

# 状態和としての多重ゼータ値

落合啓之 (Hiroyuki Ochiai), 九大数理\*

## 1 概要

この文章は、木本・山崎 [2] の部分交代多重 L 値に関する論文に対する補足である。多重ゼータ値 (MZV) や多重 L 値 (MLV) は、分割全体の集合上の状態和としての解釈をすることができる。和の定義に現れる条件を、粒子のボーズ統計、フェルミ統計という性質で解釈できる場合がある。そして、そのうち特別なもの、すなわち、変数の値がすべて同じものは、該当する MZV, MLV の母関数をそれぞれ完全対称関数 (complete symmetric function), 基本対称関数 (elementary symmetric function) で表わすことができる。これらの事実はそれぞれの段階では良く知られていると思われるが、実際に木本・山崎の変奏 (variation) でもそれが適用できることを説明する。

## 2 状態和と多重ゼータ値

### 2.1 index

多重ゼータ値を定義するために index の記号をおそらく最も流通していると思われる流儀で準備する。

$$\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n), \quad k_i \in \mathbf{Z}_{>0}.$$

$$\text{wt}(\mathbf{k}) = k = k_1 + \dots + k_n,$$

$$\text{dep}(\mathbf{k}) = n,$$

$$\text{ht}(\mathbf{k}) = s = \#\{i \mid k_i > 1\}.$$

収束のために  $k_1 > 1$  と仮定する。 $k_i$  が整数であることは前半ではあまり関係ない。

---

\*MZV as a state sum

## 2.2 分割の記号

分割の表し方を復習する。分割とは自然数の広義減少 (= 非増加) 有限列である。

$$\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0), \quad \lambda_i \in \mathbf{Z}_{>0}.$$

これに対し、

$$\begin{aligned} n &= \ell(\lambda) \quad \text{長さ (length),} \\ |\lambda| &= \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \end{aligned} \tag{1}$$

という記号を用いる。式 (1) が分割の名前の由来である。分割を Young 図形と同一視することがしばしばある。

また、分割の重複度表示を

$$\begin{aligned} \lambda &= 1^{m_1} 2^{m_2} 3^{m_3} \cdots, \\ m_i &\in \mathbf{Z}_{\geq 0} \text{ であり、有限個の } i \text{ を除いて } m_i = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

とする。これを、種類 1 の粒子が  $m_1$  個、種類 2 の粒子が  $m_2$  個、... 存在する“状態 (state)”とすることができる。

分割  $\lambda$  が与えられたときに重複度表示を得るには、 $m_i = \#\{j \mid \lambda_j = i\}$  とする。逆に重複度表示が与えられたとき  $m_1 + \cdots + m_{i-1} < j \leq m_1 + \cdots + m_i$  のとき  $\lambda_j = i$  と定める。これらに関しては [4] を参照。重複度表示では

$$\begin{aligned} \ell(\lambda) &= m_1 + m_2 + m_3 + \cdots, \\ |\lambda| &= m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \cdots \end{aligned}$$

となる。 $\ell(\lambda)$  は粒子の個数、 $|\lambda|$  は粒子のエネルギーと考えることができる。例えば、 $\lambda = (5, 4, 3, 3, 1, 1, 1) = 1^3 3^2 4^1 5^1$ ,  $\ell(\lambda) = 7$ ,  $|\lambda| = 18$ .

$$\mathcal{P}(\text{長さ } n) := \{\lambda \mid \text{分割}, \ell(\lambda) = n\}$$

を長さ  $n$  の分割全体の集合とする。 $\mathcal{P}(\text{長さ } n)$  は可算無限集合である。分割全体の集合を  $\mathcal{P}$  とする。 $\mathcal{P}$  は  $\mathcal{P}(\text{長さ } n)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) の disjoint union である。便宜上、 $\mathcal{P}(\text{長さ } 0) = \{\emptyset\}$  としておく。

### 2.3 多重ゼータ値の状態和としての解釈

多重ゼータ値は

$$\zeta(\mathbf{k}) = \zeta(k_1, \dots, k_n) = \sum_{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 1} \frac{1}{\lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \dots \lambda_n^{k_n}}$$

と定義される実数である。この和は長さ  $n$  の分割全体  $\mathcal{P}$ (長さ  $n$ ) を走る和と考えられる。  
重み関数(weight function)  $\varphi: \mathcal{P}$ (長さ  $n$ )  $\rightarrow \mathbf{R}$  を

$$\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda, \mathbf{k}) = \frac{1}{\lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \dots \lambda_n^{k_n}} \quad (3)$$

