

種数 1 の Grothendieck dessin の計算[†]

上智理工 (Sophia Univ.) 角皆 宏 (TSUNOGAI Hiroshi)

0. 多重ゼータ値と $P^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ の被覆

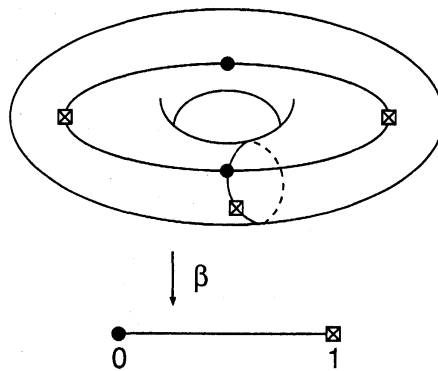
本集会の主役の多重ゼータ値は、KZ 方程式や Galois Lie 環などを通じて、 $P^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ の基本群の表現と深く関連する対象である。 $P^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ の被覆を組合せ的に書き表わすものに、Grothendieck の *dessins d'enfants* (子供の絵) がある [Gro]。以下本稿では多重ゼータ値は現れないが、その Galois 側にある対象の一つの話題として、*dessins d'enfants* の、特に計算例について述べる。

dessin d'enfant については [LMS200, LMS242, LMS243] などに多くの論文が掲載されているので、以下に逐一引用していないものも含めて参照されたい。

1. Belyi 射と Grothendieck dessin

1.1. **Belyi 射・Belyi 対.** C 上定義された完備非特異な代数曲線 C に対し、 C から P^1 への $\{0, 1, \infty\}$ の外不分岐な射 $\beta : C \rightarrow P^1$ を **Belyi 射** といい、組 (C, β) を **Belyi 対** という。単位区間 $I := [0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\} \subset P^1(C)$ の逆像 $D_\beta := \beta^{-1}(I) \subset C(C)$ は、Riemann 面 $C(C)$ に埋め込まれた連結二部グラフとなる。

- 辺の本数は $d = \deg \beta$
- 頂点集合は $\beta^{-1}(0) \sqcup \beta^{-1}(1)$ (以下の図では $\beta^{-1}(0) = \{\bullet\}$, $\beta^{-1}(1) = \{\boxtimes\}$)
- 頂点の価数 (**valency**) はその点での分岐指数
- $C \setminus D_\beta$ の各連結成分は円盤と同相



1.2. **dessin d'enfant.** 逆に、位相的 Riemann 面 S に埋め込まれた連結二部グラフ D で、 $S \setminus D$ の各連結成分が円盤と同相なものに対して、Belyi 対 (C, β) で、 $(C(C), D_\beta)$ と (S, D) とが同相なもの存在する。このような組 (S, D) を “*dessin d'enfant*” という (以下、単に *dessin* という)。頂点の価数から $0, 1$ の上での分岐指数が読取れ、また、 ∞ での分岐についても、 $\beta^{-1}(\infty)$ の各点に対応する $S \setminus D$ の連結成分が $2e$ 本の辺で囲まれていれば、分岐指数 e であると判る。これも併せた $0, 1, \infty$ での分岐指数を表わすリストを **valency list** といい、*dessin* および Belyi 対の最も基本的な不変量である。本稿では $\infty, 0, 1$ の順に分岐指数を記すことにする。

京大数研講究録「多重ゼータ値の諸相」報告集原稿 (2010 年 9 月 9 日講演)

[†] 本研究は、矢野謙太郎 [Yano]・倉繁章 [Kura] (共に上智大学修士修了) との共同研究を含み、科研費基盤研究 C (課題番号 18540048・22540032) の補助を受けています。

2. dessin への Galois 作用

2.1. Galois 作用の忠実性. 以下、埋込 $\overline{Q} \subset \mathbb{C}$ を固定する。Belyi 対 (C, β) は \overline{Q} 上定義されるため、dessin の全体には、有理数体 Q の絶対 Galois 群 $G_Q = \text{Gal}(\overline{Q}/Q)$ が作用する。また、Belyi の定理：

