数理解析研究所講究録
第1813巻2012年48-57

多重ゼータ値の一般導分関係式, 巡回和公式 およびある特殊値について

九州大学大学院数理学研究院　田中 立志
Faculty of Mathematics, Kyushu University

概要

多重ゼータ値の一般導分関係式と呼ばれる関係式族の証明, Hoffman-大野や大野-若林によって示された巡回和公式の別証明, および多重ゼータ値の特殊値に関する Bowman-Bradley の定理の等号付き多重ゼータ値版について解説する.

0　はじめに

正の整数 $k_1, \ldots, k_l$ $(k_1 \geq 2)$ からなるインデックス $(k_1, \ldots, k_l)$ に対し, (Euler-Zagier 型の) **多重ゼータ値 (multiple zeta value, MZV)** および**等号付き多重ゼータ値 (multiple zeta-star value, MZSV)** とは以下の収束級数で定義される実数である：

$$\zeta(k_1, \ldots, k_l) = \sum_{m_1 > \cdots > m_l > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_l^{k_l}}, \quad \zeta^\star(k_1, \ldots, k_l) = \sum_{m_1 \geq \cdots \geq m_l > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_l^{k_l}}.$$

条件 $k_1 \geq 2$ によりこれらの級数は絶対収束し, ある実数値を定める. $k_1 + \cdots + k_l (=: k)$, l をそれぞれ MZV ないし MZSV の**重さ (weight)**, **深さ (depth)** と呼ぶ. 深さが 1 の MZV, MZSV は同じ値を定め, Riemann ゼータ関数の正整数点での値 (**Riemann ゼータ値**) となる.

重さ k の MZV が生成する $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を

$$\mathcal{Z}_0 = \mathbb{Q}, \ \mathcal{Z}_1 = 0, \ \mathcal{Z}_k = \sum_{\substack{k_1 + \cdots + k_l = k \\ l \geq 1, k_1 \geq 2, k_2, \ldots, k_l \geq 1}} \mathbb{Q}\zeta(k_1, \ldots, k_l)$$

と定義する. この空間 $\mathcal{Z}_k$ に関して以下の Zagier の次元予想が有名である.

予想 1 (Zagier の次元予想, [19]). $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k = d_k$. ただし, 数列 $\{d_k\}$ は $d_0 = 1, d_1 = 0, d_1 = 1, d_k = d_{k-2} + d_{k-3}$ $(k \geq 3)$ で与えられる.

重さ k の MZV は全部で 2^{k-2} 個あるが, この次元予想は空間としては d_k 次元であるといっている. d_k は 2^{k-2} と比べて大変小さいため, それだけ沢山の $\mathbb{Q}$-線形関係式があることを示唆している. また, Goncharov [4], Deligne-Goncharov [3] や寺杣 [18] により, 以下のことが示されている.

定理 2 ([4, 3, 18]). $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_k \leq d_k$.

これにより, MZV の間に沢山 (各重さ k ごとに少なくとも $2^{k-2}-d_k$ 個) の線形関係式が成り立つことが保証されたことになる. たとえば $k=5$ だと $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{Z}_5 \leq d_5 = 2$ であることがわかる.

空間の次元の上限は分かったが, ではその次元分 (2つ) の生成元としては何を選べばよいのか. たとえば重さが 5 の場合には

$$\mathcal{Z}_5 = \mathbb{Q}\zeta(5) + \mathbb{Q}\zeta(4,1) = \mathbb{Q}\zeta(3,2) + \mathbb{Q}\zeta(2,3) = \cdots$$

などが知られている. これらの生成元を知るためには重さ 5 の MZV の間の $\mathbb{Q}$-線形関係式すべてを具体的に求め, 生成元の候補以外の MZV をその候補の線形結合で表す必要がある. このようにベクトル空間 $\mathcal{Z}_k$ の生成元を具体的に決定するためには, MZV の間の $\mathbb{Q}$-線形関係式を具体的に書き下すことが重要になる. (注意：最近, Hoffman's basis が生成系のひとつであることが Francis Brown により示された.)

