数理解析研究所講究録
第1813巻 2012年 66-72

多重ゼータ値の q 類似が満たす関係式について

筑波大学・大学院数理物質科学研究科 竹山美宏 (Yoshihiro Takeyama)
Graduate School of Pure and Applied Sciences, Tsukuba University.

1. Introduction

本稿では多重ゼータ値の q 類似が満たす関係式について概説する.「q 類似」という概念の正確な定義は無いが, ここでは素朴に「パラメータ q による良い変形で, $q \to 1$ の極限でもとに戻るもの」という意味で解釈しよう. 多重ゼータ値の q 類似としては様々な可能性がありうるかも知れないが, ここでは Kaneko-Kurokawa-Wakayama によるゼータ関数の q 類似 [8] の多重版 [21] を考える:

Definition 1.1. 正の整数の組 $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_r)$ (ただし $k_1 \geq 2$) に対して

$$\zeta_q(\mathbf{k}) := \sum_{m_1 > \cdots > m_r > 0} \frac{q^{(k_1-1)m_1 + \cdots + (k_r-1)m_r}}{[m_1]^{k_1} \cdots [m_r]^{k_r}} \tag{1.1}$$

と定める. ただし

$$[n] := \frac{1-q^n}{1-q} = 1 + q + \cdots + q^{n-1}.$$

(1.1) の右辺は, $|q| < 1$ のとき絶対収束するので収束ベキ級数である. しかし, ここでは簡単のため形式的ベキ級数環 $\mathbb{Q}[[q]]$ の元だと思うことにしよう. $q \to 1-0$ のとき $[n] \to n$ となるので, $\zeta_q(\mathbf{k})$ は多重ゼータ値 $\zeta(\mathbf{k})$ の q 類似と見なせる. これが「良い q 類似」であることの一つの根拠として, 次の等式を証明する.

Proposition 1.2. $\zeta_q(3) = \zeta_q(2,1)$

Proof. ここでは [3] にある $q = 1$ の場合の証明に沿った方法で示す. まず

$$\zeta_q(3) = \sum_{n>0} \frac{q^{2n}}{[n]^3} = \sum_{n>0} \left(\frac{q^n}{[n]^3} - (1-q)\frac{q^n}{[n]^2} \right) = \sum_{n>0} \frac{q^n}{[n]^3} - (1-q)\zeta_q(2)$$

より

$$\zeta_q(2,1) + \zeta_q(3) = \sum_{m \geq n > 0} \frac{q^m}{[m]^2[n]} - (1-q)\zeta_q(2)$$

となる. 右辺の第一項を I とおいて, これを次のように変形する.

$$\begin{aligned} I &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{[m]^2} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{[n]} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{[m]^2} \sum_{n=1}^{m} \left((1-q) + \frac{q^n}{[n]} \right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m}{[m]^2} \left\{ m(1-q) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{q^n}{[n]} - \frac{q^{m+n}}{[m+n]} \right) \right\} \\ &= (1-q) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mq^m}{[m]^2} + \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{q^{m+n}}{[m][n][m+n]}. \end{aligned}$$

この最右辺の第二項を II とおく. 分母・分子に $[m+n]$ をかけ, $[m+n]=[m]+q^m[n]$ であることを使えば

$$\begin{aligned} II &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{q^{m+n}}{[m+n]^2[n]} + \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{q^{2m+n}}{[m+n]^2[m]} \\ &= \sum_{k>l>0} \frac{q^k}{[k]^2[l]} + \sum_{k>l>0} \frac{q^k}{[k]^2}\frac{q^l}{[l]} \\ &= \zeta_q(2,1) + \sum_{k>l>0} \frac{q^k}{[k]^2}\left(\frac{1}{[l]} - (1-q)\right) \\ &= 2\zeta_q(2,1) - (1-q)\sum_{k>0} \frac{(k-1)q^k}{[k]^2} \end{aligned}$$

