数理解析研究所講究録
第 1813 巻 2012 年 139-148

双曲的曲線の配置空間の副 ℓ 基本群への外ガロア作用と織田の問題について

京都大学数理解析研究所　高尾尚武 (Naotake Takao)
Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University

1. はじめに

有理数体上の絶対ガロア群 $G_{\mathbb{Q}}$ の $\pi_1(\mathbb{P}^1_{\bar{\mathbb{Q}}}\setminus\{0,1,\infty\})$ への外作用は忠実で、その像は Grothendieck-Teichmüller 群 GT に含まれています。

球面純組み紐群 P_n の中心降下列に付随する次数付 Lie 環 $\mathcal{P}_n$ の、外部導分 Lie 環の組み紐的（$\Leftrightarrow$ 標準的生成元には随伴的に作用する）導分のなす部分環 $\mathcal{D}_n$ の対称群 S_n 固定部分の（n を走らせて）つくる塔は次の意味で安定性を持ちます：次数付 Lie 環としての準同型

$$\mathcal{D}_{n+1}^{S_{n+1}}\to\mathcal{D}_n^{S_n},$$

は伊原康隆氏によって $n\geq 4$ で単射、$n\geq 5$ で同型となることが示されています ([5]、[6])。次数付 Lie 環

$$\varprojlim_n \mathcal{D}_n^{S_n}$$

($\simeq\mathcal{D}_5^{S_5}$) を安定導分環と呼び、$\mathcal{D}$ と書きます。

GT の次数付 Lie 環版と見做せるこの $\mathcal{D}$ は、$\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_\ell$ したものには（ℓ:素数）、ℓ 進ガロア Lie 環 $\mathcal{G}^{(\ell)}\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell$ が埋め込まれており、同型が予想されています。一方 $\mathcal{D}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ の次数付双対 $\mathbb{Q}$ 線型空間から新ゼータ次数付 $\mathbb{Q}$ 線型空間 $\mathcal{Z}_{>2}/(\mathcal{Z}_{>0})^2$ に全射を持つことが古庄英和氏によって証明されています（[2]）。また最近 F.Brown 氏が $\mathcal{G}^{(\ell)}\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell$ の（$\mathbb{Q}_\ell$ 上の次数付 Lie 環としての）構造に関する予想 (Deligne-伊原予想）をモティーフ論を用いて解決したということをアナウンスしています。

本稿ではこの安定性の高種数版についての結果とその応用について紹介させていただきます。筆者の無知無学のため、最善の定式化ではないかもしれませんし、触れていない結果や文献もあるかと思いますが、ご指導ご鞭撻いただければ幸いです。

2 章で組み紐的導分環の定義と主定理を、3 章で主定理の外ガロア表現、普遍モノドロミー表現への応用（位相幾何の数論への応用）を、4 章で Johnson 準同型の余核の下からの評価への織田予想の応用（数論の位相幾何への応用）を、5 章で主定理の証明の概略を、簡単に紹介させていただきます。

2. 組み紐的外導分環の安定性

R を型 (g,r) の Riemann 面とします。（種数 g、n 点抜き。）その（位相的）基本群 $\pi_1^{top}(R)$ は型で決まり、標準的な表示

$$\text{生成元}\qquad x_i,z_j\qquad(1\leq i\leq 2g,1\leq j\leq r),$$

$$\text{基本関係式}\qquad \prod_{i=1}^{g}[x_i,x_{i+g}]\prod_{j=r}^{1}z_j=1,$$

が知られています。

各 $n=1,2,\cdots$ に対し、R 上の相異なる順序付 n 点の配置空間:

$$R_n = R^n \setminus \cup_{1\le i<j\le n}\Delta_R(i,j),$$
$$\Delta_R(i,j) = \{(x_1,\ldots,x_n)\in R^n | \, x_i = x_j\},$$

を考えます。この基本群も型と次元 n で決まり、(長大になるのでここには書きませんが) 具体的な有限表示が知られています ([15])。以下 $\pi_1^{top}(R_n)$ を $P_{g,r,n}$ と書きます。$P_{0,0,n}$ は n 次の球面純組み紐群に他なりません。

R_{n+1} から R_n への、j 番目の点を忘れる自然な写像 f_j $(1\le j\le n+1)$ に伴って、基本群の短完全列

$$1 \to N_{n+1}^{(j)} \to P_{g,r,n+1} \overset{\pi_1(f_j)}{\to} P_{g,r,n} \to 1,$$

が存在します。$N_{n+1}^{(j)}$ はファイバー (R から n 点を除いた Riemann 面) の基本群であり $P_{g,r+n,1}$ つまり階数 $2g+r+n-1$ の自由群に同型です。$N_{n+1}^{(j)}$ の標準的な生成元 (の $P_{g,r,n+1}$ での像) を $x_1^{(j)},\cdots,x_{2g}^{(j)},z_1^{(j)},\cdots,z_{r+n+1}^{(j)}$ と書くことにします。($z_{r+j'}^{(j)}$ は j 番目の紐と j' 番目の紐の 1 回からみを表します。$z_{r+j}^{(j)}=1$ に注意してください。) 外部自己同型群 $\mathrm{Out}(P_{g,r,n})(=\mathrm{Aut}(P_{g,r,n})/\mathrm{Inn}(P_{g,r,n}))$ の組み紐的部分群 $\Gamma_{g,r,n}$ を (本稿では)、各 $N_n^{(j)}$ $(1\le j\le n)$ を保ち $\langle z_{j'}^{(j)}\rangle$ の共役類 $(1\le i\le r+n, 1\le j\le n)$ の集合を保つもの全体の作る部分群とします:

