数理解析研究所講究録
第 1813 巻 2012 年 32-47

調和積で記述される多重ゼータ値の関係式

(株) エディット　川島学

0　序

第1節では, 有限多重和の双対公式について述べます. これはそれ自身興味深いものですし, また第2節で述べるように多重ゼータ値の研究にも応用されます. 第2節では, 標題の「調和積で記述される多重ゼータ値の関係式」について述べます. これは大野関係式や巡回和公式などを含む比較的大きな多重ゼータ値の関係式のクラスを与えます. 大事なアイディアは, 有限多重和のニュートン級数による補間です. このことがどのようにして多重ゼータ値の関係式を生み出すのか, それを説明したいと思います. 第3節では, 第2節で得た関係式のうち独立なものの個数を数え上げます.

本稿では, 自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ は 0 を含むものとします. また, 多重指数とは正の整数の長さ 1 以上の有限列のことであり, $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\ldots,\mu_p)$, $\boldsymbol{\nu}=(\nu_1,\ldots,\nu_q)$ などは常に多重指数を表すものとします.

1　有限多重和の双対公式

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \nabla s_1 & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
s_1 & \rightarrow & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\
\Delta s_1 & \rightarrow & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \cdots & \\
\Delta^2 s_1 & \rightarrow & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \cdots & & \\
\Delta^3 s_1 & \rightarrow & \frac{1}{4} & \cdots & & & \\
 & & \vdots & & & &
\end{array}$$

これは数列 $s_1(n):=1/(n+1)$ $(n\in\mathbb{N})$ の差分を計算したものです. 差分とは, 数列 $a\colon\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ に対して

$$(\Delta a)(n):=a(n)-a(n+1)\quad(n\in\mathbb{N})$$

で定義される新しい数列 Δa のことです．上の表では差分を繰り返しとっているわけです．∇s_1 というのは数列 s_1 の反転のことで，一般に

$$(\nabla a)(n) := (\Delta^n a)(0) \quad (n \in \mathbb{N})$$

と定義されます．さて，上の表には明らかな規則性が見てとれます．すなわち，

$$(\Delta^k s_1)(n) = \binom{n+k}{n}^{-1} \frac{1}{n+k+1},$$

特に

$$\nabla s_1 = s_1$$

です．それでは，$m = 2, 3, 4, \ldots$ に対する

$$s_m(n) := \frac{1}{(n+1)^m} \quad (n \in \mathbb{N})$$

の反転はきれいにかけるでしょうか？なんとも素朴な問いですが，この素朴な問いが我々を多重和の世界に導いてくれます．というのは，面白いことに ∇s_m はきれいにかけて，

$$(\nabla s_m)(n) = \sum_{n=n_1 \geq \cdots \geq n_m \geq 0} \frac{1}{(n_1+1)\cdots(n_m+1)}$$

となるからです．この結果を見ると，もしかしたら，と思います．

$$s_{\mu_1,\ldots,\mu_p}(n) = \sum_{n=n_1 \geq \cdots \geq n_p \geq 0} \frac{1}{(n_1+1)^{\mu_1}\cdots(n_p+1)^{\mu_p}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

の反転は $s_{\nu_1,\ldots,\nu_q}$ とかけるのではないだろうか？このことが正しいのかどうか，簡単な手計算による実験で検証できますが，ここではそれを省いて結果だけを述べることにします．

定理 1 任意の多重指数 $\boldsymbol{\mu}$ に対して，

$$\nabla s_{\boldsymbol{\mu}} = s_{\boldsymbol{\mu}^*}.$$

$\boldsymbol{\mu}^*$ は $\boldsymbol{\mu}$ から定まるある多重指数ですが，その対応の規則については，定義を述べるよりも例を見ていただいた方がわかりやすいと思います．

$$(2,2)^* = (1,2,1), \qquad (1,1,2)^* = (3,1).$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \downarrow & & & \\ \bigcirc & & \bigcirc & & \bigcirc & & \bigcirc \\ & \uparrow & & & & \uparrow & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} & \downarrow & & \downarrow & & & \\ \bigcirc & & \bigcirc & & \bigcirc & & \bigcirc \\ & & & & & \uparrow & \end{array}$$

ところで,

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_m(n) = \zeta(m)$$

ですので,

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_\mu(n)$$

はリーマンゼータ値の一般化であるということができます. これはもちろん本研究集会のテーマであるところの多重ゼータ値ですが, 我々は素朴な数遊びを通じて, 多重ゼータ値に出会うことができたわけです. 第2節と第3節では, この多重ゼータ値に関する一つの公式を導き, 多重ゼータ値の間にはたくさんの $\mathbb{Q}$-線形関係式のあることを示したいと思います. (もちろん, 改めてここで示すまでもなくよく知られた事実ですが.) その際, 定理 1 が重要な役割を果たします. その話に移る前に, 定理 1 の拡張について述べておきたいと思います. 本研究集会の講演者の一人である田中さんは, 次節で導かれる結果を用いて, 「一般導分関係式」という, また別の多重ゼータ値に関する公式を証明されました. 当時, 田中さんは多重 L 値についても「一般導分関係式」を証明したかったらしく, 一連の議論を多重 L 値の場合に一般化しませんか, と共同研究のお誘いを受けました. それにはまず定理 1 を拡張しなければ, ということで得られたのが次の定理です.