となるので

$$I = (1-q)\sum_{m=1}^{\infty} \frac{mq^m}{[m]^2} + II = 2\zeta_q(2,1) + (1-q)\zeta_q(2)$$

を得る. したがって

$$\zeta_q(2,1) + \zeta_q(3) = I - (1-q)\zeta_q(2) = 2\zeta_q(2,1).$$

よって $\zeta_q(3) = \zeta_q(2,1)$ である. □

2. Known relations

我々が考えている多重ゼータ値の q 類似は, Proposition 1.2 の等式だけでなく, 多重ゼータ値の他の関係式もほぼそのままの形で満たすことが知られている. たとえば, Bradley [4] によって次のことが示された.

Theorem 2.1. 多重ゼータ値の q 類似 (1.1) は, 巡回和公式 [6, 15] と大野関係式 [12] をそのまま満たす.

ここで「そのまま」とは, 巡回和公式と大野関係式において多重ゼータ値 $\zeta(\mathbf{k})$ を単に $\zeta_q(\mathbf{k})$ に置き換えた等式が成り立つという意味である. (等号つき多重ゼータ値の q 類似の巡回和公式は [13] で得られている.)

巡回和公式と大野関係式は線形な関係式であるが, 代数的な関係式として Ohno-Zagier の関係式 [16] がある. この関係式についても, その q 類似が得られている :

Theorem 2.2. [14] 集合 $I_0(k,r,s)$ を

$$I_0(k,r,s) := \{\mathbf{k} = (k_1,\dots,k_r) \in (\mathbb{Z}_{>0})^r \mid k_1 \geq 2,\ |\mathbf{k}| = k,\ \mathrm{ht}\mathbf{k} = s\}$$

で定める (ただし $|\mathbf{k}| := \sum_{j=1}^{r} k_j$, $\mathrm{ht}\mathbf{k} := \#\{j \mid k_j \geq 2\}$). 母関数 $\Phi_0(x,y,z)$ を

$$\Phi_0(x,y,z) := \sum_{k,r,s=0}^{\infty} \left(\sum_{\mathbf{k}\in I_0(k,r,s)} \zeta_q(\mathbf{k}) \right) x^{k-r-s} y^{r-s} z^{s-1}$$

と定義するとき, 次の等式が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
&1+(z-xy)\Phi_0(x,y,z)\\
&=\exp\left(\sum_{n=2}^{\infty}\zeta_q(n)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(q-1)^m}{m+n}(x^{m+n}+y^{m+n}-\alpha^{m+n}-\beta^{m+n})\right).
\end{aligned}
$$

ここで $\alpha^{m+n}+\beta^{m+n}$ は, 次から定まる x,y,z の多項式である.

$$
\alpha+\beta=x+y+(q-1)(z-xy), \qquad \alpha\beta=z.
$$

多重ゼータ値に対する Ohno-Zagier の関係式については, 一般化超幾何関数の特殊値と関連させた拡張が得られているが [1, 2, 10], q 類似に対しても同様の拡張がなされている [11, 18].

多重ゼータ値に対しては, 巡回和公式と大野関係式・一般導分関係式 [7, 17] を含む関係式が Kawashima によって得られている [9]. 最近の研究で, 多重ゼータ値の q 類似も川島関係式 (の修正版) を満たすことが分かった [19]. その詳細を次節で述べる.