定理 (Belyi). \overline{Q} 上定義された代数曲線 C は、Belyi 射

$$\beta : C \rightarrow \mathbb{P}^1$$

を持つ。■

を用いると、 $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ に付随する外 Galois 表現 $\varphi : G_Q \rightarrow \text{Out}\pi_1$ が単射であることが言えるが、このことは、dessin の全体に $G_Q = \text{Gal}(\overline{Q}/Q)$ が忠実作用することを意味する。Belyi [Bel] では $j \in \overline{Q}$ を j -不変量を持つ楕円曲線を利用して示しているので、種数 1 の dessin の全体に制限しても、 G_Q が忠実作用することになる。また、種数 0 の dessin (特に tree) の全体への G_Q の作用も忠実であること (Lenstra-Schneps [Sch]) や、その応用として、各 $g \geq 2$ に対して、種数 g の超楕円曲線上の dessin の全体への G_Q の作用も忠実であること (宮下 [Miya]) も知られている。

2.2. 本研究の目標. このような dessin について、まず考えたい当面の目標として、

- 与えられた dessin から Belyi 対 (C, β) の定義方程式を求めたい
- dessin の Galois 軌道を決定したい

が挙げられる。dessin の Galois 軌道の決定は、Belyi 対の定義体 (または moduli の体) の決定とも言える。Belyi 対の定義方程式そのものが求まってしまえば、もちろん定義体と共に Galois 軌道も決まるが、それに先立ち、まずは dessin の様々な Galois 不変量によって出来るだけ細かい Galois 安定な類に分別する。その段階で Galois 軌道が確定する場合もあるが、後述のように現在の所は各類に属す dessin の定義方程式を実際に求めてみないと、1 つの軌道であるか Galois 軌道が分かれるか判定できない場合もある。尚、Beckmann [Beck] により、Belyi 対の定義体では monodromy 群の位数を割らない素数は不分岐であることが知られているので、定義方程式を計算しなくても定義体の候補は有限個に絞られる (が、それだけで決定できることはないのではないかと思われる)。

3. dessin の基本的な不変量

dessin の基本的な Galois 不変量には次のようなものがある。

- 次数 d ・ 種数 g
- valency list
- monodromy 群 $\text{Mon}(D) \subset \mathfrak{S}_d$
- 生成元 x, y, z の $\text{Mon}(D)$ 内での共役類リスト \mathcal{C} (Nielsen 類)
- cartographic 群 $\text{Car}(D) \subset \mathfrak{S}_{2d}$ (D の重心細分 D_2 の monodromy 群でもある)
- 自己同型群

3.1. valency list と次数・種数. 各点での分岐指数は代数的情報なので、Galois 作用で不変であり、valency list が Galois 不変量であることが判る。valency list から判る情報として、1 色の頂点の価数の和として Belyi 射の次数 (= 辺の本数) が、更に、Riemann-Hurwitz の公式から種数が復元できる。

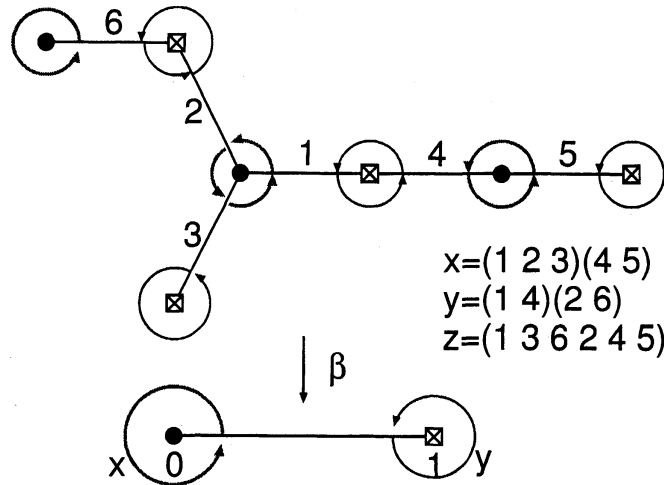
3.2. monodromy 群.

$$\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}) = \langle x, y, z \mid xyz = 1 \rangle \simeq F_2$$

は、それぞれ $0, 1, \infty$ を回る道で代表される生成元 x, y, z で生成させる階数 2 の自由群であり、自然に dessin D の辺集合に作用する。このとき、1 辺の固定群 H は被覆 β に対応する $\pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\})$ の部分群であり、作用核 N は β の Galois 閉包に対応する。

$$\text{Mon}(D) := \text{Gal}(\beta) = F_2/N = \langle x, y \rangle \subset \mathfrak{S}_d \quad (d = \deg \beta)$$