定理 2 $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{C}$ とする. 数列

$$c_{x_1,\ldots,x_p}(n) := \sum_{n=n_1 \geq \cdots \geq n_p \geq 0} \frac{x_1^{n_1-n_2} \cdots x_{p-1}^{n_{p-1}-n_p} x_p^{n_p}}{(n_1+1)\cdots(n_{p-1}+1)} \quad (n \in \mathbb{N})$$

に対して,

$$\nabla c_{x_1,\ldots,x_p} = c_{1-x_1,\ldots,1-x_p}.$$

一見したところ, c_x から s_μ が得られるようには思われませんが,

$$c_{\underbrace{0,\ldots,0,1}_{\mu_1},\ldots,\underbrace{0,\ldots,0,1}_{\mu_p},0} = c_{\underbrace{0,\ldots,0,1}_{\mu_1},\ldots,\underbrace{0,\ldots,0,1}_{\mu_{p-1}},\underbrace{0,\ldots,0,1}_{\mu_p}} = s_{\mu} \tag{1}$$

であることに注意すると, 定理2が定理1の拡張であることがわかります.

ここで一旦多重和 s_μ に戻り, 今度は差分について考えてみましょう. 我々は既に, 数列 s_1 の差分が

$$(\Delta^k s_1)(n) = \binom{n+k}{n}^{-1} \frac{1}{n+k+1} \tag{2}$$

とかけることを観察しています. 一般の s_μ の場合はどうでしょうか？例えば, $s_{2,2}$ について考えてみます. $\nabla s_{2,2} = s_{1,2,1}$ ですから, $(\Delta^k s_{2,2})(n)$ は $k=0$ のとき

$$s_{2,2}(n) = \sum_{n=n_1 \geq n_2 \geq 0} \frac{1}{(n_1+1)^2(n_2+1)^2}$$

となり, $n=0$ のとき

$$s_{1,2,1}(k) = \sum_{k=k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq 0} \frac{1}{(k_1+1)(k_2+1)^2(k_3+1)}$$

となります. この情報をもとに $(\Delta^k s_{2,2})(n)$ を類推すると, 試行錯誤はいりますが,

$$\sum_{\substack{n=n_1 \geq n_2 \geq 0 \\ k=k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq 0}} \frac{1}{(n_1+k_1+1)(n_1+k_2+1)(n_2+k_2+1)(n_2+k_3+1)}$$

という式に行き当たります. さらに, (2) をみて二項係数の逆数をかけてやると, それが $(\Delta^k s_{2,2})(n)$ です. すなわち,

$$\begin{aligned}(\Delta^k s_{2,2})(n) &= \binom{n+k}{n}^{-1} \\ &\times \sum_{\substack{n=n_1 \geq n_2 \geq 0 \\ k=k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq 0}} \frac{1}{(n_1+k_1+1)(n_1+k_2+1)(n_2+k_2+1)(n_2+k_3+1)}.\end{aligned}$$

一般の場合も全く同じです. このように, 数列 s_μ の差分がきれいにかけてしまいました. それならば, 数列 $c_{x_1,\ldots,x_p}$ の差分もきれいにかけるに違いありません.

定理 2′ 任意の $x_1,\ldots,x_p\in\mathbb{C}$ に対して,

$$(\Delta^k c_{x_1,\ldots,x_p})(n)=c_{x_1,\ldots,x_p;1-x_1,\ldots,1-x_p}(n,k).$$

ここで,

$$c_{x_1,\ldots,x_p;y_1,\ldots,y_p}(n,k):=\sum_{\substack{n=n_1\geq\cdots\geq n_p\geq 0\\ k=k_1\geq\cdots\geq k_p\geq 0}}P\frac{(x_1^{n_1-n_2}\cdots x_p^{n_p})(y_1^{k_1-k_2}\cdots y_p^{k_p})}{(n_1+k_1+1)\cdots(n_{p-1}+k_{p-1}+1)},$$

$$P=\binom{n+k}{n}^{-1}\binom{n_1-n_2+k_1-k_2}{n_1-n_2}\cdots\binom{n_p+k_p}{n_p}.$$