$$\Gamma_{g,r,n} := \tilde{\Gamma}_{g,r,n}/\mathrm{Inn}P_{g,r,n},$$
$$\widetilde{\Gamma}_{g,r,n} := \left\{ f\in \mathrm{Aut}P_n \;\middle|\; \begin{array}{c} f(N_n^{(j)})\subset N_n^{(j)}\,(1\le j\le n), \\ f(z_{j'}^{(j)}) \overset{conj.}{\sim} (z_{\sigma(j')}^{(j)})^{\alpha}\,(\exists\alpha\in\mathbb{Z}^{\times},\exists\sigma\in S_{r+n}) \\ (1\le j\le n, \quad 1\le j'\le r+n) \end{array} \right\}.$$

$\Gamma_{g,r,n+1}$ の元は $N_{n+1}^{(j)}$ $(1\le j\le n+1)$ を保つので $\pi_1(f_j)$ は

$$\Gamma_{g,r,n+1}\to\Gamma_{g,r,n}$$

を引き起こします $(n=1,2,\cdots)$。

$P_{g,r,n}$ には次のようなフィルトレーションが入ります:

$$P_{g,r,n}(1) = P_{g,r,n},$$
$$P_{g,r,n}(2) = [P_{g,r,n},P_{g,r,n}]\langle z_{j'}^{(j)}; 1\le j\le n, 1\le j'\le r+n\rangle,$$
$$P_{g,r,n}(m) = \langle [P_{g,r,n}(m'),P_{g,r,n}(m'')]; m'+m''=m\rangle\,(m\ge 3).$$

このフィルトレーション (重さフィルトレーション) は中心的なので、次数付 $\mathbb{Z}$-加群

$$\mathcal{P}_{g,r,n} := \bigoplus_{m\ge1} P_{g,r,n}(m)/P_{g,r,n}(m+1),$$

は自然に次数付 $\mathbb{Z}$-Lie 環になります。

$\mathcal{P}_{g,r,n}$ の有限表示は得られています ([14])。生成元は $X_i^{(j)} := x_i^{(j)} \bmod P_{g,r,n}(2)$、$Z_{j'}^{(j)} := z_{(j')}^{(j)} \bmod P_{g,r,n}(3)$、$1\le i\le 2g$、$1\le j\le n$、$1\le j'\le r+n$ です。($Z_{r+j}^{(j)}=0$ に注意してください。) 基本関係式は本稿では直接は使わない上長くなるので省略します。

$\pi_1(f_j)$ （$1 \le j \le n+1$）は次数付 Lie 環の短完全列

$$1 \to \mathcal{N}_{n+1}^{(j)} \to \mathcal{P}_{g,r,n+1} \stackrel{\mathrm{Gr}\pi_1(f_j)}{\to} \mathcal{P}_{g,r,n} \to 1,$$

を引き起こします。$\mathcal{N}_{n+1}^{(j)}$ は $\mathcal{P}_{g,r+n,1}$ つまり階数 $2g+r+n-1$ の自由 Lie 環に同型です。

$\{P_{g,r,n}(m)\}_{m\ge1}$ は $\Gamma_{g,r,n}$ のフィルトレーション（重さフィルトレーション）

$$\tilde{\Gamma}_{g,r,n}(m) := \mathrm{Ker}(\tilde{\Gamma}_{g,r,n}^{(\text{pro-}\ell)} \to \prod_{d\ge1} \mathrm{Aut}(P_{g,r,n}(d)/P_{g,r,n}(d+m))),$$

$$\Gamma_{g,r,n}(m) := \tilde{\Gamma}_{g,r,n}(m)\mathrm{Inn}(P_{g,r,n})/\mathrm{Inn}(P_{g,r,n}),$$

を引き起こします。$\{\Gamma_{g,r,n}(m)\}_{m\ge1}$ は $\Gamma_{g,r,n}(1)$ で中心的になりますので、次数付 $\mathbb{Z}$-加群

$$\mathrm{Gr}\Gamma_{g,r,n} := \bigoplus_{m\ge1} \mathrm{gr}^m\Gamma_{g,r,n},$$

$$\mathrm{gr}^m\Gamma_{g,r,n} := \Gamma_{g,r,n}(m)/\Gamma_{g,r,n}(m+1),$$

は自然に次数付 $\mathbb{Z}$-Lie 環になります。

$\mathcal{P}_{g,r,n}$ の外部導分 Lie 環の組み紐的部分 Lie 環 $\mathcal{D}_{g,r,n}$ を次のように定義します：

$$\mathcal{D}_{g,r,n} := \tilde{\mathcal{D}}_{g,r,n}/\mathrm{Inn}(\mathcal{P}_{g,r,n}),$$

$$\tilde{\mathcal{D}}_{g,r,n} := \left\{ D \in \mathrm{Der}(\mathcal{P}_{g,r,n}) \;\middle|\; \begin{array}{c} D(\mathcal{N}_n^{(j)}) \subset \mathcal{N}_n^{(j)}\ (1 \le j \le n), \\ D(Z_{j'}^{(j)}) = [T_{j'}^{(j)}, Z_{j'}^{(j)}]\ (\exists T_{j'}^{(j)} \in \mathcal{P}_{g,r,n}) \\ (1 \le j \le n, \quad 1 \le j' \le r+n) \end{array} \right\}.$$