と定めると、多重ゼータ値は重み関数を  $\mathcal{P}$ (長さ  $n$ ) 上で足し上げたもの

$$\zeta(\mathbf{k}) = \langle \varphi \rangle_n := \sum_{\lambda \in \mathcal{P}(\text{長さ } n)} \varphi(\lambda)$$

と見なすことができる。一般の index  $\mathbf{k}$  に対する重み関数の値  $\varphi(\lambda, \mathbf{k})$  は重複度表示ではわかりやすい形にはならないが、特別な場合はわかりやすい形になる。すなわち、

$$\{k\}_n := \underbrace{(k, \dots, k)}_{n \text{ 個}}$$

と定めると、

$$\varphi(\lambda, \{k\}_n) = \frac{1}{(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n)^k} = \frac{1}{(1^{m_1} 2^{m_2} 3^{m_3} \dots)^k} \quad (4)$$

なお冗談のような注意だが、式(4)の右辺の  $i^{m_i}$  は重複度表示(2)のときに用いた単なるシンボルではなく、自然数(すなわち実数)としての値を表わす。繰り返しになるが

$$\zeta(\{k\}_n) = \langle \varphi(\cdot, \{k\}_n) \rangle_n$$

である。

### 2.4 MZSV

次に、MZVの親戚にあたる多重ゼータ・スター値(MZSV)の復習をする。この場合、和の範囲が

$$\zeta^*(k_1, \dots, k_n) = \sum_{\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > 0} \frac{1}{\lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \dots \lambda_n^{k_n}}$$

と変更される。このような分割、すなわち、異なる自然数への分割  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots$  を、strict な分割と呼ぶ ([1] では和因子が相異なると呼ばれている)。この条件は、重複度表示では  $m_i \leq 1$  という条件と同じである。一般の分割では  $m_i$  は任意の非負整数を取ることができ、その場合は粒子の種類としては boson(ボーズ粒子) と考えると便利である。strict な分割では  $m_i$  は 0 または 1 に限られる、すなわち、2 以上が許されないという排他律に縛られているため、粒子の種類としては fermion(フェルミ粒子) と考えると便利である。 $\mathcal{P}^{\text{strict}}$  で strict な分割の全体、 $\mathcal{P}_n^{\text{strict}}$  で長さ  $n$  の strict な分割の全体を表わすことにする。重み関数  $\varphi: \mathcal{P} \rightarrow \mathbf{R}$  を (3) と同じものと定めたとき、

$$\zeta^*(k_1, \dots, k_n) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n^{\text{strict}}} \varphi(\lambda)$$

となっている。

## 2.5 木本・山崎の考えた MLV の変奏 (variation)

彼らの定義を復習する。 $N$  を自然数とし、固定する。二つの下付き添字(自然数)を持つ関数を  $\varepsilon_{ij}^{(N)}$  は  $i = j \neq 0 \pmod{N}$  のとき 0, その他のとき 1 と定義する。 $k$  個の添字を持つ場合は  $\varepsilon_{\lambda_1 \dots \lambda_k}^{(N)} = \prod_{j=1}^{k-1} \varepsilon_{\lambda_j \lambda_{j+1}}^{(N)}$  と定義する。さらに、自然数  $M$  を固定し、原始  $M$  乗根を  $\omega_M = \exp(2\pi\sqrt{-1}/M)$  と選ぶ。MLV の変奏を

$$S_n^{(N,M)}(k_1, \dots, k_n) := \sum_{\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 1} \varepsilon_{\lambda_1 \dots \lambda_n}^{(N)} \frac{\omega_M^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}}{\lambda_1^{k_1} \dots \lambda_n^{k_n}} \quad (5)$$

で定義する。ただし、[2, (1.4)] とはアルファベットの使い方が異なる。また  $k_1, \dots, k_n$  の順序が逆になっている。ここでは上の MZV, MZSV の習慣と合わせた。この文章も [2] も主に  $k_1 = \dots = k_n$  の時しか扱わないのでまぎれは少ないと思われる。以上が定義の復習である。