さて, 多重和 $c_{x_1,\ldots,x_p}$ の差分をとることにより, 我々は新しい多重和 $c_{x_1,\ldots,x_p;y_1,\ldots,y_p}$ に出会いました. この二つはなんだか似ています:

$$c_{x_1,\ldots,x_p}(n)=\sum_{n=n_1\geq\cdots\geq n_p\geq 0}\frac{x_1^{n_1-n_2}\cdots x_p^{n_p}}{(n_1+1)\cdots(n_{p-1}+1)},$$

$$c_{x_1,\ldots,x_p;y_1,\ldots,y_p}(n,k)=\sum_{\substack{n=n_1\geq\cdots\geq n_p\geq 0\\ k=k_1\geq\cdots\geq k_p\geq 0}}P\frac{(x_1^{n_1-n_2}\cdots x_p^{n_p})(y_1^{k_1-k_2}\cdots y_p^{k_p})}{(n_1+k_1+1)\cdots(n_{p-1}+k_{p-1}+1)}.$$

そこで, これらを $r=1,2$ の場合として含む次の和を考えましょう:

$$c_{\boldsymbol{x}_1;\cdots;\boldsymbol{x}_r}(n_1,\ldots,n_r)=\sum_{\substack{n_1=n_{11}\geq\cdots\geq n_{1p}\geq 0\\ \cdots\\ n_r=n_{r1}\geq\cdots\geq n_{rp}\geq 0}}Q \times\frac{(x_{11}^{n_{11}-n_{12}}\cdots x_{1p}^{n_{1p}})\cdots(x_{r1}^{n_{r1}-n_{r2}}\cdots x_{rp}^{n_{rp}})}{(n_{11}+\cdots+n_{r1}+1)\cdots(n_{1p-1}+\cdots+n_{rp-1}+1)},$$

$$Q=\binom{n_1+\cdots+n_r}{n_1,\ \ldots,\ n_r}^{-1}\binom{n_{11}-n_{12}+\cdots+n_{r1}-n_{r2}}{n_{11}-n_{12},\ \ldots,\ n_{r1}-n_{r2}}\cdots\binom{n_{1p}+\cdots+n_{rp}}{n_{1p},\ \ldots,\ n_{rp}}.$$

ここで,

$$\boldsymbol{x}_i=(x_{i1},\ldots,x_{ip})\in\mathbb{C}^p$$

です. $r=1$ のとき, この多重和は双対性をもちました. では, 一般の場合にはどうでしょうか？まずは, 多重数列 $a\colon\mathbb{N}^r\to\mathbb{C}$ の差分と反転を定義しておきましょう.

$$(\Delta_i a)(n_1,\ldots,n_r):=a(n_1,\ldots,n_r)-a(n_1,\ldots,n_i+1,\ldots,n_r),$$
$$(\nabla a)(n_1,\ldots,n_r):=(\Delta_1^{n_1}\cdots\Delta_r^{n_r}a)(0,\ldots,0).$$

(∇a の定義についてですが, Δ_i と Δ_j は可換であることを注意しておきます.) これで $c_{\boldsymbol{x}_1;\cdots;\boldsymbol{x}_r}(n_1,\ldots,n_r)$ の反転について考えることができるようになりました. $\nabla c_{\boldsymbol{x}_1;\cdots;\boldsymbol{x}_r}$ はきれいにかけるでしょうか？それは $c_{\mathbf{1}-\boldsymbol{x}_1;\cdots;\mathbf{1}-\boldsymbol{x}_r}$ ではないでしょうか？ここで $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_p)\in\mathbb{C}^p$ に対して, $\mathbf{1}-\boldsymbol{x}$ は $(1-x_1,\ldots,1-x_p)$ を意味するものとします. 結果は予想通りで, 次の定理が得られます.

定理 3 任意の $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_r\in\mathbb{C}^p$ に対して,

$$\nabla c_{\boldsymbol{x}_1;\cdots;\boldsymbol{x}_r}=c_{\mathbf{1}-\boldsymbol{x}_1;\cdots;\mathbf{1}-\boldsymbol{x}_r}.$$

差分を書き下したことにより, 双対性の思わぬ一般化ができてしまいました. 差分についても, もちろん, 期待通りの結果が成り立ちます.

定理 3′ 任意の $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_r\in\mathbb{C}^p$ に対して,

$$\begin{aligned}&(\Delta_1^{k_1}\cdots\Delta_r^{k_r}c_{\boldsymbol{x}_1;\cdots;\boldsymbol{x}_r})(n_1,\ldots,n_r)\\&\qquad=c_{\boldsymbol{x}_1;\cdots;\boldsymbol{x}_r;\mathbf{1}-\boldsymbol{x}_1;\cdots;\mathbf{1}-\boldsymbol{x}_r}(n_1,\ldots,n_r,k_1,\ldots,k_r).\end{aligned}$$