を D の monodromy 群と呼ぶ。 $\text{Mon}(D)$ は D の辺集合に忠実作用し、monodromy 生成元 x, y, z は $\text{Mon}(D) \subset \mathfrak{S}_d$ 内で valency list に対応する巡換型を持つ。



3.3. **Nielsen 類.** monodromy 生成元 x, y, z の $\text{Mon}(D)$ 内での共役類のリストを **Nielsen 類** と言う。これも Galois 不変量である。 $\text{Mon}(D) = \mathfrak{S}_d$ の場合には共役類は巡換型のみで決まり、巡換型は valency list で指定されているので、新たな情報にはならないが、 $\text{Mon}(D) \subsetneq \mathfrak{S}_d$ の場合には Nielsen 類で区別される場合も多い。実際に観察してみると、monodromy 群では区別できずに Nielsen 類まで見て Galois 軌道が決定できる例もかなりある。

3.4. **cartographic 群.** dessin D の辺を有向辺の対と見て、 $2d$ 本の有向辺集合への作用を考えたときの作用核による商を D の **cartographic 群** と言い、 $\text{Car}(D)$ と書く。定義により $\text{Car}(D) \subset \mathfrak{S}_{2d}$ で D の有向辺集合に忠実作用する。これは次のように見ることも出来る ([ShaVoe, Ell] など): $s : z \mapsto 4z(1-z)$ は種数 0 の $[2, 2, 11]$ -Belyi射で、Belyi対 (C, β) に対し、 $(C, s \circ \beta)$ は D_β の重心細分 D_2 を dessin に持つ $2d$ 次の Belyi対であって、 $\text{Car}(D) = \text{Mon}(D_2)$ である。また、この重心細分 s 以外にも、 $t(\{0, 1, \infty\}) \subset \{0, 1, \infty\}$ となるような種数 0 の Belyi射 (Belyi-extending map) を用いて得られる Belyi対 $(C, t \circ \beta)$ に対応する dessin の不変量として、新たな不変量を得ることも考えられている (Wood[Wood])。

3.5. **自己同型群.** 閉曲面に埋込まれた二部グラフとして、dessin が自己同型を持つ場合がある。これは代数的には、Belyi対 (C, β) に於いて、Belyi射 β と可換な C の自己同型を持つことに当たるので、自己同型群も Galois 不変量である。この場合には、自己同型群で割った曲線を手掛かりにして、Belyi対 (C, β) を簡明に求められることがある。実際には非自明な自己同型を持つ場合は多くないが、重心細分が自己同型を持つ例 (元の dessin の頂点の色を入換える自己同型) などもあり、その場合も計算に役立つ。[Bir] で計算されている 6 次の例は全てこのような例である。

3.6. **目で見て判る唯一の場合: 複素共役の作用.** 一般に、dessin への Galois 作用は辺の繋がり方を変える (グラフとしての自己同型ではない) ので、グラフを見ただけでは Galois 共役かどうか判り難い。但し、複素共役は鏡像で作用するので、次のことが判る。

- 鏡像と同相なら \mathbf{R} 上 (実代数体上) 定義される
- 鏡像と同相でなければ \mathbf{R} 上 (実代数体上) 定義されない (特に、 \mathbf{Q} 上定義されない)

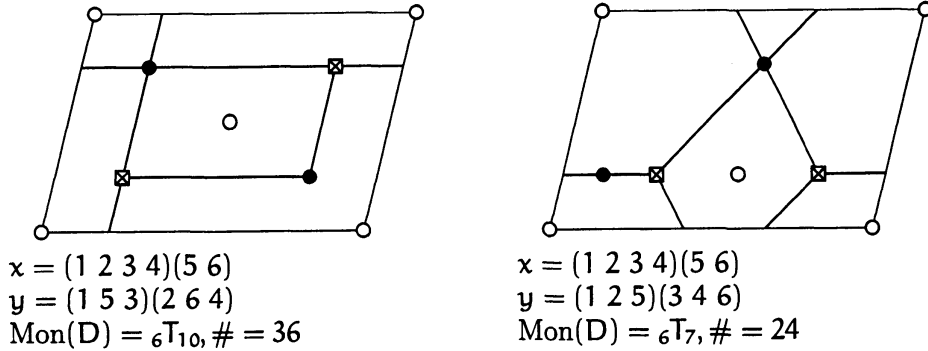
ここで、埋込 $\overline{\mathbf{Q}} \subset \mathbf{C}$ を固定していたので、複素共役という $G_{\mathbf{Q}}$ の特定の元が指定されていることに注意。

