに注意をすると $r=2$ のときは"parity result"を持つことが分かるが, $r>2$ となる

と $j,k<r$ に対して $\phi_{MT,j},\zeta_{MT,j}$ が $T_{MT,k}$ のみで書けることが言えていないのでわからない．よって，これや $r\geq 5$ のときの Theorem 2 の等式の右辺の第 4 項がどうのような形をしているのかなどはこれからの課題である．最後にこのような発表の機会を与えて下さりました大野泰生先生に心から感謝申し上げたいと思います．

参考文献

[1] Y. Komori, K. Matsumoto and H. Tsumura, *On Witten multiple zeta−functions associated with semisimple Lie algebras II*, J. Math. Soc. Japan, **62** (2010), no. 2, 355-394.

[2] K. Matsumoto, *On analytic continuation of various multiple zeta-functions*, in: M. A. Bennett et al.(Eds), Number Theory for the Mellennium II, Proc. Millennial Conference on Number Theory, A K Peters, Wellesley, 2002, pp. 417-440.

[3] L. J. Mordell, *On the evaluation of some multiple series*, J. London Math. Soc., **33** (1958), 368-371.

[4] K. Onodera, *Generalized log sine integrals and the Mordell-Tornheim zeta values*, Preprint, submitted.

[5] L. Tornheim, *Harmonic double series*, Amer. J. Math., **72** (1950), 303-314.

[6] H. Tsumura, *On Mordell Tornheim zeta values values*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), 2387-2393.

[7] E. Witten, *On quantum gauge theories in two dimensions*, Commun. Math. Phys. **141** (1991), 153-209

[8] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, In: First European Congr. Math. Vol. II, (eds. A. Joseph *et al.*), Progr. Math., **120**, Birkhäuser, 1994, pp. 497-512.