定理３, 定理３′の証明が知りたい方は [2] を参照して下さい. (式 (1) の部分に間違いがあります. 読まれる方は注意して下さい.) 我々は和 $s_\mu(n)$ の双対公式を拡張して和 $c_{\boldsymbol{x}_1;\cdots;\boldsymbol{x}_r}(n_1,\ldots,n_r)$ の双対公式を得ました. $s_\mu(n)$ の方は次節で述べるように多重ゼータ値の研究と結びついていますが, $c_{\boldsymbol{x}_1;\cdots;\boldsymbol{x}_r}(n_1,\ldots,n_r)$ の方はどうでしょうか？

2 調和積で記述される多重ゼータ値の関係式

$$\begin{array}{llll}
a(0) & a(1) & a(2) & a(3)\ \cdots\\
a(0)-a(1) & a(1)-a(2) & a(2)-a(3)\ \cdots & \\
a(0)-2a(1)+a(2) & a(1)-2a(2)+a(3)\ \cdots & & \\
a(0)-3a(1)+3a(2)-a(3)\ \cdots & & & \\
\vdots & & &
\end{array}$$

この表を見て分かるように, 数列 $a\colon\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ に対して,

$$(\nabla a)(n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}a(k)\quad(n\in\mathbb{N})$$

が成り立ちます. また, 2列目は $\Delta(\nabla a)$, 3列目は $\Delta^2(\nabla a)$, ...となっていますので,

$$\nabla^2 a = a$$

が成り立ちます. よって,

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(\nabla a)(k) = a(n) \tag{3}$$

です. ところで, $z=0$ で $a(0)$, $z=1$ で $a(1)$, ..., $z=n$ で $a(n)$, という値をとる複素数係数 n 次多項式 $P(z)$ はただ一つ存在しますが, (3) を用いるとそれは,

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\nabla a)(k)\binom{z}{k}$$

とかけます. もちろん

$$\binom{z}{k} = \frac{z(z-1)\cdots(z-k+1)}{k!}$$

です. そこで

$$g_a(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\nabla a)(k)\binom{z}{k}$$

という級数を考えてみます. $z=n\in\mathbb{N}$ のとき, この級数は有限和となりますが, その値は (3) より $a(n)$ です. 従って, $g_a(z)$ は数列 a を補間する一つの複素関数を与えるといえそうですが, そもそもこの級数はどういう $z\in\mathbb{C}$ に対して収束するのでしょうか？このことに関して次の事実が知られています: ある $-\infty\leq\xi\leq\infty$ が存在して,

$$\begin{cases}\mathrm{Re}\, z > \xi \text{ ならば } g_a(z) \text{ は収束し,}\\ \mathrm{Re}\, z < \xi \text{ かつ } z\notin\mathbb{N} \text{ ならば } g_a(z) \text{ は発散する.}\end{cases}$$

$z\in\mathbb{N}$ を除いたのは, $g_a(z)$ はそこで有限和となり必ず収束するからです. この事実の証明は, 「ある $z\notin\mathbb{N}$ に対して $g_a(z)$ が収束するならば, それより実部の大きい w に対しても $g_a(w)$ は収束する」を示すことによりなされます. 級数 $g_a(z)$ は $\mathrm{Re}\, z>\xi$ で広義一様収束しますので, この領域において正則関数を定めます.

上に述べた級数はニュートン級数と呼ばれています. 今, 数列 a, b, $c\colon\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ があり,

$$a(n)b(n)+c(n) = 0 \quad (n\in\mathbb{N}) \tag{4}$$

という関係式をみたしているとします．さらに，それぞれの数列を補間した級数 $g_a(z)$, $g_b(z)$, $g_c(z)$ は全て $\mathrm{Re}\, z > \xi$ で収束しているものとします．このとき，

$$g_a(z)g_b(z) + g_c(z) = 0 \quad (\mathrm{Re}\, z > \xi) \tag{5}$$

という (4) と同じ形の関数の間の関係式が期待できます．ここがニュートン級数の面白いところです．もちろん，これは一例であって，数列の間に代数的な関係式があれば，それをニュートン級数で補間した関数の間にも同じ代数的な関係式のあることが期待できるわけです．このようなことが期待できる理由は次の命題にあります．

命題 4 $\xi, \eta \in \mathbb{R}$, $\eta \geq \xi$ とし，$\mathrm{Re}\, z > \xi$ で定義された関数 $f(z)$ が $\mathrm{Re}\, z > \eta$ においてニュートン級数で表されるとする．このとき，十分大きな $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(n) = 0$ ならば，$\mathrm{Re}\, z > \xi$ において $f(z) = 0$ である．

上の例の話に戻ります．ニュートン級数で表される二つの関数の積は必ずしもニュートン級数で表されませんが，もし $g_a(z)g_b(z)$ がニュートン級数で表されるならば，(5) の左辺はニュートン級数で表され，命題 4 によって (5) が成り立つことになります．$g_a(z)g_b(z)$ がニュートン級数で表されないこともあるので，"期待できる" と言ったわけです．