4. dessin の数え上げと Galois 軌道の決定

4.1. **dessin の数え上げ.** 或る valency list を固定して、dessin を数え上げるにはどうしたらよいだろうか。組合せ幾何的に絵を描くことによって全ての可能性を尽くすのも一法で、簡単に判る場合はこれで充分だが、実際には正種数の場合には意外に厄介で、可能性を見落とししたり、同じなのに違ふと誤認したりすることも多い。そこで完全に決定するために、群論的に monodromy 生成系の共役類を調べる。valency list は monodromy 生成

元の巡換型を定めるので、所定の巡換型を持つ元 $x, y, z \in \mathfrak{S}_d$ で $xyz = 1$ を満たすものの共役類を数え上げればよい。虱潰しは手計算では面倒だが、GAP などの群論ソフトウェアが利用出来る。

例 4.1.1. valency list [42, 42, 33] を持つ 6 次の種数 1 の dessin を考えると、次の 2 つがある。両者は異なる monodromy 群を持つので、Galois 共役ではなく、共に \mathbb{Q} 上定義されることが判る。絵を書くことによってだけでは、この 2 つで全てであるかどうか、判断するのは難しいであろう。



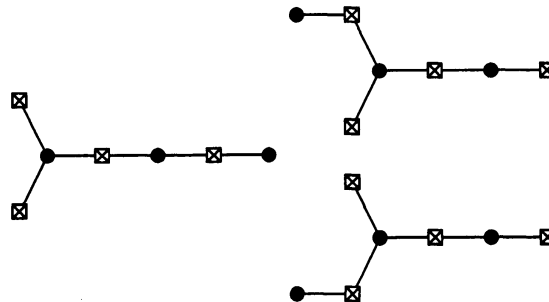
例 4.1.2. valency list [42, 33, 33] を持つ 6 次の種数 1 の dessin を考える。実際に描いてみようとしても中々見付からないので、GAP を用いて虱潰しで探してみると、 $x, y, z \in \mathfrak{S}_6$ で、 z の cycle type が (4, 2)、 x の cycle type が (3, 3)、 y の cycle type が (3, 3)、かつ $xyz = 1$ となるものは存在しないので、このような dessin は存在しないことが判る。これは Riemann-Hurwitz の公式だけみると存在しそうなのに、実際には存在しない例として興味深い。

4.2. dessin の Galois 軌道. valency list を固定して数え上げた結果、その valency list を持つ dessin が一つだけなら、その dessin は \mathbb{Q} 上定義される。また、互いに鏡像な 1 対のみなら、虚二次体上定義される (Beckmann の定理により可能な虚二次体は或る程度絞られる)。逆に、前節で述べた不変量が全て一致する dessin は Galois 共役であるだろうか。即ち、dessin への Galois 作用の完全不変量だろうか。この問への答えは現状では否であって、完全不変量は知られておらず、後述の例のように実際に計算してみないと判らない場合がある。

5. 種数 0 の dessin の計算例の紹介

種数 0 の場合は組織的に多くの計算例が調べられていて (Malle[Mal] など)、特にグラフが木 (∞ が完全分岐) の場合は標準的とも言える方法がある。例として、実際に Belyi 射の定義方程式を求めないと Galois 軌道が決定できない (と思われる) 場合の計算を紹介する。

例 5.0.1. 6 次で種数 0 の [6, 321, 2211]-dessin を考える。dessin は 3 つあり、1 つは実、残りは互いに複素共役 (鏡像) である。従って、Galois 軌道が分かれる (\mathbb{Q} 上 + 虚 2 次体上) か、1 つの Galois 軌道 (非 Galois 3 次体上) か、のいずれかである。前に挙げた色々な不変量では区別できないが、それだけでは共役とは結論できない。そこで実際に計算を試みる。



valency 3 の ● を $x = 0$ に、valency 2 の ● を $x = 1$ に、それぞれ正規化して、Belyi 射 β の零点が $x = 0$ (3 位), 1 (2 位), a (1 位) であるとする。定数倍を後で調整するために $z = k\beta$ とおいて、 $z = x^3(x-1)^2(x-a)$ とする。 z の critical value は $0, k, \infty$ の 3 つで、 $z - k$ は 2 重根 2 つと単根 2 つを持つので、

$$x^3(x-1)^2(x-a) - k = (x^2 - b_1x + b_2)^2(x^2 - c_1x + c_2)$$

と書ける。これを展開して係数比較すれば求まるのだが、ここで “differentiation trick” と呼ばれる巧い方法がある。両辺を微分すると、

$$\begin{aligned} & x^2(x-1)(6x^2 - (5a+4)x + 3a) \\ & = (x^2 - b_1x + b_2)(6x^3 - (4b_1 + 5c_1)x^2 + (2b_2 + 3c_1b_1 + 4c_2)x - (b_2c_1 + 2c_2b_1)) \end{aligned}$$