第 1 節では Hoffman による MZV の代数的定式化について復習する. その定式化のもとで, 川島関係式 ([10]) の線形部分と呼ばれる関係式族を紹介する (第 2 節). 第 3 節では MZV の一般導分関係式について述べる. [16] によってなされた証明についても概観する. 第 4 節では Hoffman-大野 [6] や大野-若林 [12] によって証明された巡回和公式のある代数的な定式化を行い, 田中-若林 [17] にて明らかになった巡回和公式が川島関係式に含まれることについて概説する. 第 5 節では最近近藤-斎藤-田中 [11] の中で得られた, MZV の特殊値に関する Bowman-Bradley [1] の定理の MZSV 版に関する結果 (講演では時間がなくて解説することができなかった部分である) について概説する.

1 代数的定式化

Hoffman [5] により導入された, MZV の代数的定式化について述べる.

2 変数非可換多項式環 $\mathfrak{H} = \mathbb{Q}\langle x, y\rangle$ の部分環 $\mathfrak{H}^1, \mathfrak{H}^0$ をそれぞれ

$$\mathfrak{H} \supset \mathfrak{H}^1 = \mathbb{Q} + \mathfrak{H}y \supset \mathfrak{H}^0 = \mathbb{Q} + x\mathfrak{H}y$$

とする. $z_k = x^{k-1}y$ $(k \geq 1)$ とおく. $\mathbb{Q}$-線形写像 $Z\colon \mathfrak{H}^0 \to \mathbb{R}$ を $Z(1)=1$ および

$$Z(z_{k_1}\cdots z_{k_l}) = \zeta(k_1,\ldots,k_l) \quad (k_1 \geq 2)$$

で定める. すると $\ker Z$ の元は MZV の間の $\mathbb{Q}$-線形関係式を与える多項式全体の集合ということになる. この写像 Z がいわゆる調和積とシャッフル積と呼ばれる $\mathfrak{H}$ 上

の2つの可換な積について準同型になることが知られており, あわせて**複シャッフル関係式** (double shuffle relation) と呼ばれている. シャッフル積については本稿では述べないが, 調和積は以下で必要になるためここでその定義を述べておく.

積 $*$: $\mathfrak{H}^1 \times \mathfrak{H}^1 \to \mathfrak{H}^1$ を $\mathbb{Q}$-双線形性および以下の帰納的な性質で定義する：

(i) 任意の $w \in \mathfrak{H}^1$ に対して, $1 * w = w * 1 = w$,

(ii) 任意の $k, l \geq 1$ と任意の words $w, w' \in \mathfrak{H}^1$ に対して,
$z_k w * z_l w' = z_k(w * z_l w') + z_l(z_k w * w') + z_{k+l}(w * w')$.

この積 $*$ は**調和積 (級数シャッフル積)** と呼ばれ, $\mathfrak{H}^1$ 上で結合的かつ可換な積である. MZV の級数表示からくる**調和積公式**は, 写像 Z が $*$-準同型である, と言い換えられる.

2 川島関係式

川島 [10] では MZV の和を有限までで止めた多重和を補間する Newton 級数の解析的な性質, とりわけある関数等式から MZV の間の関係式を導いている. ここでは前節で述べた代数的定式化のことばを用いてその川島関係式を記す. ([16, 14] も参照.)

まず, いくつか記号を準備する. 正整数 p, q および $w, w' \in \mathfrak{H}^1$ に対し, 積 $\dot{*}$ を

$$z_p w \,\dot{*}\, z_q w' = z_{p+q}(w * w')$$

で定義する. (右辺の $*$ は調和積である.) また, L_x を $L_x(w) = xw$ $(w \in \mathfrak{H})$ なる $\mathbb{Q}$-線形写像, ε を $\mathfrak{H}$ 上の自己同型で

$$\varepsilon(x) = x + y, \ \varepsilon(y) = -y$$

で定まるものとする. このとき, 以下が成り立つ.

定理 3 ([10]). 正整数 m と任意の $w, w' \in \mathfrak{H}y$ に対し,

$$\sum_{\substack{p+q=m \\ p,q\geq 1}} Z\left(\varepsilon(w) \,\dot{*}\, y^p\right) Z\left(\varepsilon(w') \,\dot{*}\, y^q\right) = Z\left(\varepsilon(w * w') \,\dot{*}\, y^m\right).$$

とくに, $m = 1$ のとき

$$L_x\varepsilon\left(\mathfrak{H}y * \mathfrak{H}y\right) \subset \ker Z$$

が成り立つ. (これは MZV の間の線形関係式の族であり, 川島関係式の線形部分とも呼んでいるものである.)