この和を分割の上の状態和と解釈してみよう。この場合、 $\varepsilon_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{(N)}$  は分割  $\lambda$  の重複度表示を用いると、

$$\varepsilon_{\lambda}^{(N)} = \begin{cases} 1 & \forall i \in \mathbf{N} \setminus \mathbf{NN} \text{ に対して } m_i \leq 1 \text{ の場合} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる。「 $\lambda$  から  $N$  の倍数からなる parts を取り去った残りの分割が strict」という条件とも同じである。例えば、 $N = 2$ ,  $\lambda = (5, 4, 4, 3, 3, 2, 1)$  の場合、偶数の part を取り去ると  $(5, 3, 3, 1)$  という分割が得られるが、これは strict ではないので  $\varepsilon_{(5,4,4,3,3,2,1)}^{(2)} = 0$  である。このように重み関数が 0 という値をとりうる場合、状態和を

- 定義通りに、分割全体を渉る和と考え、ある条件を満たさない分割では重み関数はたまたま0になっていると考える、という考え方と
- 重み関数が0になっているような分割は取り除いて、重み関数が non-zero になっているような分割全体の集合上の和と考える、

の2つの捉え方がある。どちらも本質的には変わらないが、見やすさが違うので適宜使い分けあるいは言い換えする。今の MLV の変奏の場合、和の渉る範囲、つまり  $\varepsilon_\lambda^{(N)} \neq 0$  となるような  $\lambda$  の範囲は重複度表示では

$$j \in N \setminus NN \text{ なる粒子は fermion, } j \in NN \text{ なる粒子は boson} \quad (6)$$

と言い直すことができる。これが一つのポイントである。

### 3 粒子の種類と母関数

#### 3.1 一般的な定義

以上を踏まえて、和

$$\langle \varphi \rangle_n := \sum_{\lambda \in \mathcal{P}(\text{長さ } n)} \varphi(\lambda)$$

を考える。左辺の記号は物理の状態和を表わすときに用いられる記号であり、それを拝借した。状態和 (分配関数) の考え方に関しては、小森の報告 [3] も参照されたい。 $\varphi$  は  $\mathcal{P}(\text{長さ } n)$  上の実数値 (あるいは複素数値) 関数である。(実際は  $\varphi$  は初めから  $\mathcal{P}$  上で定義されていて、それを  $\mathcal{P}(\text{長さ } n)$  へ制限したものを考えることがほとんどである。逆にすべての  $n$  に対して  $\varphi$  が  $\mathcal{P}(\text{長さ } n)$  で定義されていれば、定義域の合併集合を考えることで  $\varphi$  が  $\mathcal{P}$  で定義されていると考えられる。) また、この無限和は実数あるいは複素数として絶対収束していると仮定する。

$\varphi$  に何の条件もなければ、これ以上式を簡約して和を求めることができないのは当然である。したがって、前節で扱った例を念頭に置いて、重み関数に関するいくつかの条件を考える。

- すべての分割に対して  $\varphi(1^{m_1} 2^{m_2} \dots) = \varphi(1^{m_1}) \varphi(2^{m_2}) \dots$  が成り立つとき、重み関数  $\varphi$  は 乗法的 (multiplicative) であると名付ける。ここで、例えば  $2^{m_2} = 1^0 2^{m_2} 3^0 \dots$  と略記した。

- $i \in \mathbf{N}$  とする。  $\varphi(i^m) = \varphi(i^1)^m$  がすべての  $m \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  に対して成り立つとき、粒子  $i$  は boson であると名付ける。
- $i \in \mathbf{N}$  とする。  $\varphi(i^m) = 0$  が  $m \geq 2$  に対して成り立つとき、粒子  $i$  は fermion であると名付ける。
- $i \in \mathbf{N}$  とする。  $\varphi(i^m) = 0$  が  $m \geq 1$  に対して成り立つとき、粒子  $i$  は粒子でないと呼ぶ。そうではないとき、粒子 (particle) であると呼ぶ。

目的は、値  $\langle \varphi \rangle_n$ , あるいはその母関数を計算することである。

## 3.2 母関数

経験的に  $n$  を走らせた母関数がしばしば有効に機能する。各  $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$  に対して  $\varphi : \mathcal{P}(\text{長さ } n) \rightarrow \mathbf{R}$  が与えられているとせよ。これを束ねて  $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathbf{R}$  を定義することができる。このとき、

$$Z(x) := Z(x; \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \langle \varphi \rangle_n = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} x^{\ell(\lambda)} \varphi(\lambda) \quad (7)$$