となるが、ここで $(x^2 - b_1x + b_2)$ は $x^2(x-1)$ と互いに素なので、

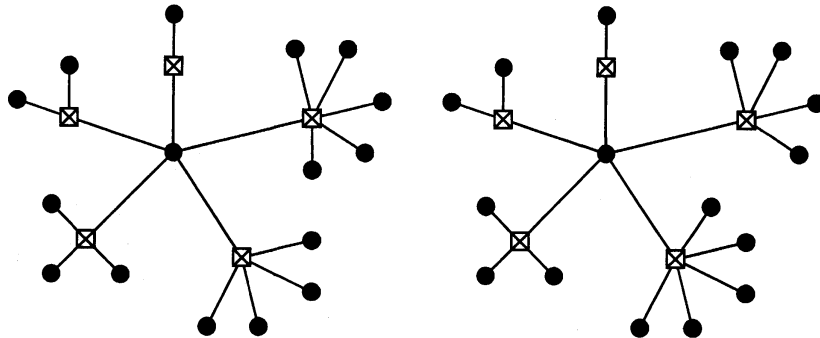
$$\begin{cases} 6x^2 - (5a+4)x + 3a = 6(x^2 - b_1x + b_2) \\ 6x^2(x-1) = 6x^3 - (4b_1 + 5c_1)x^2 + (2b_2 + 3c_1b_1 + 4c_2)x - (b_2c_1 + 2c_2b_1) \end{cases}$$

となり、これを係数比較することで簡明な連立方程式が得られる。変数消去すると、

$$25a^3 - 12a^2 - 24a - 16 = 0$$

となり、左辺の 3 次多項式は既約なので、3 つの dessin は根体上定義され、互いに共役である。

例 5.0.2. (Leila's flower) valency list $[(20), 51 \dots 1, 65432]$ の dessin は円順列の個数 $4! = 24$ 個だけあって、前に挙げた不変量では区別できないが、計算してみると Galois 軌道は 12 個づつ 2 つに分かれている (下の 2 つの dessin は異なる Galois 軌道に属す)。これは、前に挙げた不変量が Galois 作用の完全不変量ではないことを示している。



6. 種数 1 の dessin の計算

正種数の dessin の場合には、種数 0 の場合と違って、曲線の方程式と Belyi 射の方程式とをセットで決める必要がある。種数 1 の場合、曲線の方程式は $y^2 = (x \text{ の 3 次式})$ と置けば良さそうだが、これには色々やり難い所があり、工夫を要する。Belyi 射の方程式が簡明になるように、Belyi 射の極と零点とに合わせて座標関数 x, y を選ぶ方法が良さそうなので、以下ではこの方法による計算例を紹介する。

6.1. 従来 of 計算例. 種数 0 の場合と異なり、正種数の場合には組織的に計算されたデータが余り見当たらない。保型形式などとの関係や個別の特殊な (しかし特に興味深い) 例についての論じている結果は色々ある ([ShaVoe, Zap, HoNa] など) が、網羅的に Belyi 射の定義方程式を列挙したまとまった表としては、Birch[Bir] に

- 5 次以下の場合全て
- 6 次で一部の求め易い場合 (中間被覆を経由する場合など)

が載っている程度のものである。

6.2. 今回の結果.