例 4. $L_x\varepsilon(y * y) = L_x\varepsilon(2y^2 + xy) = L_x\left(2(-y)^2 + (x+y)(-y)\right) = xy^2 - x^2y$ であるから, これを Z で送れば $\zeta(2,1) = \zeta(3)$ を得る.

川島関係式が与える線形独立な関係式の個数についてであるが, まず線形部分 ($m=0$ の場合) のみであれば, 川島氏自身によってランク 2 の自由リー代数の各次数における次元に一致することが示されている. その数は各次数ごとの Lyndon word の個数にも一致する数で, 重さ k での個数は

$$2^{k-2}-\frac{1}{k-1}\sum_{d|k-1}\mu\left(\frac{k-1}{d}\right)2^d$$

で与えられる. (μ はメビウス関数である.) この式からも分かるように川島関係式の線形部分だけでは MZV 間の全関係式を与えてはいないが, 川島関係式の代数部分 ($m\geq 1$ の部分) も考慮すれば MZV 間の全関係式を与えているだろうと実験的に予想している. 筆者はフリーソフト Risa/asir を用いて重さが 12 以下ではこの予想が正しいことを実験的に確認した. その後九州大学の川原祐人氏と共同でさらなる実験的考察をし, 重さ 15 までは正しいことが確認できた. この考察までは計算技術をほとんど何も使わずに確認できたのだが, 並列計算や使用メモリを抑えるプログラム開発を試みるなど技術的な改善を図ることでより大きな重さまで計算できると期待している. 金子-野呂-鶴巻 [9] ではいわゆる一般複シャッフル関係式 (実際には導分関係式と有限複シャッフル関係式の一部) が全関係式を与えていることを重さが 20 まで (現時点での世界記録) 実験的に確認されているが, その記録を越えるべく, われわれの研究は目下進行中である.

3 一般導分関係式

ここでは金子 [8] や Zagier によって定式化され予想された一般導分関係式が関係式になっていることについて [16] に則して述べる.

一般導分関係式を述べる前に井原-金子-Zagier [7] で証明された導分関係式について復習する. ∂ が非可換多項式環 $\mathfrak{H}$ 上の**導分**であるとは, ∂ が $\mathfrak{H}$ 上の $\mathbb{Q}$-線形写像であって, ライプニッツ則

$$\partial(ww')=\partial(w)w'+w\partial(w')\quad(w,w'\in\mathfrak{H})$$

を満たすもののことをいう. $\mathfrak{H}$ 上の導分は, $\mathfrak{H}$ の生成元 x と y の行き先を決めれば一意的に定まる. 今, $n\geq 1$ に対し, $\mathfrak{H}$ 上の導分 ∂_n を

$$\partial_n(x)=x(x+y)^{n-1}y,\ \partial_n(y)=-x(x+y)^{n-1}y$$

で定義する. このとき, MZV の導分関係式は次で与えられる.

定理 5 (導分関係式). 任意の $n\geq 1$ に対して, $\partial_n(\mathfrak{H}^0)\subset\ker Z$.

例 6. $xy\in\mathfrak{H}^0$ に対して,

$$\partial_2(xy)=\partial_2(x)y+x\partial_2(y)=x(x+y)y^2-x^2(x+y)y=xy^3-x^3y$$

であるから, $\zeta(2,1,1)=\zeta(4)$ を得る.