3. A q-ANALOGUE OF KAWASHIMA'S RELATION

係数環 $\mathcal{C}:=\mathbb{Q}[[\hbar]]$ を用意し, 文字 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ で生成される $\mathcal{C}$ 上の非可換多項式環を $\mathfrak{h}^1$ とする. $\mathfrak{h}^1$ の部分 $\mathcal{C}$ 加群 $\mathfrak{h}^1_{>0}, \mathfrak{h}^0$ を次で定義する.

$$
\mathfrak{h}^1_{>0}:=\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{k_1,\ldots,k_r>0}\mathcal{C}z_{k_1}\cdots z_{k_r}, \quad \mathfrak{h}^0:=\mathcal{C}+\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{\substack{k_1\geq 2\\ k_2,\ldots,k_r\geq 1}}\mathcal{C}z_{k_1}\cdots z_{k_r}.
$$

形式的ベキ級数環 $\mathcal{R}:=\mathbb{Q}[[q]]$ への $\mathbb{Q}$ 線型な $\mathcal{C}$ の作用を $1.f(q):=f(q)$, $\hbar.f(q):=(1-q)f(q)$ で定め, 以下 $\mathcal{R}$ を $\mathcal{C}$ 加群と見なす. このとき, $\mathcal{C}$ 加群準同型 $Z_q:\mathfrak{h}^0\to\mathcal{R}$ を

$$
Z_q(1)=1, \quad Z_q(z_{k_1}\cdots z_{k_r}):=\zeta_q(k_1,\ldots,k_r)
$$

で定める.

$\mathfrak{h}^1$ 上の $\mathcal{C}$ 双線型な積 $*_+$ を帰納的に次で定義する.

$$
\begin{aligned}
&1*_+w=w, \quad w*_+1=w \qquad (\forall w\in\mathfrak{h}^1),\\
&(z_iw_1)*_+(z_jw_2)=z_i(w_1*_+z_jw_2)+z_j(z_iw_1*_+w_2)\\
&\qquad\qquad\qquad +(z_{i+j}+\hbar z_{i+j-1})(w_1*_+w_2) \qquad (\forall w_1,w_2\in\mathfrak{h}^0).
\end{aligned}
$$

このとき次の等式が成り立つ.

Proposition 3.1. $Z_q(w_1*_+w_2)=Z_q(w_1)Z_q(w_2)$ $(\forall w_1,w_2\in\mathfrak{h}^0)$.

$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ で生成される $\mathfrak{h}^1$ の部分 $\mathcal{C}$ 加群 (1 次斉次式全体) を $\mathfrak{z}$ とする. $\mathfrak{z}$ 上に $\mathcal{C}$ 双線型な積 $\circ$ を $z_i\circ z_j:=z_{i+j}$ で定義し, $\mathfrak{z}$ を可換な $\mathcal{C}$ 代数と見なす. $\mathfrak{z}$ の $\mathfrak{h}^1$ への作用 (これも $\circ$ で表す) を

$$
z_i\circ 1:=0, \qquad z_i\circ(z_jw):=(z_i\circ z_j)w \quad (w\in\mathfrak{h}^1)
$$

で定める.

$\mathbb{C}$ 線形な写像 $d,\phi:\mathfrak{h}^1\to\mathfrak{h}^1$ を以下のように定める．まず d は，帰納的に

$$d(1):=1,\qquad d(z_iw):=z_id(w)+z_i\circ d(w)\quad (w\in\mathfrak{h}^1)$$

によって定まる写像とする．次に ϕ を定義するために記号を用意する．単項式 $u=z_{k_1}\cdots z_{k_r}$ に対して，集合 $I_u=\{\sum_{i=1}^{j}k_i\,|\,1\le j<r\}$ を考える．和 $\sum_{i=1}^{r}k_i$ 以下の正の整数で I_u に属さないものを，小さい順に $p_1,\ldots,p_l$ とする．このとき，$k'_1=p_1$, $k'_i=p_i-p_{i-1}\,(2\le i\le l)$ とおいて $\phi(u):=z_{k'_1}\cdots z_{k'_l}$ と定める．これを $\mathbb{C}$ 線型になるように $\mathfrak{h}^1$ 全体に拡張した写像を ϕ と定める．

$\mathfrak{h}^1_{>0}$ 上に $\mathbb{C}$ 双線型な積 $\circledast_\hbar$ を

$$(z_iw_1)\circledast_\hbar(z_jw_2):=z_{i+j}(w_1*_+w_2)\quad(\forall w_1,w_2\in\mathfrak{h}^1)$$