- 5 次以下の場合全ての再計算
- 6 次で ∞ が完全分岐する場合全て (一部は再計算)
- 6 次で完全分岐する点がない場合の幾つか (一部は再計算)
- 7 次で $0, \infty$ が完全分岐する場合全て

6.3. 観察. 今の所、計算できた範囲内では、同じ valency list 内の Galois 軌道は、monodromy 群・Nielsen 類・cartographic 群 (または重心細分の自己同型群) で区別できており、上記の不変量が一致して Galois 軌道が分かれる例は見付からなかった (但し、計算してみないと共役かどうか判らない場合はある)。種数 0 の場合の例を考えてみても、これはまだ次数が低いからと考えられる。

7. 計算の方針と実際

7.1. 計算の準備. Riemann-Hurwitz の公式より、次が得られる。

補題. 種数 g の曲線 C 上の d 次の Belyi 射 β について、

$$\#\beta^{-1}(\{0, 1, \infty\}) = d - (2g - 2).$$

特に種数 1 なら

$$\#\beta^{-1}(\{0, 1, \infty\}) = d. \blacksquare$$

これより、次数 d を固定したときの valency list が列挙出来る。各 valency list に対して、dessin の個数を数え上げておく。

7.2. 5 次の場合. $\#\beta^{-1}(\{0, 1, \infty\}) = 5$ より、少なくとも 1 点は完全分岐するので、完全分岐する点を ∞ に取り、分岐指数 (valency) が次に大きい点を $P(0, 0)$ に取ることにする。

$$[5, 5, 311], [5, 5, 221], [5, 41, 41], [5, 41, 32], [5, 32, 32]$$

若干の考察の後に、 P が 2 等分点でも 3 等分点でもないことが判るので、

$$L(2\infty - P) = \langle x \rangle, \quad L(3\infty - 2P) = \langle y \rangle$$

に取れる (定数倍の取り換え可能だが一旦保留)。

$$u := x^2 - y \in L(4\infty - 2P), \quad v := y^2 - x^3 \in L(6\infty - 3P)$$

とおくが、ここで

$$u \in L(4\infty - 3P), \quad v \in L(5\infty - 3P)$$

となるように、保留した x, y の定数倍を調整することが出来る。Belyi 射 β に対し、定数倍 k は後で調整することにして $z = k\beta$ とおいておく。 z の critical value は $0, k, \infty$ である。ここで、幾つかの関数の ∞, P での位数をまとめておく。

	1	x	y	x^2	u	xy	v	z
ord_∞	0	-2	-3	-4	-4	-5	≥ -5	-5
ord_P	0	1	2	2	≥ 3	3	3	≥ 3

$v, z \in L(5\infty - 3P) = \langle xy, u \rangle$ なので、

$$v = axy + bu, \quad z = xy + cu$$

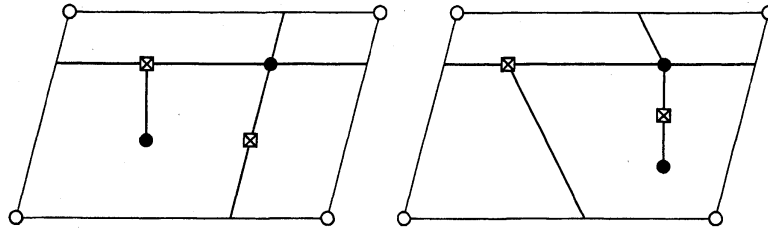
とおける。

$$u = x^2 - y, \quad v = y^2 - x^3, \quad v = axy + bu, \quad z = xy + cu$$

より y を消去すると、

$f(x, z) := x^5 - (2c - b + c^2 + ac)x^4 + c(c + ac - b)x^3 + z(2c + a)x^2 - z(b + ac)x - z(z - bc) = 0$ が得られる。これが $z = 0, k$ で所定の重複根を持つように a, b, c, k を決める。尚、 $c = 0$ (従って $z = xy$) となるのは $\text{ord}_P(z) = 3$ 、つまり $[5, 32, 32]$ の場合のみであることを注意しておく。

例 7.2.1. [5, 41, 32]-dessin は 2 つ存在する¹。共に自分自身の鏡像とは同相なので \mathbb{R} 上 (実代数体上) 定義される。



共に $\text{Mon}(D) = \mathbb{S}_5$ であり、Nielsen 類も $\text{Car}(D)$ も一致するので、それぞれ \mathbb{Q} 上定義されて Galois 軌道が分かれるか、実 2 次体上定義されて互いに Galois 共役か、これだけでは計算してみないとどちらか判らない状況にある。