$\mathcal{D}_{g,r,n+1}$ の元は $\mathcal{N}_{n+1}^{(j)}$ （$1 \le j \le n+1$）を保つので $\mathrm{Gr}\pi_1(f_j) : \mathcal{P}_{g,r,n+1} \to \mathcal{P}_{g,r,n}$ は

$$\mathcal{D}_{g,r,n+1} \to \mathcal{D}_{g,r,n},$$

を引き起こします（$n = 1, 2, \cdots$）。

この塔の安定性が調べたいものでした。$g = 0, r = 0$ の時、この準同型は第 1 節でふれたものに一致します。つまり、伊原氏によって $n \ge 4$ で単射 ([5])、対称群 S_n 固定部分について $n \ge 5$ で全射 ([6]) となることが証明されています。また、中村博昭氏・上野亮一氏・筆者によって $r+n \ge 2$ の時は単射であることが示されています ([14])。角皆宏氏によって $g \ge 1, r = 0$ の時の対称群 S_n 固定部分については $n \ge 3$ で全射であることが示されています（[17]）。角皆氏は同じ論文の中で $g \ge 1, r+n \ge 4$ の時 S_n の $\mathcal{D}_{g,r,n}$ への作用は自明になることも明らかにしています。

本稿の主定理は次のものです：

Theorem 2.1. $2g-2+r>0$ とする。この時

$$\mathcal{D}_{g,r,n+1} \to \mathcal{D}_{g,r,n},$$

は単射（$n = 1, 2, \cdots$）。

Remark 2.2. 以上の話の副 ℓ 版（離散群 $P_{g,r,n}$ の代わりにその副 ℓ 完備化（*cf. 3.1* 節）をとったものから出発した話）についても、（自明な修正を除いて）全く同じ結論が得られます。

一方この定理の帰結として、副ℓ版では、(もともとの) 群の塔の安定性についても、次の定理が得られます：

Theorem 2.3. $2g-2+r>0$とする。この時

$$\Gamma^{(pro\text{-}\ell)}_{g,r,n+1} \to \Gamma^{(pro\text{-}\ell)}_{g,r,n},$$

は単射 ($n=1,2,\cdots$)。

Remark 2.4. 群版については、星裕一郎氏と望月新一氏によって、遠アーベル幾何の組み合わせ論的 *Grothendieck* 予想型の定理を用いた別証が与えられています ([4])。その上、副ℓ版の全射性について、$n\geq 3$かつ$r+n\geq 4$で全射ということが証明されています。

群版については、副有限版がとりわけ重要な問題だと思います。この場合も、副ℓ版と全く同じこと ($\forall n$に対して単射、$n\geq 3$かつ$r+n\geq 4$で全射) が証明されています。

離散版については、$\forall n$に対して全単射であることが証明されています。

3. 外ガロア表現と普遍モノドロミー表現

3.1. **外ガロア表現.** kを体、Xをk上の連結代数多様体、$\bar{x}:\mathrm{Spec}\Omega\to X$ (Ωは代数閉体) を幾何的点とするとき、エタール基本群 (または代数的基本群) と呼ばれる副有限群 (有限群による射影系の極限) $\pi_1(X,\bar{x})$が定まります。(Xの有限次エタール連結ガロア被覆の$\bar{x}$上のファイバーの自己同型群たちによる射影系の極限として定義されます。正確な定義は [3] 等を見てください。)

基点$\bar{x}$を取り変えても、(副有限群として) 同型になります。位相幾何における基本群の時と同様、内部自己同型を除いて標準的な同型です。本稿では以下$\bar{x}$を省略して$\pi_1(X)$と書きます。

kの標数が0で、その代数閉包$\bar{k}$の$\mathbb{C}$への埋め込みが与えられているときは、Riemannの存在定理によって、

$$\pi_1(\bar{X})\cong \widehat{\pi_1^{top}(X_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}))}.$$

が成り立ちます。ここで$X_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$は$X$と$\bar{k}\hookrightarrow\mathbb{C}$に付随する複素解析空間、$\bar{X}:=X\otimes_k\bar{k}$、$\widehat{G}$は離散群$G$の副有限完備化

$$\varprojlim_{\substack{G\rhd N,\\ (G:N)<\infty}} G/N$$

を表します。したがって、$\pi_1(\bar{X})$は$X_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$のホモトピー型で決まります。$X$が曲線の場合、その型$(g,r)$で決まります。($g$は$X$の滑らかなコンパクト化$X^*$の種数、$r$は$X^*(\bar{k})\setminus X(\bar{k})$の濃度です。)

Xが幾何的連結 ($\Leftrightarrow \bar{X}$が連結) なら、副有限群の短完全系列

$$1\to\pi_1(\bar{X})\to\pi_1(X)\overset{p_{X/k}}{\to}G_k\to 1,$$

があることが知られています。G_k は k の絶対ガロア群です。この短完全系列は連続群準同型

$$\phi_{X/k} : G_k \to \mathrm{Out}(\pi_1(\bar{X}))(= \mathrm{Aut}(\pi_1(\bar{X}))/\mathrm{Inn}(\pi_1(\bar{X}))),$$
$$\sigma \mapsto (\gamma \mapsto \tilde{\sigma}\gamma\tilde{\sigma}^{-1}) \bmod \mathrm{Inn}(\pi_1(\bar{X})),$$

を引き起こします。ここで $\tilde{\sigma} \in \pi_1(X)$ は $\sigma \in G_k$ の $p_{X/k}^{-1}$ による任意のリフトです。