金子や Zagier は, Connes-Moscovici のホップ代数 (たとえば [2] 参照) を参考にして上記の導分 ∂_n の一般化を次のように与えた. $c \in \mathbb{Q}$ とする. $\mathbb{Q}$ 線形写像 $\theta^{(c)}: \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ を

$$\theta^{(c)}(x) = x^2 + \frac{1}{2}(xy + yx),\ \theta^{(c)}(y) = y^2 + \frac{1}{2}(xy + yx)$$

および $w, w' \in \mathfrak{H}$ に対し

$$\theta^{(c)}(ww') = \theta^{(c)}(w)w' + w\theta^{(c)}(w') + c\partial_1(w)H(w')$$

で定義する. ただし, H は $\mathfrak{H}$ 上の $\mathbb{Q}$ 線形写像で, $\mathfrak{H}$ の word w に対し

$$H(w) = \deg(w)w$$

で与えられるとする. (この H は $\mathfrak{H}$ 上の導分となる.) 正整数 n に対し,

$$\partial_n^{(c)} = \frac{1}{(n-1)!}\mathrm{ad}(\theta^{(c)})^{n-1}(\partial_1)$$

とする. ただし

$$\mathrm{ad}(\theta)(\partial) = [\theta, \partial] = \theta\partial - \partial\theta$$

である. $c = 0$ のときには上記の導分 ∂_n と一致することが容易に確かめられる:

$$\partial_n^{(0)} = \partial_n.$$

$n = 1$ なら, 任意の $c \in \mathbb{Q}$ に対して $\partial_1^{(c)} = \partial_1$ である. $c \neq 0$ かつ $n \neq 1$ であれば, $\partial_n^{(c)}$ はもはや $\mathfrak{H}$ 上の導分ではないが, 次が示せる.

命題 7. (1) (可換性) 任意の $n,\ m \geq 1$, 任意の $c,\ c' \in \mathbb{Q}$ に対して, $[\partial_n^{(c)},\ \partial_m^{(c')}] = 0$.
(2) 任意の $n \geq 1$, 任意の $c \in \mathbb{Q}$ に対して, $\partial_n^{(c)}(\mathfrak{H}^0) \subset \mathfrak{H}^0$.

証明は [16] を参照されたい. さらに, 以下の命題も成り立つ. $w \in \mathfrak{H}^1$ に対し, $\mathcal{H}_w$ を $\mathcal{H}_w(w') = w * w'$ なる $\mathbb{Q}$-線形写像とする. τ を $\mathfrak{H}$ 上の反自己同型写像で $\tau(x) = y,\ \tau(y) = x$ とする. この τ は, MZV の双対公式

$$(1 - \tau)(\mathfrak{H}^0) \subset \ker Z.$$

を与える写像である. $\chi = \tau L_x \varepsilon$ とする.

命題 8. 任意の $n \geq 1$, 任意の $c \in \mathbb{Q}$ に対して, ある $w = w(n, c) \in \mathfrak{H}y$ が存在して, $\mathfrak{H}^1$ 上で $\partial_n^{(c)}\chi = \chi\mathcal{H}_w$ が成り立つ. 言い換えれば, 可換図

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{H}^1 \arrow[r, "\mathcal{H}_w"] \arrow[d, "\chi"'] & \mathfrak{H}^1 \arrow[d, "\chi"] \\
\mathfrak{H}^0 \arrow[r, "\partial_n^{(c)}"'] & \mathfrak{H}^0
\end{tikzcd}$$

が成立する.

命題 8 を用いると, 次の MZV の一般導分関係式が証明される.

定理 9 (一般導分関係式). 任意の $n \geq 1$ と任意の $c \in \mathbb{Q}$ に対して, $\partial_n^{(c)}(\mathfrak{H}^0) \subset \ker Z$.

証明. 命題 8 より, ある $w \in \mathfrak{H}y$ が存在して $\mathfrak{H}^1$ 上で $\partial_n^{(c)}\chi = \chi\mathcal{H}_w$ が成り立つ. $\chi(\mathfrak{H}y) = x\mathfrak{H}y$ であるから,

$$\partial_n^{(c)}(x\mathfrak{H}y) = \partial_n^{(c)}\chi(\mathfrak{H}y) = \chi\mathcal{H}_w(\mathfrak{H}y) \subset \chi(\mathfrak{H}y * \mathfrak{H}y).$$

定理 3 および双対公式（双対公式は定理 3 に含まれることが知られているため, 定理 3 のみで十分である）より, これは $\ker Z$ に含まれる. □

例 10. $xy \in \mathfrak{H}^0$ に対して,

$$\partial_2^{(c)}(xy) = (xyyy - xxyy - xyxy)c + xyyy - xxxy$$

と計算される. これを Z で写せば 0 になることが任意の $c \in \mathbb{Q}$ に対して言えるから, c に関する多項式と見たときの各係数が 0 となり

$$\zeta(2,1,1) = \zeta(3,1) + \zeta(2,2), \ \zeta(2,1,1) = \zeta(4)$$

を得る.