$f(x, z) = x^5 - (2c - b + c^2 + ac)x^4 + c(c + ac - b)x^3 + z(2c + a)x^2 - z(b + ac)x - z(z - bc)$ は $z = 0$ で 4 重根と単根を持つので、

$$f(x, 0) = x^5 - (2c - b + c^2 + ac)x^4 + c(c + ac - b)x^3 =: x^4(x - t)$$

と置ける。先の注意より $c \neq 0$ だったので、

$$b = c(a + 1), \quad t = c(c + 1)$$

が得られ、

$$f(x, z) = x^5 - c(c + 1)x^4 + z(2c + a)x^2 - cz(2a + 1)x - z(z - c^2(a + 1))$$

となる。また、 $z = k$ で 3 重根と 2 重根を持つので、

$$\begin{aligned} f(x, k) &= x^5 - c(c + 1)x^4 + k(2c + a)x^2 - ck(2a + 1)x - k(k - c^2(a + 1)) \\ &=: (x - k_1)^3(x - k_2)^2 \end{aligned}$$

と置いて係数比較をする。但し、 $y = \frac{z - cx^2}{x - c}$ なので、 $c \neq k_1, k_2$ となることに注意する (1 つの根 x に対して y が 2 つあると重複度が減って条件に合わなくなる)。変数消去すると、

$$c^2 - 54c - 135 = 0$$

となり $c = 27 \pm 12\sqrt{6}$ を得る。これより、2 つの [5, 41, 32]-dessin は $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ 上定義され、同じ Galois 軌道に属することが判った。 ■

7.3. 6 次で 1 点で完全分岐の場合. 6 次のはきは $\#\beta^{-1}(\{0, 1, \infty\}) = 6$ なので、完全分岐する点があるとは限らないが、ここではまず 1 点が完全分岐する場合を考える。あり得る valency list は以下の通り:

$$[6, 6, 3111], [6, 6, 2211], [6, 51, 411], [6, 51, 321], [6, 51, 222]$$

$$[6, 42, 411], [6, 42, 321], [6, 42, 222], [6, 411, 33], [6, 33, 321], [6, 33, 222]$$

完全分岐する点を ∞ に取り、分岐指数 (valency) が次に大きい点を $P(0, 0)$ に取ることにする。 z の P での零点の位数は valency list によって異なるが、少なくとも 3 位である。6 次の場合には P が 2 等分点または 3 等分点になる可能性もあるが、それは別に例外処理をすることにして、ここでは P が 2 等分点でも 3 等分点でもない場合について述べる。このとき、

$$L(2\infty - P) = \langle x \rangle, \quad L(3\infty - 2P) = \langle y \rangle$$

に取れる。定数倍の取換が可能だが、その正規化を巧く行わないと計算が難航する。 x の正規化は後回しにして、まず $u := x^2 - y \in L(4\infty - 2P)$ とおくと、 $u \in L(4\infty - 3P)$ となるように、 y を取ることにする (これで後で x を正規化したときに y が連動して決ま

¹[Bir] には、 $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ 上定義されるとのみ記述があって、定義方程式などが書いていないので、ここに詳述する。

る)。Belyi射 β に対し、定数倍 k は後で調整することにして $z = k\beta$ とおいておく。 z の critical value は $0, k, \infty$ である。ここで、幾つかの関数の ∞, P での位数をまとめておく。

	u	xy	x^3	y^2	z
ord_∞	-4	-5	-6	-6	-6
ord_P	≥ 3	3	3	4	≥ 3

$y^2, z \in L(6\infty - 3P) = \langle x^3, xy, u \rangle$ であり、更に、 $x^3 - z \in L(5\infty - 3P) = \langle xy, u \rangle$ となるように k を調整すると、

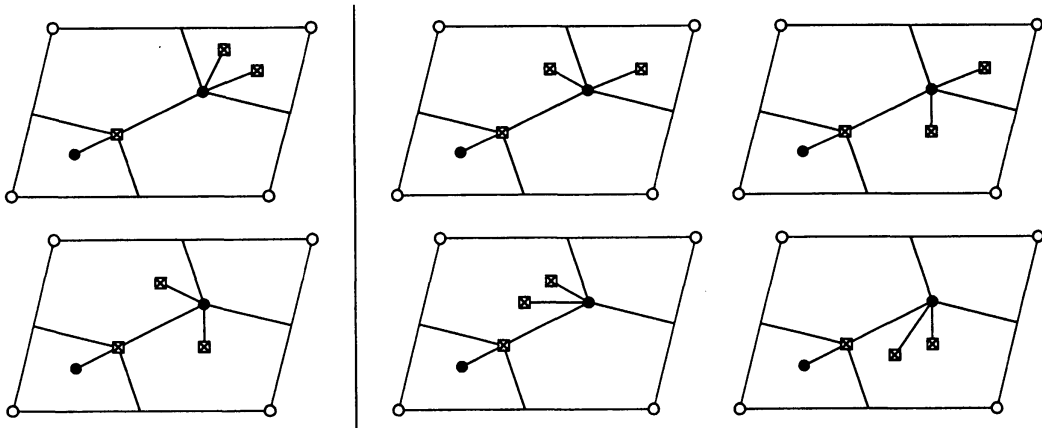
$$y^2 = ax^3 + bxy + cu, \quad z = x^3 + dxy + eu \quad (a \neq 0)$$