と定める。  $x$  はパラメータである。

### 3.2.1 収束

形式和 (7) の第 3 式にあらわれる  $\langle \varphi \rangle_n$  の部分は、  $\mathcal{P}(\text{長さ } n)$  上をわたる無限和である。ゼータのような場合には、この和は実数体 (あるいは複素数体) の位相で収束するようなものを考えている。これの母関数を考えているので、(7) の第 3 式の級数は  $x$  に関する形式べき級数と考えることもできる。ところが、べき級数環  $\mathbf{C}[[x]]$  の位相では、  $\mathbf{C}$  に離散位相を入れる。したがって、式 (7) の最右辺はこの位相では収束しない。  $\mathbf{C}$  の古典的な位相を保ちつつ  $\mathbf{C}[[x]]$  に合理的な位相を入れるのは難しいと思われる。そこで、通常之母関数の取り扱いと若干異なるが、ここでは  $x$  は形式変数とは思わず、絶対値の小さい実数または複素数と考え、母関数は収束べき級数の範囲で考えることとする。

### 3.2.2 レベル1：乗法的重み関数の場合

ここから重み関数に徐々に条件を課して、母関数を計算する。まず、重み関数が乗法的だと仮定する。このとき、分割の重複度表示を利用して計算すると

$$\begin{aligned} Z(x) &= \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} x^{m_1+m_2+\dots} \varphi(1^{m_1} 2^{m_2} \dots) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} \prod_{i \in \mathbb{N}} x^{m_i} \varphi(i^{m_i}) \\ &= \prod_{i \in \mathbb{N}} \left( \sum_{m=0}^{\infty} x^m \varphi(i^m) \right) \end{aligned} \quad (8)$$

となる。式(8)の大きな括弧の中の式は、粒子  $i$  の寄与を表わしている。

### 3.2.3 レベル2：さらにボース粒子とフェルミ粒子だけからなる場合

重み関数が乗法的であり、さらに粒子の種類は boson と fermion だけであると仮定して計算を進める。

$$\begin{aligned} Z(x) &= \prod_{i:\text{boson}} \sum_{m=0}^{\infty} x^m \varphi(i^m) \times \prod_{i:\text{fermion}} \sum_{m=0}^{\infty} x^m \varphi(i^m) \\ &= \prod_{i:\text{boson}} \frac{1}{1-x\varphi(i^1)} \times \prod_{i:\text{fermion}} (1+x\varphi(i^1)) \\ &= E(-x; \{\varphi(i^1) \mid i:\text{boson}\})^{-1} \times E(x; \{\varphi(i^1) \mid i:\text{fermion}\}) \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、有限または可算部分集合  $A \subset \mathbb{C}$  の基本対称式の母関数を  $E(x; A) = \prod_{a \in A} (1+ax)$  で定める。集合  $A$  には有限の重複があってもよく、その場合は重複の分だけかけ合わせる。  $A$  が無限集合の場合には、適切な発散条件を満たせば、 $E(x; A)$  は  $x$  の関数として原点付近で広義一様絶対収束し、正則関数を定める。以下、登場する関数はこのようなよい収束性を持つ状況で考える。

また、少し変形して、

$$\begin{aligned} Z(x) &= \prod_{i:\text{boson}} \frac{1}{1-x^2\varphi(i^1)^2} \times \prod_{i:\text{particle}} (1+x\varphi(i^1)) \\ &= E(-x^2; \{\varphi(i^1)^2 \mid i:\text{boson}\})^{-1} \times E(x; \{\varphi(i^1) \mid i:\text{particle}\}) \end{aligned} \quad (10)$$

という表示もある。

### 3.3 Application(適用)

特別な index の MZV, MZSV, および MLV の変奏に対して、上の計算を適用して母関数を求める。

#### 3.3.1 MZV

index  $\mathbf{k} = \{k\}_n$  の MZV の母関数

$$Z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \zeta(\{k\}_n)$$

を考える。重み関数  $\varphi : \mathcal{P}(\text{長さ } n) \rightarrow \mathbf{R}$  は、式(3) の index  $\mathbf{k} = \{k\}_n$  の場合、すなわち、 $\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda, \{k\}_n) = (\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{-k}$  である。重複度表示をすれば、

$$\varphi(\lambda) = \left(\frac{x}{1^k}\right)^{m_1} \left(\frac{x}{2^k}\right)^{m_2} \left(\frac{x}{3^k}\right)^{m_3} \cdots$$

となる。したがって、重み関数は乗法的であることがわかる。粒子の集合は  $\mathbf{N}$  であり、すべてボーズ粒子である。“粒子  $i$  が1つ存在する状態”に対する重み関数の値は  $\varphi(i^1) = 1/i$  で与えられる。したがって、

$$Z(x) = E(-x; \{1/i^k \mid i \in \mathbf{Z}\})^{-1} = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{i^k}\right)^{-1} \quad (11)$$