一般導分関係式は導分関係式を真に拡張していることが計算機を用いた実験から分かっている. また, 一般導分関係式が川島関係式の線形部分に含まれることを見たわけであるが, 一般導分関係式と双対公式を合わせると川島関係式の線形部分と同値であろうと予想されている.

4 巡回和公式

Hoffman-大野 [6] にて証明された MZV の巡回和公式は, 田中-若林 [17] の中で‘ポアソン代数’を参考に代数的に定式化されたので, それについて紹介する. n を正の整数とする. $\mathfrak{H}$ の $\mathfrak{H}^{\otimes(n+1)}$ への作用 $\diamond$ を

$$a \diamond (w_1 \otimes \cdots \otimes w_{n+1}) = w_1 \otimes \cdots \otimes w_n \otimes aw_{n+1},$$
$$(w_1 \otimes \cdots \otimes w_{n+1}) \diamond b = w_1 b \otimes w_2 \otimes \cdots \otimes w_{n+1}$$

$(a, b, w_1, \ldots, w_{n+1} \in \mathfrak{H})$ で定義する. $\mathbb{Q}$-線形写像 $\mathcal{C}_n \colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}^{\otimes(n+1)}$ を

$$\mathcal{C}_n(x) = x \otimes (x+y)^{\otimes(n-1)} \otimes y,$$
$$\mathcal{C}_n(y) = -x \otimes (x+y)^{\otimes(n-1)} \otimes y$$

および

$$\mathcal{C}_n(ww') = \mathcal{C}_n(w) \diamond w' + w \diamond \mathcal{C}_n(w') \quad (w, w' \in \mathfrak{H})$$

で定義する. 写像 $\mathcal{M}_n \colon \mathfrak{H}^{\otimes(n+1)} \to \mathfrak{H}$ を $\mathcal{M}_n(w_1 \otimes \cdots \otimes w_{n+1}) = w_1 \cdots w_{n+1}$ とし, $\rho_n = \mathcal{M}_n \mathcal{C}_n$ とする. また, $\check{\mathfrak{H}}^1$ を, word 1 および $z_{k_1} \cdots z_{k_l}$（ただし, ある番号 q に対し $k_q > 1$）で生成される $\mathfrak{H}^1$ の部分代数とする. $A_0 = 1$, $A_j = (x+y)^{j-1}y$ $(j \geq 1)$ とする. このとき, 次を得る.

命題 11. 任意の $k_1 \geq n \geq 1, k_2, \ldots, k_l \geq 1$ に対して,

$$\begin{aligned}&\varepsilon L_x^{-1}\rho_n(A_{k_1+\cdots+k_l-n+1} - A_{k_1-n+1}A_{k_2}\cdots A_{k_l})\\&= \sum_{m=2}^{l}\frac{(-1)^{l-m}}{m}\sum_{j=1}^{l}\sum_{\substack{\alpha_1+\cdots+\alpha_m=l\\ \alpha_1,\ldots,\alpha_m\geq 1}} H(j,\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\end{aligned}$$

が成り立つ. ここに, $H(j, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ は

$$\begin{aligned}&H(j,\alpha_1,\ldots,\alpha_m)\\&= (z_{k_j}\cdots z_{k_{\alpha_1+j-1}}) * (z_{k_{\alpha_1+j}}\cdots z_{k_{\alpha_1+\alpha_2+j-1}}) * \cdots * (z_{k_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{m-1}+j}}\cdots z_{k_{\alpha_1+\cdots+\alpha_m+j-1}}),\end{aligned}$$

で与えられる. (右辺の k の添え字は modulo l で考え $\{1, \ldots, l\}$ のどれかと見做す.)

命題 11 から次のことが分かる.

定理 12 ([17]). 任意の正整数 n に対し, $\rho_n(\check{\mathfrak{H}}^1) \subset L_x\varepsilon(\mathfrak{H}y * \mathfrak{H}y)$ $(\subset \ker Z)$.