さて，我々は第 1 節の定理 1 を知っています．この定理を知ってしまった以上，数列 s_μ を補間するニュートン級数

$$f_\mu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k s_{\mu^*}(k) \binom{z}{k}$$

を考えないわけにはいきません．まずはこのニュートン級数の収束軸について調べてみます．

命題 5 $a(n) = O(n^\xi)$ $(n \to \infty)$ ならば，級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a(k) \binom{z}{k}$$

は $\mathrm{Re}\, z > \xi$ において収束する．

任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$s_\mu(n) = O(n^{-\mu_1 + \varepsilon}) \quad (n \to \infty)$$

ですので, 級数

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k s_{\mu}(k)\binom{z}{k} \tag{6}$$

は $\mathrm{Re}\, z > -\mu_1$ において収束します. さらに $z = -\mu_1$ で発散しますので, (6) の収束軸は $\mathrm{Re}\, z = -\mu_1$ です. これで $f_{\mu}(z)$ の収束軸が $\mathrm{Re}\, z = -\mu_1^*$ と分かりました. 従って, $\mu_1^* \geq 2$ の場合, 級数 $f_{\mu}(-1)$ は収束します. その値は

$$f_{\mu}(-1) = \sum_{k=0}^{\infty} s_{\mu^*}(k) =: \overline{\zeta}(\mu^*)$$

であり, 多重ゼータ値となっています. もし数列 s_{μ} たちの間に代数的な関係式があれば, 関数 $f_{\mu}(z)$ たちの間の代数的な関係式が期待できます. そこに $z = -1$ を代入できれば, 多重ゼータ値の間の代数的な関係式が得られるでしょう.

数列 s_{μ} たちの間に成り立つ代数的な関係式といえば, 調和積関係式があります. 例えば

$$s_{1,1}(n)s_{1,1}(n) = 2s_{2,1,1}(n) - s_{2,2}(n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

です. 何故こんなことをするのかはすぐに分かると思いますが, この式の両辺に $n+1$ をかけます:

$$(n+1)s_{1,1}(n)s_{1,1}(n) = 2s_{1,1,1}(n) - s_{1,2}(n).$$

さて,

$$(z+1)f_{1,1}(z)f_{1,1}(z) = 2f_{1,1,1}(z) - f_{1,2}(z) \quad (\mathrm{Re}\, z > -2) \tag{7}$$

は成り立つでしょうか？前に述べたように, 左辺の積がニュートン級数で表されればよいわけです. $(z+1)f_{1,1}(z)f_{1,1}(z)$ はニュートン級数で表されるでしょうか？これはそれほど難しくなく証明できますので, 等式 (7) は正しいといえます. ここに $z = -1$ を代入すると,

$$0 = 2\overline{\zeta}(3) - \overline{\zeta}(2,1).$$

ここで

$$(1,1,1)^* = (3), \qquad (1,2)^* = (2,1).$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & \downarrow & & \downarrow & & \qquad & & \downarrow & & & \\
\bigcirc & & \bigcirc & & \bigcirc & \qquad & \bigcirc & & \bigcirc & & \bigcirc \\
 & & & & & & & & & \uparrow &
\end{array}$$

を使いました．一般の場合も全く同じ様にしてできます．まず

$$s_{1,\boldsymbol{\mu}}(n)s_{1,\boldsymbol{\nu}}(n)=s_{2,\boldsymbol{\mu}\overline{*}\boldsymbol{\nu}}(n)\quad(n\in\mathbb{N})$$

から出発し，$(n+1)$ を両辺にかけて，

$$(n+1)s_{1,\boldsymbol{\mu}}(n)s_{1,\boldsymbol{\nu}}(n)=s_{1,\boldsymbol{\mu}\overline{*}\boldsymbol{\nu}}(n). \tag{8}$$

記号 $\overline{*}$ は調和積と呼ばれる積を表し，例えば，

$$\begin{aligned}
(\mu_1)\,\overline{*}\,(\nu_1)&=(\mu_1,\nu_1)+(\nu_1,\mu_1)-(\mu_1+\nu_1),\\
(\mu_1,\mu_2)\,\overline{*}\,(\nu_1)&=(\mu_1,\mu_2,\nu_1)+(\mu_1,\nu_1,\mu_2)+(\nu_1,\mu_1,\mu_2)\\
&\qquad-(\mu_1,\mu_2+\nu_1)-(\mu_1+\nu_1,\mu_2),\\
(\mu_1,\mu_2)\,\overline{*}\,(\nu_1,\nu_2)&=(\mu_1,\mu_2,\nu_1,\nu_2)+(\mu_1,\nu_1,\mu_2,\nu_2)+(\nu_1,\mu_1,\mu_2,\nu_2)\\
&\qquad+(\mu_1,\nu_1,\nu_2,\mu_2)+(\nu_1,\mu_1,\nu_2,\mu_2)+(\nu_1,\nu_2,\mu_1,\mu_2)\\
&\qquad-(\mu_1,\mu_2+\nu_1,\nu_2)-(\mu_1+\nu_1,\mu_2,\nu_2)-(\mu_1+\nu_1,\nu_2,\mu_2)\\
&\qquad-(\mu_1,\nu_1,\mu_2+\nu_2)-(\nu_1,\mu_1,\mu_2+\nu_2)-(\nu_1,\mu_1+\nu_2,\mu_2)\\
&\qquad+(\mu_1+\nu_1,\mu_2+\nu_2)
\end{aligned}$$