この写像は、定義に戻って考えれば、(そして誤解を恐れずに一言で言うと、)「$\bar{X}$ 上の不分岐被覆の変換の系」を「ガロアの元でひねった系」に移す作用です。ガロア群の元は一般に基点を固定するとは限らないので、内部自己同型による不定性が残ります。

この準同型 $\phi_{X/k}$ はしばしば外ガロア表現と呼ばれています。

以下 k を標数 0 の体で、$\bar{k} \hookrightarrow \mathbb{C}$ が与えられているとします。C を k 上の滑らかな幾何的連結な曲線、C_n を C の n 次の配置空間とします $(n = 1, 2, \cdots)$。ℓ を素数とします。
このとき、外ガロア表現 $\phi_{C_n/k}$ の商表現

$$\phi_{C_n/k}^{(\text{pro-}\ell)} : G_k \to \mathrm{Out}(\pi_1^{\text{pro-}\ell}(\bar{C}_n)),$$

$(\pi_1^{\text{pro-}\ell}(\bar{C}_n)$ は $\pi_1(\bar{C}_n)$ の最大副 ℓ 商、ここでは $\pi_1^{top}(C_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})_n)(\simeq P_{g,r,n})$ の副 ℓ 完備化に同型) に付随して体の塔 $\{k_{C,n}^{(\text{pro-}\ell)}(m)\}_{m\geq 1}$ が定義されます:

$$k_{C,n}^{(\text{pro-}\ell)}(m) := \bar{k}^{(\phi_{C_n/k}^{(\text{pro-}\ell)})^{-1}(\Gamma_{g,r,n}^{(\text{pro-}\ell)}(m))},$$

$$k_{C,n}^{(\text{pro-}\ell)} := \bar{k}^{\mathrm{Ker}(\phi_{C_n/k}^{(\text{pro-}\ell)})}.$$

この体の塔の n に関する安定性については、$g = 0, r = 0$ の時伊原氏が、$2g - 2 + r > 0, r + n \geq 2$ の時は伊原氏と金子昌信氏が証明しています ([5],[8])。定理 2.1 の副 ℓ 版から次の定理を証明するのは難しくはありません。

Theorem 3.1. C/k を型 (g, r) の双曲的曲線 ($\Leftrightarrow 2g - 2 + r > 0$) とする。
この時、体の塔 $\{k_{C,n}^{(pro\text{-}\ell)}(m)\}_{m\geq 1}$ は $n(\geq 1)$ に依らない。
特に

$$k_{C,n}^{(pro\text{-}\ell)} = k_{C,1}^{(pro\text{-}\ell)}.$$

こうして affine の時同様、proper 曲線 C/k に対しても、体の塔 $\{k_{C,n}^{(\text{pro-}\ell)}(m)\}_{m\geq 1}$ は n に依らないことも示されました。ガロア表現の核の体は曲線上の ℓ 冪次不分岐被覆の最小共通定義体と解釈できます。この意味で $n \geq 2$ と $n = 1$ の時が同じというのは、かなり非自明なことだと言えると思います。

3.2. **普遍モノドロミー表現.** $\mathcal{M}_{g,r}$ を 互いに素な順序付けられた r 個の切断付の種数 g の滑らかな幾何的連結な双曲的曲線の $\mathbb{Q}$ 上のモデュライスタックとします。織田孝幸氏はスタックの基本群を定義して、次の完全列があることを証明しました:

$$1 \to \widehat{\Gamma_{g,r,1}} \to \pi_1(\mathcal{M}_{g,r}) \xrightarrow{p_{g,r}} \mathrm{G}_{\mathbb{Q}} \to 1.$$

$\mathcal{M}_{g,r}$ 上の曲線の n 次元純配置空間の普遍族の幾何的ファイバー $X_{\bar{\mu}}$ をとると、連続群準同型

$$\Phi_{g,r,n}^{(\text{pro-}\ell)} : \pi_1(\mathcal{M}_{g,r}) \to \mathrm{Out}(\pi_1^{pro-\ell}(X_{\bar{\mu}})),$$

が得られます。この写像はしばしば普遍モノドロミー表現と呼ばれています。$\mathrm{Im}\Phi_{g,r,n}^{(\text{pro-}\ell)}$ は群 $\Gamma_{g,r,n}^{(\text{pro-}\ell)}$ に含まれます。そのフィルトレーション $\{\Gamma_{g,r,n}^{(\text{pro-}\ell)}(m)\}_{m\geq 1}$ が体の塔 $\{\mathbb{Q}_{g,r,n}^{(\text{pro-}\ell)}(m)\}_{m\geq 1}$ を生み出します:

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_{g,r,n}^{(\text{pro-}\ell)}(1) \subset \cdots \subset \mathbb{Q}_{g,r,n}^{(\text{pro-}\ell)}(m) \subset \cdots \subset \mathbb{Q}_{g,r,n}^{(\text{pro-}\ell)} \subset \bar{\mathbb{Q}},$$

ここで、

$$\mathbb{Q}_{g,r,n}^{(\text{pro-}\ell)}(m) := \bar{\mathbb{Q}}^{p_{g,r}((\Phi_{g,r,n}^{(\text{pro-}\ell)})^{-1}(\Gamma_{g,r,n}^{(\text{pro-}\ell)}(m)))} \quad (m \geq 1),$$
$$\mathbb{Q}_{g,r,n}^{(\text{pro-}\ell)} := \bar{\mathbb{Q}}^{p_{g,r}(\mathrm{Ker}\Phi_{g,r,n}^{(\text{pro-}\ell)})}.$$