と定める．

最後に，$\mathfrak{h}^1$ 上に $\mathbb{C}$ 双線型な積 $\bar{*}$ を帰納的に

$$1\,\bar{*}\,w=w,\quad w\,\bar{*}\,1=w\quad(\forall w\in\mathfrak{h}^1),$$

$$(z_iw_1)\,\bar{*}\,(z_jw_2)=z_i(w_1\,\bar{*}\,z_jw_2)+z_j(z_iw_1\,\bar{*}\,w_2)-z_{i+j}(w_1\,\bar{*}\,w_2)\quad(\forall w_1,w_2\in\mathfrak{h}^0)$$

で定義する．

以上の記号の下で，川島関係式の q 類似は次で与えられる．

Theorem 3.2. [19] 任意の $w_1,w_2\in\mathfrak{h}^1_{>0}$ と，任意の正の整数 n に対して

$$\begin{aligned}Z_q(d(\phi(w_1\,\bar{*}\,w_2))\circledast_\hbar z_1^n)&\\ +\sum_{\substack{k+l=n\\k,l\ge1}}Z_q(d(\phi(w_1))\circledast_\hbar z_1^k)\,Z_q(d(\phi(w_2))\circledast_\hbar z_1^l)&=0\end{aligned}\tag{3.1}$$

が成り立つ．

定理 3.2 の証明は川島関係式とほぼ同様である．Newton 級数の q 類似をしかるべく定義し，その積公式を証明する．積公式の両辺においてテイラー展開を実行すれば，その係数として多重ゼータ値の q 類似が現われ，等式 (3.1) が得られる．この過程において，Bradley が証明した有限多重調和級数の反転公式 [5] を使う．詳細は [19] を参照していただきたい．

(3.1) において $n=1$ とすると線型の関係式が得られる：

Corollary 3.3. 任意の $w_1,w_2\in\mathfrak{h}^1_{>0}$ に対して，次の等式が成り立つ．

$$Z_q(z_1\circ d(\phi(w_1\,\bar{*}\,w_2))=0.$$

この関係式は，川島関係式の線型部分とまったく同じものである．多重ゼータ値の間の巡回和公式や大野関係式・一般導分関係式がこれに含まれることは知られているので，q 類似についてもこれらの関係式はそのまま成り立つことが分かる．

4. Discussion

最後に，多重ゼータ値に対する Zagier 予想の q 類似について考察しよう．

ウェイトが k の多重ゼータ値たち $\{\zeta(\mathbf{k})\,|\,|\mathbf{k}|=k\}$ が張る $\mathbb{Q}$ 線型空間の次元を d_k とする．このとき，d_k の値は帰納的に $d_0=1,d_1=0,d_2=1,d_k=d_{k-2}+d_{k-3}\,(k\ge$

3) で与えられるだろう，というのが Zagier 予想であった [20]．この予想の素朴な q 類似として次の問題を考える．

Question 1. 形式的ベキ級数環 $\mathbb{Q}[[q]]$ において，多重ゼータ値の q 類似が張る部分空間 $W_k := \sum_{|\mathbf{k}|=k} \mathbb{Q}\,\zeta_q(\mathbf{k})$ の次元を求めよ．

Zagier 予想の数列 d_k と，計算機によって W_k の次元を下から評価した値[1] f_k を表 1 に示す (以下の表のデータは [14] からの引用)．三番目の行には巡回和公式と大野関係式だけを使って次元を上から評価した値を並べている．

weight k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d_k	1	1	1	2	2	3	4	5	7
f_k	1	1	2	3	6	9	18	29	54
By cyclic and Ohno	1	1	2	3	6	9	18	30	56