などです．式 (8) から

$$(z+1)f_{1,\boldsymbol{\mu}}(z)f_{1,\boldsymbol{\nu}}(z)=f_{1,\boldsymbol{\mu}\overline{*}\boldsymbol{\nu}}(z)\quad(\mathrm{Re}\,z>-2)$$

が得られますので，$z=-1$ を代入して，

$$0=\overline{\zeta}^{+}\left((\boldsymbol{\mu}\,\overline{*}\,\boldsymbol{\nu})^{*}\right).$$

ここで

$$\overline{\zeta}^{+}(\boldsymbol{\mu})=\overline{\zeta}(\mu_1+1,\mu_2,\ldots,\mu_p)$$

です．これで次の定理が得られました．

定理 6 任意の多重指数 $\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}$ に対して，

$$\overline{\zeta}^{+}\left((\boldsymbol{\mu}\,\overline{*}\,\boldsymbol{\nu})^{*}\right)=0.$$

この定理によって，多重ゼータ値の間には整数係数の線形関係式がいくつもあることが分かります．この定理の与える重さ 2, 3, 4 の関係式を全て求めてみましょう．$\overline{\zeta}^{+}(\quad)=0$ の部分は省略して $(\boldsymbol{\mu}\,\overline{*}\,\boldsymbol{\nu})^{*}$ だけ書くと，次のようになります．

<u>重さ 2</u>

$\boldsymbol{\mu}=(1),\ \boldsymbol{\nu}=(1)$: $2(2)-(1,1)$

<u>重さ 3</u>

$\boldsymbol{\mu}=(1),\ \boldsymbol{\nu}=(2)$: $(2,1)+(1,2)-(1,1,1)$

$\boldsymbol{\mu}=(1),\ \boldsymbol{\nu}=(1,1)$: $3(3)-(1,2)-(2,1)$

<u>重さ 4</u>

$\boldsymbol{\mu}=(1),\ \boldsymbol{\nu}=(3)$: $(2,1,1)+(1,1,2)-(1,1,1,1)$

$\boldsymbol{\mu}=(1),\ \boldsymbol{\nu}=(2,1)$: $(2,2)+2(1,3)-(1,1,2)-(1,2,1)$

$\boldsymbol{\mu}=(1),\ \boldsymbol{\nu}=(1,2)$: $(2,2)+2(3,1)-(2,1,1)-(1,2,1)$

$\boldsymbol{\mu}=(1),\ \boldsymbol{\nu}=(1,1,1)$: $4(4)-(1,3)-(2,2)-(3,1)$

$\boldsymbol{\mu}=(2),\ \boldsymbol{\nu}=(2)$: $2(1,2,1)-(1,1,1,1)$

$\boldsymbol{\mu}=(2),\ \boldsymbol{\nu}=(1,1)$: $(1,3)+(2,2)+(3,1)-(1,1,2)-(2,1,1)$

$\boldsymbol{\mu}=(1,1),\ \boldsymbol{\nu}=(1,1)$: $6(4)-2(1,3)-2(2,2)-2(3,1)+(1,2,1)$

我々が見つけた関係式の個数は, 重さ 2 に 1 つ, 重さ 3 に 2 つ, 重さ 4 に $\cdots$ 重さ 4 にはいくつあるでしょうか？一見, 7 つの関係式を得たように思えますが, ある関係式が他の関係式たちの線形結合で書かれているかもしれません. 本質的には何個の関係式を得たのでしょうか？実はこれを計算する方法がありますので, 次節でそれを見てみます.

3 独立な関係式の個数

重さ m の多重指数全部の集合を基底とする $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間 V_m を考えます. 多重指数 $\boldsymbol{\mu}$ の重さとは $\mu_1+\cdots+\mu_p$ のことで, $|\boldsymbol{\mu}|$ と書かれます. さて,

$$W_m := \text{集合}\{\boldsymbol{\mu}\,\bar{*}\,\boldsymbol{\nu} \mid |\boldsymbol{\mu}|+|\boldsymbol{\nu}|=m\}\text{で生成される } V_m \text{ の部分空間}$$

とおくとき, 我々が知りたいのはその反転による像 W_m^* の次元です. 反転 $*\colon V_m \to V_m$ は同型ですので, W_m の次元を求めればよいということになります. 従って, 本節では W_m の次元を求めることを目標とします.