この $\{\mathbb{Q}_{g,r,n}^{(\text{pro-}\ell)}(m)\}_{m\geq 1}$ は幾何的ファイバーの選び方には依りません。また、$\mathbb{Q}_{g,r,n}^{(\text{pro-}\ell)}(1) = \mathbb{Q}(\mu_{\ell^\infty})$、$[\mathbb{Q}_{g,r,n}^{(\text{pro-}\ell)}(m+1) : \mathbb{Q}_{g,r,n}^{(\text{pro-}\ell)}(m)] < \infty$ (m:奇数) になっています。この体の塔は、$g=0, r=3, n=1$ のとき伊原氏によって、$g \geq 2, r=0, n=1$ のとき織田氏によって、一般の場合、中村氏によって定義されました。「この体の塔の g,r,n に関する依存性を調べよ (おそらく依存しないだろう)」というのが織田の問題 (織田予想) と呼ばれているものです。

Remark 3.2. *(1)*$\bigcap_{m\geq 1} \Gamma_{g,r,n}^{(pro\text{-}\ell)}(m) = 1$ なので、

$$k_{C,n}^{(pro\text{-}\ell)} = \bigcup_{m\geq 1} k_{C,n}^{(pro\text{-}\ell)}(m),$$
$$\mathbb{Q}_{g,r,n}^{(pro\text{-}\ell)} = \bigcup_{m\geq 1} \mathbb{Q}_{g,r,n}^{(pro\text{-}\ell)}(m).$$

(2) 勿論

$$\mathbb{Q}_{0,3,n}^{(pro\text{-}\ell)}(m) = \mathbb{Q}_{(\mathbb{P}^1\setminus\{0,1,\infty\})_n}^{(pro\text{-}\ell)}(m) \qquad (m \geq 1),$$

です。一般に、$\forall k$ 標数 0 の体、$\forall C/k$ (g,r) 曲線に対して、

$$\mathbb{Q}_{g,r,n}^{(pro\text{-}\ell)}(m) \subset k_{C,n}^{(pro\text{-}\ell)}(m) \qquad (m \geq 1),$$

が成り立ちます。$\mathbb{Q}_{g,r}^{(pro\text{-}\ell)}$ は $k_C^{(pro\text{-}\ell)}$ の「*moduli* に依らない」最大部分体と言えるかもしれません。

織田の問題には次のような形で解答が与えられています：

Theorem 3.3. *g,r,n* は整数で、$2g+r-2>0$, $n \geq 1$ を満たすとする。この時、次が成り立つ：

(1) 体の塔 $\{\mathbb{Q}_{g,r,n}^{(pro\text{-}\ell)}(m)\}_{m\geq 1}$ は r と n に依らない。さらに、以下の意味で g, r 及び n にほとんど依らない:

$$\mathbb{Q}_{1,1,1}^{(pro\text{-}\ell)}(m) \supset \mathbb{Q}_{g,r,n}^{(pro\text{-}\ell)}(m) \supset \mathbb{Q}_{0,3,1}^{(pro\text{-}\ell)}(m),$$
$$[\mathbb{Q}_{1,1,1}^{(pro\text{-}\ell)}(m) : \mathbb{Q}_{g,r,n}^{(pro\text{-}\ell)}(m)], [\mathbb{Q}_{g,r,n}^{(pro\text{-}\ell)}(m) : \mathbb{Q}_{0,3,1}^{(pro\text{-}\ell)}(m)] < \infty.$$

(2) $\mathbb{Q}_{g,r,n}^{(pro\text{-}\ell)}$ は g, r 及び n に依らない。

この定理が証明された経緯を簡単に述べておきます。

「affine」（$\Leftrightarrow r+n\geq 2$）の場合、$r$ と n に関する安定性が、中村氏、松本眞氏、上野氏、筆者等によって証明されました:（[14]）

$$\mathbb{Q}^{(\text{pro-}\ell)}_{g,r,n+1}(m)=\mathbb{Q}^{(\text{pro-}\ell)}_{g,r,n}(m),$$
$$\mathbb{Q}^{(\text{pro-}\ell)}_{g,r+1,1}(m)=\mathbb{Q}^{(\text{pro-}\ell)}_{g,r,1}(m).$$

次いで、種数に関する安定性が中村氏、松本氏、伊原氏によって証明されました: 中村氏が曲線の退化を観察して Grothendieck-Murre 理論を用いることで、

$$\mathbb{Q}^{(\text{pro-}\ell)}_{1,1,1}(m)\supset\mathbb{Q}^{(\text{pro-}\ell)}_{g,r,1}(m)\supset\mathbb{Q}^{(\text{pro-}\ell)}_{0,3,1}(m),$$

を示し（[13]）、

松本氏が X を $\mathbb{C}$ の部分体上の非特異アファイン曲線 C の配置空間の基本群への外ガロア作用を $\mathbb{P}^1\setminus\{0,1,\infty\}$ の基本群への表現と C の基本群への表現から具体的に記述することに成功し、その応用として

$$(r\geq 1 \text{ かつ } (\ell-1)|2g)\Rightarrow\mathbb{Q}^{(\text{pro-}\ell)}_{g,r,1}=\mathbb{Q}^{(\text{pro-}\ell)}_{0,3,1}$$

を示し（[11]）、

中村氏と伊原氏が、極大退化曲線を観察して、Tate 曲線の理論を用いて

$$\mathbb{Q}^{(\text{pro-}\ell)}_{1,1,1}\subset\mathbb{Q}^{(\text{pro-}\ell)}_{0,3,1},$$