TABLE 1

q 類似は 1 パラメータ変形であるから，$d_k \leq f_k$ となることは自然であるが，変形したことによってかなり次元が高くなっていることが見てとれる．さらに，ウェイトが 9 以上になると，q 類似の場合でも巡回和公式と大野関係式だけでは足りないことが分かる．このギャップが，今回証明した川島関係式の q 類似で埋まるのかどうか，まだ確認できていない．

多重ゼータ値の線型な関係式としては，ウェイトに関して斉次なものしかないことが予想されている．ところが q 類似の場合は，以下の意味で非斉次な関係式が存在する．まず

$$\overline{\zeta}_q(\mathbf{k}) := (1-q)^{-|\mathbf{k}|}\zeta_q(\mathbf{k}) = \sum_{m_1>\cdots>m_r>0} \frac{q^{(k_1-1)m_1+\cdots+(k_r-1)m_r}}{(1-q^{m_1})^{k_1}\cdots(1-q^{m_r})^{k_r}}$$

と定める．これは係数がすべて非負整数であるような q のベキ級数である．ここで次の線形空間を考える．

$$Z_{\leq k} := \sum_{2\leq|\mathbf{k}|\leq k} \mathbb{Q}\,\overline{\zeta}_q(\mathbf{k})$$

先ほどと同様に，空間 $Z_{\leq k}$ の次元を計算機で下から評価すると，表 2 の値 g_k が得られる．

weight k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_k	1	2	4	7	11	18	27	42	63
$\sum_{j\leq k} f_j$	1	2	4	7	13	22	40	69	123

TABLE 2

[1] $\zeta_q(\mathbf{k})$ を q の十分高いベキまで展開して得られる多項式の張る部分空間の次元を計算したもの (したがって W_k の次元を下から評価していることになる)．

2 行目の値は, 斉次部分の空間 W_k の次元 (の下からの評価) の和である. この値と g_k の間には, ウェイトが 6 のところでギャップがある. このことは, ウェイトが 6 以上になると $\overline{\zeta}_q(\mathbf{k})$ たちの間に非斉次な関係式があることを示唆している. 論文 [14] では, 計算機で実験した結果として次の 2 つの関係式を挙げた.

$$\begin{aligned}
&\overline{\zeta}_q(6)+3\overline{\zeta}_q(4,2)-6\overline{\zeta}_q(3,3)\\
&\quad-\overline{\zeta}_q(5)+3\overline{\zeta}_q(4,1)+3\overline{\zeta}_q(3,2)+\overline{\zeta}_q(3,1)=0,\\
&\overline{\zeta}_q(6)-12\overline{\zeta}_q(4,2)-3\overline{\zeta}_q(4,1,1)+3\overline{\zeta}_q(3,2,1)\\
&\quad+2\overline{\zeta}_q(5)-6\overline{\zeta}_q(4,1)-9\overline{\zeta}_q(3,2)-2\overline{\zeta}_q(3,1)=0.
\end{aligned}$$

いま, 川島関係式の q 類似 (3.1) の $n=2$ の場合を考え, Z_q の 2 次の項を命題 3.1 を逆に使って 1 次式の和に書き直すと, 線型の関係式が得られる. これをウェイトが 6 以下の場合に実行し, 結果として得られる関係式を計算機でリストアップすると, それらの線型結合として上の二つの非斉次な関係式が得られることを確認できる. したがって, 川島関係式の q 類似 (3.1) はこれまで知られていなかった関係式を含む新しいものと言える.

上の二つの関係式において $q\to 1$ とすると, ウェイトが一番高い項だけが残り

$$\begin{aligned}
&\zeta(6)+3\,\zeta(4,2)-6\,\zeta(3,3)=0,\\
&\zeta(6)-12\,\zeta(4,2)-3\,\zeta(4,1,1)+3\,\zeta(3,2,1)=0
\end{aligned}$$

という多重ゼータ値の関係式が得られる. つまり q 類似の方から見ると, 本当はこれらの関係式にウェイトが低い「おつり」の項があり, それが $q\to 1$ の極限で消えて線型な関係式になったと思うこともできる. このような見方に本質的な意味があるのかどうかは分からないが, 以上のことからすると Zagier 予想の q 類似としては次の問題を考えるのが妥当なのかも知れない.