この定理の $n = 1$ の場合が Hoffman と大野による巡回和公式である. (大野-若林 [12] で示された MZSV に対する巡回和公式も同様のことが示せるが, 本稿では割愛する. 詳細は [17] を参照されたい.)

例 13. $xy \in \check{\mathfrak{H}}^1$ に対して,

$$\begin{aligned}\rho_2(xy) &= \mathcal{M}_2\mathcal{C}_2(xy)\\&= \mathcal{M}_2(\mathcal{C}_2(x)\diamond y + x\diamond\mathcal{C}_2(y))\\&= \mathcal{M}_2(xy\otimes(x+y)\otimes y - x\otimes(x+y)\otimes xy)\\&= xy(x+y)y - x(x+y)xy = xyyy - xxxy\end{aligned}$$

より, $\zeta(2,1,1) = \zeta(4)$ を得る.

$\check{\mathfrak{H}}^1_{(d)}$ を $\check{\mathfrak{H}}^1$ の d 次斉次部分とする. 整数 $n, d \geq 1$ に対して

$$\mathrm{CSF}_d^n = \langle \rho_n(w) \mid w \in \check{\mathfrak{H}}^1_{(d)}\rangle_{\mathbb{Q}},\ \mathrm{CSF}_d = \oplus_{n\geq 1}\mathrm{CSF}_d^n$$

とおく. すると以下のフィルトレーション構造が容易に得られる.

補題 14. 任意の $n, d \geq 1$ に対して, $\mathrm{CSF}_d^{n+1} \subset \mathrm{CSF}_{d+1}^n$.

数列 $\{L_m^{(n)}\}$ を Lucas n-step 数とする:

$$L_m^{(n)} = \begin{cases} 0 & n = 0\\ 2^m - 1 & n > 0, m = 1, \ldots, n,\\ L_{m-1}^{(n)} + \cdots + L_{m-n}^{(n)} & n > 0, m \geq n+1.\end{cases}$$

また, φ を Euler 関数とする. すると, CSF_d^n の $\mathbb{Q}$ 上の次元は以下で与えられる.

定理 15 ([13]). $\dim_{\mathbb{Q}}\mathrm{CSF}_d^n = -2 + \dfrac{1}{d+n-1}\displaystyle\sum_{m|d+n-1}\varphi\left(\frac{d+n-1}{m}\right)(2^m - L_m^{(n-1)})$.

とくに $n = 1$ のときは necklace 数になっている.

5 特殊値

本節ではMZSVのある特殊値について[11]の中で得られた結果について概説する.

$\mathbb{Q}$線形写像$d\colon \mathfrak{H}^1 \to \mathfrak{H}^1$を

$$d(wy) = \gamma(w)y \quad (w \in \mathfrak{H})$$

で定める. ただし, γは$\mathfrak{H}$上の自己同型で

$$\gamma(x) = x, \ \gamma(y) = x + y$$

で定まるものとする. このdはMZVとMZSVの間の線形変換を与える写像である.

$\natural\colon \mathfrak{H}^1 \times \mathfrak{H}^1 \to \mathfrak{H}^1$を$\mathbb{Q}$双線形性および以下の帰納的な性質で定義する：

(i) 任意の$w \in \mathfrak{H}^1$に対して, $1 \natural w = w \natural 1 = w$,

(ii) 任意の$k, l \geq 1$と任意のwords $w, w' \in \mathfrak{H}^1$に対して,
$z_k w \natural z_l w' = z_k(w \natural z_l w') + z_l(z_k w \natural w')$.

この積$\natural$も調和積$*$と同様に$\mathfrak{H}^1$上で結合的かつ可換な積である. (ただし, MZVもMZSVもこの積について準同型にはならない.) このとき, 以下が証明できる.

定理 16 ([11, 15]). 任意の整数$a, b, c \geq 1$と$m, n \geq 0$に対して,

$$\sum_{\substack{i+p+2q=m \\ j+u_1+\cdots+u_p \\ +v_1+\cdots+v_q=n}} (-2)^p d\big(z_c^i \natural (z_a z_b)^j\big) * \big(z_{(a+b)u_1+c} \cdots z_{(a+b)u_p+c} \natural z_{(a+b)v_1+2c} \cdots z_{(a+b)v_q+2c}\big)$$

$$= (-1)^m \sum_{j+k=n} \big(z_c^m \natural (z_a z_b)^j\big) * d(z_{a+b}^k)$$

が成り立つ.