となる。

#### 3.3.2 MZSV

やはり index  $\mathbf{k} = \{k\}_n$  に対する MZSV の母関数

$$Z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \zeta^*(\{k\}_n)$$

を考える。重み関数は MZV のときと同じで、粒子  $i \in \mathbf{N}$  をすべてフェルミ粒子であるとするのだった。このとき、

$$Z(x) = E(x; \{1/i^k \mid i \in \mathbf{Z}\}) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{i^k}\right) \quad (12)$$

となる。これらは良く知られている。



### 3.3.3 variation

やはり、index  $k = \{k\}_n$  に対する partial alternating MLV の母関数

$$\mathcal{S}^{(N,M)}(k; x^{1/k}) := \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(N,M)}(\{k\}_n) x^n$$

を考える。左辺の中身の  $x^{1/k}$  がちよつと変なのだが、[2, 式 (2.8)] と同一になるように合わせた。 $x^{1/k}$  を改めて  $x$  と置き直すと式がきれいになる。§3.2 の  $Z(x)$  の計算結果と変数がずれないようにここではこの形で書いておく。§2.5 で説明したように、この場合、粒子  $i \in NN$  はボーズ粒子であり、粒子  $i \in N \setminus NN$  はフェルミ粒子である。重み関数は

$$\varphi(\lambda) = \frac{\omega_M^{|\lambda|}}{(\lambda_1 \cdots \lambda_n)^k} = \frac{\omega_M^{m_1+2m_2+3m_3 \cdots}}{(1^{m_1} 2^{m_2} 3^{m_3} \cdots)^k}$$

となる。したがって、重み関数は乗法的であり、粒子一つの状態に対する値は  $\varphi(i^1) = \omega_M^i / i^k$  で与えられている。母関数は、式 (10) を用いると

$$\mathcal{S}^{(N,M)}(k; x^{1/k}) = E(-x^2; \{\omega_M^i / i^k \mid i \in NN\})^{-1} \times E(x; \{\omega_M^i / i^k \mid i \in N\}) \quad (13)$$

$$= \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega_M^{Ni}}{(Ni)^k} x^2\right)^{-1} \left(1 + \frac{\omega_M^i}{i^k} x\right) \quad (14)$$

これは [2, Theorem 2.7] の前段階にあたる。

母関数  $\mathcal{S}^{(N,M)}$  が式 (10) あるいは式 (13) のように分解することは、[2, Theorem 2.7] の証明中にすでに言及されており、分解式  $\mathcal{S} = \mathcal{H}\mathcal{E}$  がそれにあたる。 $\mathcal{H}$  がボーズ粒子の項、すなわち右辺の第 1 項にあたり、 $\mathcal{E}$  が粒子全体の項、すなわち右辺の第 2 項にあたる。 $\mathcal{E}$  の基本対称関数表示は [2, Lemma 2.6] の証明の冒頭にある。 $\mathcal{H}$  の完全対称関数表示は [2, Lemma 2.5] の証明の冒頭にあり、良く知られているように完全対称関数の母関数は基本対称関数の母関数の逆数である。

[2] では  $\mathcal{S} = \mathcal{H}\mathcal{E}$  の証明に vertical strip の技法を用いている。このノートでは重み関数の乗法性を用いており、そこが違いである。[2] の vertical strip を用いる証明の部分はそれほど長くはない (pp2507–2508) のだが、組み合わせ的考察に慣れている必要があるかもしれない。このノートの議論はそれを避けて母関数で処理しているので、議論を一般化する際にやりやすい可能性がある。

### 3.3.4 非可換調和振動子のスペクトルゼータ関数の特殊値を与える和

表題の和は

$$S_{n,p} = \sum_{2p \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 1} \varepsilon_\lambda^{(2)} \frac{(-1)^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}}{\lambda_1^2 \lambda_2^2 \dots \lambda_n^2}$$