重さの議論を用いて

$$[\mathbb{Q}^{(\text{pro-}\ell)}_{1,1,1}(m):\mathbb{Q}^{(\text{pro-}\ell)}_{0,3,1}(m)]<\infty,$$

を証明しました（[9]）。（彼らは極大退化曲線に「対応する」$\overline{M}_{g,r}$ の点の形式近傍の基本群へのガロア作用を、Grothendieck-Murre 理論を用いて精密に記述することに成功し、副有限版の場合も含むより一般的な形で結果を得ています。）

最後に「proper」（$\Leftrightarrow r+n=1$）の場合の証明が、筆者によって与えられました（[16]）。

4. Johnson 準同型

次に織田予想（定理 3.3）の低次元トポロジーへの応用をひとつ述べます。

位相幾何における写像類群は $\Gamma_{g,r,1}$ の部分群に自然に同型になります。$\Gamma_{g,r,1}$ の重さフィルトレーションから誘導されるフィルトレーションによる次数商は $\mathrm{gr}^m\Gamma_{g,r,1}$ と同型になります。

自然な写像

$$\tau_m:\mathrm{gr}^m\Gamma_{g,r,1}\to\mathcal{D}^{(\text{pro-}\ell)}_{g,r,1},$$

の像は $\mathrm{gr}^m\Gamma^{(\text{pro-}\ell)}_{g,r,1}$ に含まれ、自然な $\mathbb{Q}_\ell$-線型写像

$$\tau_m\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_\ell:(\mathrm{gr}^m\Gamma_{g,r,1})\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_\ell\to\mathrm{gr}^m\Gamma^{(\text{pro-}\ell)}_{g,r,1}\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell,$$

が得られます。この準同型 τ_m は Johnson 準同型に本質的に一致します (cf. [13])。

さて、$\tau_m\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_\ell$ の単射性は既に証明されています ([1] Theorem B)。全射性については、森田茂之氏によって発見された奇数次における障害 ([12]) を補完するものとして偶数次における障害の存在が、織田氏によって予言されていました（cf. 3.2 節）。

定理 3.3 と次数付 $\mathbb{Z}_\ell$Lie 環 $\mathcal{G}^{(\text{pro-}\ell)}:=\oplus_{m\geq 1}\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{(\text{pro-}\ell)}_{0,3,1}(m+1)/\mathbb{Q}^{(\text{pro-}\ell)}_{0,3,1}(m))$ の構造から、全射性について次のようなことがわかります：

Corollary 4.1. *([13],[16])* $2g+r-2>0$ ならば、各 $m\geq 1$ 毎に

$$dim_{\mathbb{Q}_\ell}\mathrm{Coker}(\tau_m\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_\ell)\geq r_m,$$

が成り立ちます。ここで $r_m=dim_{\mathbb{Q}_\ell}\mathcal{G}_m^{(pro\text{-}\ell)}\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell$ です。

affine の場合は中村氏によって証明されていましたが、今回 proper の場合にも証明に成功しました。Soulé 元の非消滅性（[10]）を用いて、$m\neq 2,4,8,12$ かつ m が偶数なら、$\tau_m\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}_\ell$ は全射でないことがわかっていたのですが、(1 節でもふれたように) つい最近（2010 年 10 月末）の研究集会（Development of Galois-Teichmuller Theory and Anabelian Geometry ）で F.Brown 氏は $\mathcal{G}^{(\text{pro-}\ell)}\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell$ は Soulé 元で自由生成される（無限生成）自由 $\mathbb{Q}_\ell$Lie 環であると発表しました。正しいとすると、Johnson 準同型の像について一段と精密な上からの評価を得ることになります：

$$r_m=\frac{1}{m}\sum_{d|m}\mu\left(\frac{m}{d}\right)\left(\sum_{i=1}^{3}(\alpha_i^d-1-(-1)^d)\right).$$

ここで α_i $(1\leq i\leq 3)$ は x^3-x-1 の根達 ([7] (4.2)) です。

5. 主定理の証明の概略

(I)「affine」($r\geq 1$ または $n\geq 2$) の場合（[5],[8],[14]）

$\mathcal{P}_{g,r,n}$ に内部導分を引き起こす $D\in\tilde{\mathcal{D}}_{g,r,n}$ を取ります。D 自身が内部導分であることを示せばいいので、$D(\mathcal{P}_{g,r,n+1})\subset\mathcal{N}_{n+1}^{(n+1)}$ かつ $D(Z)=0$ と仮定して、$D=0$ を示せば十分です。

$Z:=Z_1^{(n+1)}$、$\mathbb{W}:=\{X_i^{(n+1)},Z_j^{(n+1)}\,|\,1\leq i\leq 2g,2\leq j\leq n+r-1\}\subset\mathcal{N}_{n+1}^{(n+1)}$ とおきます。$\mathbb{B}:=\mathbb{W}\cup\{Z\}$ は $\mathcal{N}_{n+1}^{(n+1)}$ の（$\mathbb{Z}$-Lie 環としての）自由生成系をなします。今後しばしば上付き添え字 '$(n+1)$' を省きます。各 $W\in\mathbb{W}$ に対して $\alpha(W)\in\mathcal{N}_{n+1}^{(n)}$ を次のように定義します：$\alpha(X_i)=-X_{i+g}^{(n)}$, $\alpha(X_{i+g})=X_i^{(n)}$, $\alpha(Z_j)=Z_j^{(n)}$ $(1\leq i\leq g,\ 2\leq j\leq r+n-1)$. $\mathcal{P}_{g,r,n+1}$ の表示から、$W,W'\in\mathbb{W},W\neq W'$ に対して、$[\alpha(W'),W]=[\alpha(W'),Z]=0$ が成り立つことがわかります。