まずは, Lyndon word について説明する必要があります. Lyndon word とは,

$$(\mu_1,\ldots,\mu_p) \prec (\mu_i,\ldots,\mu_p) \quad (2 \le i \le p)$$

をみたす多重指数 μ のことです. ここで, 記号 $\prec$ は辞書式順序を意味します. 辞書式順序なので, 例えば,

$$(1,2) \prec (1,2,3) \prec (1,3) \prec (2,2)$$

などとなります. 重さ 1 から 5 の Lyndon word を全て求めてみましょう. 結果は,

$$\begin{aligned}
&\text{重さ } 1 : (1),\\
&\text{重さ } 2 : (2),\\
&\text{重さ } 3 : (3), (1,2),\\
&\text{重さ } 4 : (4), (1,3), (1,1,2),\\
&\text{重さ } 5 : (5), (1,4), (2,3), (1,1,3), (1,2,2), (1,1,1,2),
\end{aligned}$$

となります.

これで Lyndon word がどういうものだかお分かりになったと思います. しかし, 一体何故こんなものを持ち出してきたのか？そのわけは次の事実にあります.

事実 7 任意の多重指数は調和積 $\overline{*}$ に関する Lyndon word の有理数係数多項式として一意的にかける.

例えば, 重さ 4 までの多重指数については次のようになります.

<u>重さ 1</u>

$$(1) = (1),$$

<u>重さ 2</u>

$$\begin{aligned}
(2) &= (2),\\
(1,1) &= \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{2}(1)\,\overline{*}\,(1),
\end{aligned}$$

<u>重さ 3</u>

$$\begin{aligned}
(3) &= (3),\\
(1,2) &= (1,2),\\
(2,1) &= (3) - (1,2) + (1)\,\overline{*}\,(2)\\
(1,1,1) &= \frac{1}{3}(3) + \frac{1}{2}(1)\,\overline{*}\,(2) + \frac{1}{6}(1)\,\overline{*}\,(1)\,\overline{*}\,(1),
\end{aligned}$$

<u>重さ 4</u>

$$\begin{aligned}
(4) &= (4),\\
(1,3) &= (1,3),\\
(2,2) &= \frac{1}{2}(4) + \frac{1}{2}(2)\,\overline{*}\,(2),\\
(3,1) &= (4) - (1,3) + (1)\,\overline{*}\,(3),\\
(1,1,2) &= (1,1,2),\\
(1,2,1) &= \frac{1}{2}(4) + (1,3) - 2(1,1,2) + \frac{1}{2}(2)\,\overline{*}\,(2) + (1)\,\overline{*}\,(1,2),\\
(2,1,1) &= \frac{1}{2}(4) - (1,3) + (1,1,2) + (1)\,\overline{*}\,(3) - (1)\,\overline{*}\,(1,2) + \frac{1}{2}(1)\,\overline{*}\,(1)\,\overline{*}\,(2),\\
(1,1,1,1) &= \frac{1}{4}(4) + \frac{1}{3}(1)\,\overline{*}\,(3) + \frac{1}{8}(2)\,\overline{*}\,(2) + \frac{1}{4}(1)\,\overline{*}\,(1)\,\overline{*}\,(2) + \frac{1}{24}(1)\,\overline{*}\,(1)\,\overline{*}\,(1)\,\overline{*}\,(1).
\end{aligned}$$

言い換えると, Lyndon word の重さ m の単項式全体が V_m の基底となっているわけです.

$$\begin{aligned}
&V_1 \text{ の基底}: (1),\\
&V_2 \text{ の基底}: (2),\ (1)\,\overline{*}\,(1),\\
&V_3 \text{ の基底}: (3),\ (1,2),\ (1)\,\overline{*}\,(2),\ (1)\,\overline{*}\,(1)\,\overline{*}\,(1),\\
&V_4 \text{ の基底}: (4),\ (1,3),\ (1,1,2),\ (1)\,\overline{*}\,(3),\ (1)\,\overline{*}\,(1,2),\ (2)\,\overline{*}\,(2),\\
&\qquad\qquad (1)\,\overline{*}\,(1)\,\overline{*}\,(2),\ (1)\,\overline{*}\,(1)\,\overline{*}\,(1)\,\overline{*}\,(1),\\
&\quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots
\end{aligned}$$

さて, それでは W_m の基底は何でしょうか？簡単に分かるように, それは Lyndon word の重さ m の単項式のうち, 次数が 2 以上のもので与えられます.

$$\begin{aligned}
&W_2 \text{ の基底}: (1)\,\overline{*}\,(1),\\
&W_3 \text{ の基底}: (1)\,\overline{*}\,(2),\ (1)\,\overline{*}\,(1)\,\overline{*}\,(1),\\
&W_4 \text{ の基底}: (1)\,\overline{*}\,(3),\ (1)\,\overline{*}\,(1,2),\ (2)\,\overline{*}\,(2),\ (1)\,\overline{*}\,(1)\,\overline{*}\,(2),\\
&\qquad\qquad (1)\,\overline{*}\,(1)\,\overline{*}\,(1)\,\overline{*}\,(1),\\
&\quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots
\end{aligned}$$

従って, 重さ m の Lyndon word の個数を L_m とすると,

$$\dim W_m = \dim V_m - L_m = 2^{m-1} - L_m$$

となります. 我々は L_m を求めねばなりません.