と定義される ([2, p 2505]) もので、一ノ瀬・若山によって導入された上記のスペクトルゼータ関数の正の整数点での特殊値を表示するのに用いられる。 $S_n^{(N,M)}(\{k\}_n)$  の  $N = M = k = 2$  の場合  $S_n^{(2,2)}(\{2\}_n)$  は

$$S_n^{(2,2)}(\{2\}_n) = \lim_{p \rightarrow \infty} S_{n,p}$$

と考えることができ、これが [2] の研究の端緒である。状態和の見方では、 $p$  を有限で止めるということは、前節の状態和で粒子の種類を  $N$  全体ではなく、有限集合  $\{1, 2, \dots, 2p\}$  に限るということにあたる。したがって、§3.2 の考察を適用することができる。この場合は、

$$\begin{aligned} Z(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} S_{n,p} x^n \\ &= E(-x; \{1/(2i)^2 \mid i = 1, 2, \dots, p\})^{-1} \times E(x; \{-1/(2i-1)^2 \mid i = 1, 2, \dots, p\}) \\ &= \prod_{i=1}^p \frac{1 - \frac{x}{(2i-1)^2}}{1 - \frac{x}{(2i)^2}} \end{aligned}$$

この場合、基本対称関数は有限積になり、従って、結果の式は  $x$  の有理式である。

### 3.3.5 補足：対称関数とゼータ値

index が等しい MZV, MLV の値を基本対称関数あるいは完全対称関数の特殊化として表わすということは [5] で広く行なわれている。さらに、ボーズ粒子的なものやフェルミ粒子的なものを混ぜ合わせるということも [5, Remark 2.9] で議論されているが、そこでは、MLV の変奏、partial alternating multiple L values も同じ考えで扱えることははっきりとは述べられていないようである。

上記の基本対称関数 (11), (12) は、 $k$  個のガンマ関数の積、あるいは  $k/2$  個の三角関数の積で表示することができる。(14) も同様の表示を持つ。これらは [2] の Lemma 2.5 の証明の 4 行目以降に丁寧に扱われているので、ここで新たに付け加えることはない。

### 3.3.6 注：適用限界について

なお、index  $k$  が  $\{k\}_n$  と揃っていない時も状態和としての解釈は許す。しかし、重み関数は乗法的ではなくなり、たいていの場合は、分割の重複度表示を用いては、重み関数はきれいに書けない。従って、状態和としての解釈をして求められる MZV はあまり多くはないと思われる。ただし、単独の MZV ではなく、MZV のいくつかの和のようなものであれば、分割上の和としての意味がつく可能性は否定できないのではないか。

## 3.4 分割の母関数の基本式

$$\frac{1}{(x; q)} := \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - xq^i} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{\lambda \in \mathcal{P}(\text{長さ } n)} q^{|\lambda|} = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}} x^{\ell(\lambda)} q^{|\lambda|}, \quad (15)$$

$$(-x; q) := \prod_{i=1}^{\infty} (1 + xq^i) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_{\text{strict}}^*} q^{|\lambda|} = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_{\text{strict}}} x^{\ell(\lambda)} q^{|\lambda|}. \quad (16)$$

という等式は分割の理論で良く知られている。上の式がボーズ粒子、下の式がフェルミ粒子の場合である。この場合の重み関数も乗法的であり、一粒子状態での値は  $\varphi(i^1) = q^i$  である。これも上の計算、すなわち対称関数の母関数の特殊化でも得られる。このようなデデキントエータ関数的なものとはゼータ値の間にはいまのところ形式的類似しかないが、MZV の母関数と分割数の母関数の間に何か関係があると面白い。

## 4 基本対称関数の特殊化

この節では  $N = M = 2$  の場合を考える。前節で  $n$  を走らせて足し合わせた母関数  $S^{(2,2)}(k; x^{1/k})$  を考えてきたが、この節ではこの母関数で  $k$  を変化させたときの関係を見る。

## 4.1 plethysm 構造

まず、前節の結果で、 $N = M = 2$  を代入して

$$\mathcal{S}^{(2,2)}(k; x^{1/k}) = E(-x; \{1/i^k \mid i : \text{boson}\})^{-1} \times E(x; \{-1/i^k \mid i : \text{fermion}\}) \quad (17)$$

$$= \prod_{i \in \mathbb{N}:\text{even}} \left(1 - \frac{1}{i^k} x\right)^{-1} \times \prod_{i \in \mathbb{N}:\text{odd}} \left(1 - \frac{1}{i^k} x\right) \quad (18)$$

となっている。(三角関数を用いた表示は [2, Theorem 3.3 の式 (3.10)] にある。) この式を見ると、 $k$  が正の偶数のとき、性質

$$\mathcal{S}^{(2,2)}(k; x) = \prod_{j=1}^{k/2} \mathcal{S}^{(2,2)}(2; \omega_k^j x) \quad (19)$$