Question 2. 形式的ベキ級数環 $\mathbb{Q}[[q]]$ において $Z_{\le k}=\sum_{2\le|\mathbf{k}|\le k}\mathbb{Q}\,\overline{\zeta}_q(\mathbf{k})$ の次元を求めよ.

References

[1] Aoki, T., Kombu, Y. and Ohno, Y., A generating function for sums of multiple zeta values and its applications, *Proc. Amer. Math. Soc.* **136** (2008), no. 2, 387–395.

[2] Aoki, T., Ohno, Y. and Wakabayashi, N., Multiple zeta-star values with fixed weight, depth and i-heights and generalized hypergeometric functions, in preparation.

[3] 荒川恒男, 金子昌信, 「多重ゼータ値入門」, MI レクチャーノート vol. 23, 2010.

[4] Bradley, D. M., Multiple q-zeta values, *J. Algebra* **283** (2005), no. 2, 752–798.

[5] Bradley, D. M., Duality for finite multiple harmonic q-series, *Discrete Math.* **300** (2005), no. 1-3, 44–56.

[6] Hoffman, M. E. and Ohno, Y., Relations of multiple zeta values and their algebraic expression, *J. Algebra* **262** (2003), no. 2, 332–347.

[7] Kaneko, M., On an extension of the derivation relation for multiple zeta values, in *The Conference on L-Functions*, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007, 89–94.

[8] Kaneko, M., Kurokawa, N. and Wakayama, M., A variation of Euler's approach to values of the Riemann zeta function, *Kyushu J. Math.* **57** (2003), no. 1, 175–192.

[9] Kawashima, G., A class of relations among multiple zeta values, *J. Number Theory* **129** (2009), no. 4, 755–788.

[10] Li, Z., Sum of multiple zeta values of fixed weight, depth and i-height, *Math. Z.* **258** (2008), no. 1, 133–142.

[11] Li, Z., Sum of multiple q-zeta values, *Proc. Amer. Math. Soc.* **138** (2010), no. 2, 505–516.

[12] Ohno, Y., A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values, *J. Number Theory* **74** (1999), no. 1, 39–43.

[13] Ohno, Y. and Okuda, J., On the sum formula for the q-analogue of non-strict multiple zeta values, *Proc. Amer. Math. Soc.* **135** (2007), no. 10, 3029–3037.

[14] Okuda, J. and Takeyama, Y., On relations for the multiple q-zeta values, *Ramanujan J.* **14** (2007), no. 3, 379–387.

[15] Ohno, Y. and Wakabayashi, N., Cyclic sum of multiple zeta values, *Acta Arith.* **123** (2006), no. 3, 289–295.

[16] Ohno, Y. and Zagier, D., Multiple zeta values of fixed weight, depth, and height, *Indag. Math. (N.S.)* **12** (2001), no. 4, 483–487.

[17] Tanaka, T., On the quasi-derivation relation for multiple zeta values, *J. Number Theory* **129** (2009), no. 9, 2021–2034.

[18] Takeyama, Y., A q-analogue of non-strict multiple zeta values and basic hypergeometric series, *Proc. Amer. Math. Soc.* **137** (2009), no. 9, 2997–3002.

[19] Takeyama, Y., Quadratic relations for a q-analogue of multiple zeta values, `arXiv:1008.0686`.

[20] Zagier, D., Values of zeta functions and their applications, First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), 497–512, Progr. Math., 120, Birkhaüser, Basel, 1994.

[21] Zhao, J., Multiple q-zeta functions and multiple q-polylogarithms, *Ramanujan J.* **14** (2007), no. 2, 189–221.

E-mail address: `takeyama@math.tsukuba.ac.jp`