$\mathbb{S}_W:=\{\alpha(W')\mid W'\in\mathbb{W},W'\neq W\}\subset N_{n+1}^{(n)}$ と書きます。

次の補題は D の像を制限するのに役にたちます。補題の証明は省きます（[8] Lemma B' の証明の真似をします)。

Lemma 5.1. 任意の $W\in\mathbb{W}$ に対して、$C_{\mathcal{N}_{n+1}}(\mathbb{S}_W)=\langle W,Z\rangle$

実際、$D(Z)=0$ と $D(\mathcal{P}_{g,r,n+1})\subset\mathcal{N}_{n+1}$ を考慮すると

Lemma 5.2. 任意の $W\in\mathbb{W}$ に対して、$D(W)\in\langle W,Z\rangle$.

Lemma5.2 と $\sum_{i=1}^{g}[X_i,Y_i]+\sum_{j=1}^{n+r}Z_j=0$ を使って $D(\mathcal{N}_{n+1})=0$. $A\in\mathcal{P}_{g,r,n}$ を取ります。$\mathcal{P}_{g,r,n+1}=\mathcal{N}_{n+1}+C_{\mathcal{P}_{g,r,n+1}}(Z)$ なので $A=A'+A''$ $(\exists A'\in\mathcal{N}_{n+1},\exists A''\in C_{\mathcal{P}_{g,r,n+1}}(Z))$. $[A'',Z]=0$ かつ $D(Z)=0$ なので、$[D(A''),Z]=0$. $D(\mathcal{N}_{n+1})=0$ なので、$D(A)=D(A'')$. これと $D(\mathcal{P}_{g,r,n+1})\subset\mathcal{N}_{n+1}$ とから、$D(A)\in C_{\mathcal{N}_{n+1}}(Z)=\langle Z\rangle$. Z を Z_2 に置き換えて同様の議論をして、$D(A)\in\langle Z_2\rangle$. よって、$D(A)\in\langle Z\rangle\cap\langle Z_2\rangle$. もし $n+r>2$ なら、Z と Z_2 は $\mathbb{Z}_\ell$ 上線形独立なので、$\langle Z\rangle\cap\langle Z_2\rangle=0$. $n+r=2$ のとき、$\alpha Z=\beta Z_2$ $(\exists\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_\ell)$. $\alpha Z=\beta Z_2=-\sum_{i=1}^{g}\beta[X_i,Y_i]-\beta Z$ だから、

$\alpha=\beta=0$. ($\because$ $[X_i,Y_i]$ と Z は $\mathrm{gr}^2\mathcal{N}_{n+1}$ の $\mathbb{Z}_\ell$ 上の基底の一部です。) よってこの場合も $\langle Z\rangle\cap\langle Z_2\rangle=0$. こうして $D(A)=0$.

(II)「proper」($r=0$ かつ $n=1$) の場合 ([16])

「affine」の場合の証明との違いを誤解を恐れずに簡単に述べます。$D(\mathcal{P}_{g,0,2})\subset\mathcal{N}_2^{(2)}$ かつ $D(Z)=0$ ($Z:=Z_1^{(2)}$) と仮定して、$D=0$ を示すのが目標です。「affine」の時の真似をして、その過程でいくつかの「よい」元 ($D(V)=0$ かつ $C(V)$ が小さくなるような元 V) を見つけ、その中心化環 $C(V)$ を計算し、$C(V)\ni U$ をうまく選び ($D(C(V))\subset C(V)$ をうまく使って)$D(U)=0$ を証明して D の像が満たしている条件を見つけていきます。場合によってはこれを繰り返します。

種数が同じ時の affine の場合に比べて、基本関係式の数が少ないため、中心化環は一般に小さくなるので歓迎すべき条件なのですが、同時に D が満たす条件を求めにくい状況にあります。もう少し言うと、中心化環を計算すべき元 (上記「よい」元 V や U) を見つけにくい上に、中心化環の計算も難しい状況です。さらにより具体的に言うと、(惰性群から来る) 生成元が、他の場合は 3 個以上ですが、この場合は 1 個です。(同じことですが、他の場合は各ファイバーは 2 個以上点が抜けているのに、この場合は $(g,1)$ 型です。) ですから、$C_{\mathcal{N}_2^{(2)}}(Z)$ は計算しずらいですし、Z と可換な生成元は存在しないので、(I) と同じ方法は使えません。(例えば、補題 5.1 は不成立ですし、補題 5.2 も証明困難です。) 関係式が少ない状況でも、自由リー環の自由生成集合の元であれば、中心化環 (が自明であること) が計算できます。そこで、自由リー環の消去定理を用いて階数の高い部分自由リー環における中心化環の計算に帰着させて、この障害を克服しました。

この困難さは関係式が「少ない」分、内部導分を引き起こす導分は「たくさん」あってもおかしくない筈なのに、自明なもの (内部導分) しかないことを証明していることからも納得できます。また、(概念的に見ると他の場合と違い)open な対象と proper な対象を比較していることからも納得できます。