が成り立つことが分かる。この事実、すなわち、「 $2k$  での情報が  $2$  での情報から何らかの操作で得られる」という事実は、[2] には概念の導入という形ほど明示的には書かれていないものの、[2, 式 (3.7)] から [2, 式 (3.8)] を導くプロセスに表れている。従ってこの事実を plethysm 構造 と呼ぶことにする。

## 4.2 母関数から値の表示を求める

$\mathcal{S}_n^{(2,2)}(\{k\}_n)$  を得ることは母関数  $\mathcal{S}^{(2,2)}(k; x^{1/k})$  の原点でのテーラー展開の係数を求めることにあたる。それは

- (i)  $k$  が正の偶数のとき  $\mathcal{S}(k; x)$  が plethysm 構造 (19) を持つこと
- (ii) plethysm 構造を持つ (一般の) 関数の性質
- (iii)  $\mathcal{S}^{(2,2)}(2; x)$  の原点でのテーラー展開

の組み合わせで得られる。次節では、このうち、性質 (i)(ii) を吟味する。性質 (iii) は具体的には三角関数の無限積表示とベルヌイ数の母関数による定義式から導かれる

$$\mathcal{S}^{(2,2)}(2; x) = \frac{\pi x}{2} \cot \frac{\pi x}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n} \pi^{2n}}{(2n)!} x^{2n}. \quad (20)$$

である (see §4.6)。

### 4.3 plethysm 構造を持つ関数のテーラー展開

性質 (ii) を少し具体的に書いておく。添字の字体が小さくならないように  $k/2 = l$  とおく。一般の偶関数  $f(x)$  の (原点での) テーラー展開が  $f(x) = \sum c_n x^n$  と与えられたとき、 $\prod_{j=1}^l f(\omega_{2l}^j x)$  の原点でのテーラー展開は

$$\prod_{j=1}^l f(\omega_{2l}^j x) = \sum_{n_1, \dots, n_l=0}^{\infty} c_{n_1} \cdots c_{n_l} \omega_{2l}^{n_1+2n_2+\dots+ln_l} x^{n_1+n_2+\dots+n_l} \quad (21)$$

$$= \sum_{\ell(\lambda) \leq l} \langle p_l \circ h_n, m_{\lambda/2} \rangle c_{\lambda} x^{|\lambda|} \quad (22)$$

と書ける。  $c_{\lambda} = c_{\lambda_1} c_{\lambda_2} \cdots c_{\lambda_l}$  であり、  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$  の中に奇数が一つでも含まれていたら 0 である。  $p_l$  はベキ和対称式、  $h_n$  は完全対称式、  $\circ$  は plethysm を表わし、  $m_{\lambda/2}$  は monomial 対称式である [4]。証明は特別な場合に [2, Theorem 3.3] に与えられているが、一般の場合も全く同じである。

### 4.4 状態和からの plethysm 構造の理解

性質 (i) の証明を与えておく。一般に、重み関数が乗法的であるような状態和とその母関数を考える。このとき状態和の母関数は各粒子の種類毎の母関数の積なので、状態和の母関数が plethysm 構造を持つためには、粒子が一種類の場合に plethysm 構造を持てば十分である。したがって、粒子の種類ごとに plethysm 構造があるかどうかを吟味する。

- ボーズ粒子の場合。  $i$  が偶数の自然数の時がボーズ粒子だった。状態和の母関数は  $\left(1 - \frac{\omega_2^i x}{i^k}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{x}{i^k}\right)^{-1}$  である。正の偶数  $k$  に対して、  $\Phi_k(x) = 1 - \frac{x}{i^k}$  とおく。すると、plethysm 構造があるという事実は、次の多項式の等式

$$\Phi_k(x^k) = 1 - \frac{x^k}{i^k} = 1 - \left(\frac{x^2}{i^2}\right)^{k/2} = \prod_{j=1}^{k/2} \Phi_2(\omega_{k/2}^j x^2) \quad (23)$$

から導かれる。

- フェルミ粒子の場合。  $i$  が奇数の自然数の時がフェルミ粒子だった。状態和の母関数は  $1 + \frac{\omega_2^i x}{i^k} = 1 - \frac{x}{i^k}$  である。この場合も、全く同じ式 (23) から plethysm 構造があることが示される。