L_m を求めるために, 形式的べき級数

$$\sum_{m=0}^{\infty} (\dim V_m) X^m = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} 2^{m-1} X^m = \frac{1-X}{1-2X}$$

を考えましょう. V_0 は定義していませんが, $\dim V_0 = 1$ としておくと, うまくいきます. 事実 7 より,

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + X^k + X^{2k} + X^{3k} + \cdots)^{L_k} = \sum_{m=0}^{\infty} (\dim V_m) X^m$$

です. 左辺の X^m の係数は, Lyndon word の重さ m の単項式の個数となっているので, この等式が成り立つわけです. よって,

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-X^k} \right)^{L_k} = \frac{1-X}{1-2X}.$$

この両辺を対数微分してから, X 倍しましょう. すると,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k L_k X^k}{1-X^k} = -\frac{X}{1-X} + \frac{2X}{1-2X}$$

を得ます. この両辺の X^m の係数を比較することにより,

$$\sum_{d \mid m} d L_d = 2^m - 1 \quad (m \geq 1).$$

メビウスの反転公式を使うと,

$$m L_m = \sum_{d \mid m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) (2^d - 1) = \sum_{d \mid m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) 2^d \quad (m \geq 2)$$

となり, L_m を計算する公式が得られました. ここに, μ はメビウス関数で, その定義は

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & n \text{ が平方因子をもつ} \\ (-1)^{(n \text{ の素因子の数})} & n \text{ が平方因子をもたない} \end{cases}$$

により与えられます. $m = 2, 3, 4, 5$ をこの公式に代入してみましょう.

$$
\begin{aligned}
L_2 &= \frac{1}{2}\left(\mu(2)2^1 + \mu(1)2^2\right) = \frac{1}{2}(-2+4) = 1,\\
L_3 &= \frac{1}{3}\left(\mu(3)2^1 + \mu(1)2^3\right) = \frac{1}{3}(-2+8) = 2,\\
L_4 &= \frac{1}{4}\left(\mu(4)2^1 + \mu(2)2^2 + \mu(1)2^4\right) = \frac{1}{4}(-4+16) = 3,\\
L_5 &= \frac{1}{5}\left(\mu(5)2^1 + \mu(1)2^5\right) = \frac{1}{5}(-2+32) = 6.
\end{aligned}
$$

確かに正しい答えを与えています.

以上より,

$$\dim W_m = 2^{m-1} - \frac{1}{m}\sum_{d \mid m} \mu\left(\frac{m}{d}\right) 2^d$$

を得て, 本節の目的は達せられました. 少し計算してみると,

$$
\begin{aligned}
\dim W_2 &= 2^1 - 1 = 1,\\
\dim W_3 &= 2^2 - 2 = 2,\\
\dim W_4 &= 2^3 - 3 = 5,\\
\dim W_5 &= 2^4 - 6 = 10,
\end{aligned}
$$

などとなります. やはり, 重さ 4 の 7 つの関係式は独立ではありませんでした. さらに計算を続けて表にしてみましょう.

m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\cdots$
$\dim V_m$	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	$\cdots$
$\dim W_m$	1	2	5	10	23	46	98	200	413	838	1713	$\cdots$

この表を見ると, 多重ゼータ値の間には思いのほか多くの線形関係式のあることが分かります.

我々が多重ゼータ値の関係式を得た仕組みは単純です. 有限多重和の間になにか代数的な関係式があると, ニュートン級数による補間を通じて, それが多重ゼータ値の代数的な関係式に化けてしまうというからくりです. ですから, 我々が得た関係式の源は, 有限多重和の調和積関係式にあるといえます. 我々はずいぶん多くの関係式を得たように見えますが, これで全てではありません. 今回得た公式でつかまえられない関係式とはどんなものなのでしょうか?つかまえられない理由とはなんなのでしょうか?関係式の全体が明瞭に見通せるようになりたいものです.

謝辞

講演の機会をいただきました大野泰生先生に感謝いたします.

参考文献

[1] G. Kawashima, A class of relations among multiple zeta values, J. Number Theory 129 (2009) 755-788.

[2] G. Kawashima, A generalization of the duality for multiple harmonic sums, J. Number Theory 130 (2010) 347-359.