もう少しだけ解像度を上げてみましょう。簡単のため $degD\geq 3$ とします。基本関係式 $[X_i^{(1)},X_{i'}^{(2)}]=0$ または $=Z$ より、$[D(X_i^{(1)}),X_{i'}^{(2)}]+[X_i^{(1)},D(X_{i'}^{(2)})]=0$ です。一方 $X_i^{(1)}+X_i^{(2)}\in C(Z)$ に気付くと、$D(X_i^{(1)})+D(X_i^{(2)})\in C(Z)$ です。$\mathcal{N}_2^{(2)}\cap C(Z)=\langle Z\rangle$、$degD>1$、$degZ=2$ なので $D(X_i^{(1)})+D(X_i^{(2)})=0$ です。

$X_i^{(1)},X_i^{(2)}\in C(X_i^{(1)}+X_i^{(2)})$ を考慮すると、定理の証明は 2 つの補題に帰着されることがわかります：

Lemma 5.3.

$$C(X_i^{(1)}+X_i^{(2)})\cap\mathcal{N}_2^{(2)}=\langle X_i^{(2)},Z\rangle_{Lie}\qquad(1\leq\forall i\leq 2g)$$

Lemma 5.4. $i\neq i'$, $m\neq 2$, $W_i\in\langle X_i,Z\rangle_{Lie}\cap(\mathcal{N}_2^{(2)})_{m+1}$, $W_{i'}\in\langle X_{i'},Z\rangle_{Lie}\cap(\mathcal{N}_2^{(2)})_{m+1}$,

$$[W_i,X_{i'}^{(2)}]+[X_i^{(1)},W_{i'}]=0,$$

$\Rightarrow W_i=W_{i'}=0$.

これら 2 つの補題は次の自由 Lie 環の消去定理を用いて証明されます。詳細は省略します。

集合 X に対して、$L(X)$ を X で自由生成される自由 Lie 環とします。

Theorem 5.5. (消去定理)　A を集合、S を A の部分集合、$T:=\{(s_1,\cdots,s_n,a)\in S^n\times(A\setminus S)|n\geq 0\}$ とする。

*(1)*加群として

$$L(A) \simeq L(S) \oplus \mathfrak{a}.$$

ここで、$\mathfrak{a}$は、$A \setminus S$で生成される$L(A)$のイデアル。
(2) *Lie*環としての同型写像

$$L(T) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}$$

で、$(s_1, \cdots, s_n, a)$を$(ad(s_1) \circ \cdots \circ ad(s_n))(a)$に写すものが存在する。

References

[1] M.Asada, *On the filtration of topological and pro-l mapping class groups of punctured Riemann surfaces, J. Math. Soc. Japan* **48** (1996), no.1, pp.13–36.

[2] H.Furusho, *The Multiple Zeta Algebra and the Stable Derivation Algebra, Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **39** (2003), pp.695–720.

[3] A.Grothendieck and M.Raynaud, *Revêtement Étale et Groupe Fondamental (SGA1), Lecture Notes in Math.* **224**, Springer (1971).

[4] Y.Hoshi and S.Mochizuki, *On the Combinatorial Anabelian Geometry of Nodally Nondegenerate Outer Representations RIMS Preprint No. 1677 (August 2009),*

[5] Y.Ihara, *Automorphisms of pure sphere braid groups and Galois representations, The Grothendieck Festschrift, Volume II, Progress in Mathematics* **87**, Birkhäuser (1991), pp.353–373.

[6] Y.Ihara, *On the stable derivation algebra associated to some braid groups, Isral J. of Math.* **80**, (1992), pp.135–153.

[7] Y.Ihara, *Some arithmetic aspects on Galois actions on the pro-p fundamental group of* $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$, *Arithmetic Fundamental Groups, PSPUM* **70**, M.Fried and Y.Ihara (eds.), AMS (2002), pp.247–273.

[8] Y.Ihara and M.Kaneko, *Pro-ℓ pure braid groups of Riemann surfaces and Galois representations, Osaka J. Math.* **29** (1992), pp.1–19.

[9] Y.Ihara and H.Nakamura, *On deformation of maximally degenerate stable marked curves and Oda's problem, J. reine angew Math.* **487** (1997), pp.125–151.

[10] M.Matsumoto, *On the galois image in the derivation algebra of* π_1 *of the projective line minus three points, Recent Developments in Inverse Galois Problem, Contemp. Math.* **186** (1996), pp.201–213.

[11] M.Matsumoto, *Galois representations on profinite braid groups on curves, J. reine angew Math.* **474** (1996), pp.169–219.

[12] S.Morita, *Abelian quotients of subgroups of the mapping class group of surfaces, Duke. Math. J.* **70** (1993), pp.699–726.

[13] H.Nakamura, *Coupling of universal monodromy representations of Galois-Teichmüller modular groups, Math. Ann.* **304** (1996), pp. 99–119.

[14] H.Nakamura, N.Takao and R.Ueno, *Some stability properties of Teichmüller modular function fields with pro-l weight structures, Math. Ann.* **302** (1995), pp.197–213.

[15] G.P.Scott, *Braid groups and the group of homeomorphisms of a surface, Proc. Camb. Phil. Soc.* **68** (1970), pp. 605–617.

[16] N.Takao, *Braid monodromies on proper curves and pro-ℓ Galois representations, Journal Inst. Math. Jussieu*, to appear

[17] H.Tsunogai, *The stable derivation algebras for higher genera, Israel J. Math.* **136** (2003), pp.221–250.

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto 606-8502, Japan

E-mail address: `takao@kurims.kyoto-u.ac.jp`