- また、もし  $i$  が粒子ではない場合、状態和の母関数は 1 なので自明な意味で plethysm 構造がある。

この説明を見ると、付加されている指標の符号が絶妙であることがわかる。即ち、一般に、基本対称式の母関数では不定元  $x$  の係数の符号がプラスであり、完全対称式の母関数では不定元  $x$  の係数の符号がマイナス (そのかわり全体に負冪がかかるけど) という差異がある。ところが  $\omega_N = -1$  に付随する指標  $\omega_2^i = (-1)^i$  がちょうど粒子  $i$  の偶奇で異なるため、打ち消し合いが起こってどちらも係数がマイナスになる。一般に、素朴には、MZVの方が基本的であり、MLVはそれに指標を付加した数学的な拡張であると考えられるが、この場合は、MZVよりも partial alternating MLV に対応する方がよりやさしい構造を持っていることの理由がこの事実 (plethysm 構造) によって理解できるように思う。

#### 4.5 $k$ が正の奇数のとき

$N = M = 2$  の仮定は維持したまま、 $k$  が正の奇数のときも plethysm 構造

$$S^{(2,2)}(k; x) = \prod_{j=1}^k S^{(2,2)}("1"; \omega_k^j x)$$

は存在するようになる。しかし、右辺のアダマール積は収束しないので、ガンマ関数の無限積展開でするような補正項をかける必要がある。この修正を施すのであれば、始めから具体的にガンマ関数で表示 ([2, p2510 Section 3 の最初の式]) して解析するのと大差ないので、奇数の場合は、plethysm 構造に気づくことは偶数のときほど有用でない。

#### 4.6 $S^{(2,2)}(2; x)$ はなぜ簡単な形をしているか?

式 (20) は良く知られているのだが、なぜ、 $S^{(2,2)}(2; x)$  は極めて良い表示を持っているのか、すなわち、テーラー展開係数が単独の Bernoulli 数で書ける、あるいは同じことだが、Riemann zeta の正の偶数点での特殊値ひとつで書けるのか、対称関数の観点からその成立根拠を見てみよう。記号の簡単のため

$$A(x) := E(-x^2; \{i^{-2} \mid i \in \mathbf{N}, \text{ even}\}), \quad (24)$$

$$B(x) := E(-x^2; \{i^{-2} \mid i \in \mathbf{N}, \text{ odd}\}) \quad (25)$$

と定める。実際は、

$$A(x) = \frac{2}{\pi x} \sin \frac{\pi x}{2}, \quad B(x) = \cos \frac{\pi x}{2} \quad (26)$$

であることを知っているのだが、ここでは気づかないふりをしておく。

$$S^{(2,2)}(2; x) = B(x)/A(x)$$

の原点でのテーラー展開を書くことが目標である。ここで必要となる式は

$$(xA(x))' = B(x) \tag{27}$$

である。この式を認めると、

$$S^{(2,2)}(2; x) = x(xA(x))'/(xA(x)) = x \frac{d}{dx} \log(xA(x)) \tag{28}$$

$$= 1 - 2x^2 P(x^2, \{i^{-2} \mid i \in \mathbb{N}, \text{even}\}) = 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\zeta(2m)}{2^{2m}} x^{2m} \tag{29}$$

となる ([4, I.2.Example 21])。ここで、(28) から (29) への変形では、ベキ和対称関数の母関数を

$$P(x; A) := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{a \in A} a^n x^{n-1}$$

と定義したとき、

$$x \frac{d}{dx} \log(xE(-x^2; A)) = 1 - 2x^2 P(x^2; A)$$

となることを用いた。計算式 (29) はなぜ、 $S^{(2,2)}(2; x)$  が簡単になるのかを説明している。説明されていないのは、式 (24) と式 (25) を定義に用い、式 (26) を用いないで、式 (27) が成立する理由を述べることができるか? という点である。私はこの疑問に答えることができていない。

## 参考文献

- [1] G. アンドリューズ, K. エリクソン, 整数の分割, 2006, 数学書房 (原著は Integer Partitions, 2004).
- [2] K. Kimoto and Y. Yamasaki, A variation of multiple  $L$ -values arising from the spectral zeta function of the non-commutative harmonic oscillator, Proc. AMS, 137 No. 8, 2009, 2503–2515.

- [3] 小森靖, in this volume.
- [4] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 2nd ed., Oxford Univ. Press, 1995.
- [5] Y. Yamasaki, Evaluations of multiple Dirichlet  $L$ -values via symmetric functions, arXiv:0712.1639

Hiroyuki Ochiai, [ochiai@math.kyushu-u.ac.jp](mailto:ochiai@math.kyushu-u.ac.jp)