$a = 3, b = 1, c = 2$としてZで送れば, 次がいえる.

系 17. 任意の整数$m, n \geq 0$に対して,

$$\sum_{\substack{\sum_{i=0}^{2n} m_i = m \\ m_0, \ldots, m_{2n} \geq 0}} \zeta^\star(\{2\}^{m_0}, 3, \{2\}^{m_1}, 1, \{2\}^{m_2}, \ldots, 3, \{2\}^{m_{2n-1}}, 1, \{2\}^{m_{2n}}) \in \mathbb{Q}\pi^{2m+4n}$$

が成り立つ.

MZVのBowman-Bradleyの定理(上式の$\zeta^\star$をζに変えた式である, [1]参照)に対応する主張がMZSVでも言えたことになる.

参考文献

[1] D. Bowman and D. M. Bradley, *The algebra and combinatorics of shuffles and multiple zeta values*, J. Combin. Theory Ser. A **97** (2002), 43–61.

[2] A. Connes, H. Moscovici, *Hopf algebras, cyclic cohomology and the transverse index theorem*, Comm. Math. Phys. 198 (1998), no. 1, 199–246.

[3] P. Deligne, A. Goncharov, *Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 38 (2005), no. 1, 1–56.

[4] A. Goncharov, *Periods and mixed Tate motives*, preprint, arXiv:0202154.

[5] M. Hoffman, *The algebra of multiple harmonic series*, J. Algebra 194 (1997), 477–495.

[6] M. Hoffman, Y. Ohno, *Relations of multiple zeta values and their algebraic expression*, J. Algebra 262 (2003), 332–347.

[7] K. Ihara, M. Kaneko, D. Zagier, *Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values*, Compos. Math. 142 (2006), no. 2, 307–338.

[8] M. Kaneko, *On an extension of the derivation relation for multiple zeta values*, The Conference on L-Functions, 89–94, World Sci. Publ., Hackensack, NJ (2007).

[9] M. Kaneko, M. Noro, K. Tsurumaki, *On a conjecture for the dimension of the space of the multiple zeta values*, Software for Algebraic Geometry, IMA 148 (2008), 47–58.

[10] G. Kawashima, *A class of relations among multiple zeta values*, J. Number Theory **129** (2009), 755–788.

[11] H. Kondo, S. Saito, T. Tanaka, *The Bowman-Bradley theorem for multiple zeta-star values*, arXiv:1003.5973.

[12] Y. Ohno and N. Wakabayashi, *Cyclic sum of multiple zeta values*, Acta Arith. 123 (2006), 289–295.

[13] S. Saito, T. Tanaka, N. Wakabayashi, *Combinatorial remarks on the cyclic sum formula for multiple zeta values*, arXiv:1006.3984.

[14] T. Tanaka, *Algebraic interpretation of Kawashima relation for multiple zeta values and its applications*, RIMS Kôkyûroku-Bessatsu B19 (2010), 117–134.

[15] T. Tanaka, *A simple proof of certain formula for multiple zeta-star values*, J. Alg., Num. Theory: Adv. and Appl. vol.3 (2) (2010), 97–110.

[16] T. Tanaka, *On the quasi-derivation relation for multiple zeta values*, J. Number Theory **129** (2009), 2021–2034.

[17] T. Tanaka, N. Wakabayashi, *An algebraic proof of the cyclic sum formula for multiple zeta values*, J. Algebra 323 (2010), 766–778.

[18] T. Terasoma, *Mixed Tate motives and multiple zeta values*, Invent. Math. 149 (2002), no. 2, 339–369.

[19] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), 497–512, Progr. Math., 120, Birkhäuser, Basel, 1994.

Tatsushi Tanaka

Faculty of Mathematics,
Kyushu University
744 Moto-oka, Nishi-ku, Fukuoka-city
Fukuoka 819-0395 Japan
mailto: t.tanaka@math.kyushu-u.ac.jp