とおける。これより y を消去すると、

$$f(x, z) := x^6 + (2e + bd - ad^2)x^5 + (-d^2c - be + 2ade - cd + bde + e^2)x^4 + (cde - be^2 + ce - ae^2 - 2z)x^3 - z(bd + 2e)x^2 + z(cd + be)x + z(z - ce) = 0$$

が得られる。これが $z = 0, k$ で所定の重複根を持つように、係数比較で a, b, c, d, e, k を決める。その際、通常は $z = k$ での高い重複度の根が $x = 1$ になるように、保留しておいた x の正規化を行なうと良いのだが、同じ重複度の根 (同じ値数の点) が複数あるときは互いに共役である可能性があり、その一方を $x = 1$ に正規化してしまうと定義体が不用意に上がって、計算が難航する危険性があるので、その場合は避けた方が良い。また、 $y = \frac{z - x^3 - ex^2}{dx - e}$ なので、根 x に対して $dx - e = 0$ になると、1つの根 x に対して y が2つ定まり、重複度が減って条件に合わなくなることがある (その分は何処か外で分岐が起こってしまう筈だから)。係数比較した連立方程式を解くのは計算機代数ソフトウェアに頼らざるを得ないが、出てきた計算結果の中にこのような無縁解がしばしば現れるので注意が必要である。

例 7.3.1. [6, 51, 411]-dessin は6つあり、そのうち下図左の実の2つが $\text{Mon}(D) = \mathfrak{S}_5$ 、下図右の虚の2対が $\text{Mon}(D) = \mathfrak{S}_6$ なので、まず2つに分かれることが判る。それ以上は不変量では区別できず、それぞれ別々に巧い方法もなさそうなので、ともかく計算に入る。



$$f(x, z) = x^6 + (2e + bd - ad^2)x^5 + (-d^2c - be + 2ade - cd + bde + e^2)x^4 + (cde - be^2 + ce - ae^2 - 2z)x^3 - z(bd + 2e)x^2 + z(cd + be)x + z(z - ce)$$

は $z = 0$ で 5 重根と単根を持つので、

$$\begin{aligned} f(x, 0) &= x^6 + (2e + bd - ad^2)x^5 + (-d^2c - be + 2ade - cd + bde + e^2)x^4 \\ &\quad + (cde - be^2 + ce - ae^2)x^3 \\ &=: x^5(x - f) \end{aligned}$$

と置ける。また、 $z = k$ で 4 重根と単根 2 つを持つが、ここで 4 重根を $x = 1$ に正規化して、

$$\begin{aligned} f(x, k) &= x^6 + (2e + bd - ad^2)x^5 + (-d^2c - be + 2ade - cd + bde + e^2)x^4 \\ &\quad + (cde - be^2 + ce - ae^2 - 2k)x^3 - k(bd + 2e)x^2 + k(cd + be)x + k(k - ce) \\ &=: (x - 1)^4(x^2 - g_1x + g_2) \end{aligned}$$

と置ける。この両者から係数比較をする。得られた解のうち無縁解を取除くと、

$$5d^2 + 24d + 18 = 0, \quad 5d^4 + 18d^3 + 27d^2 + 16d + 6 = 0$$

が得られ、前者から $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$ 上定義された Belyi 対 2 つが、後者から総虚 4 次体 (判別式 $2^6 3^3 5^2$ で、分解体の Galois 群は \mathfrak{S}_4) 上定義された Belyi 対 4 つが、それぞれ得られ、monodromy 群での分類がそれぞれ一つの Galois 軌道を成すことが判った。尚、Beckmann の定理の通り、定義体は 2, 3, 5 の外不分岐である。 ■

7.4. 6 次で完全分岐する点がない場合. $0, 1, \infty$ の逆像はそれぞれ 2 点ずつなので、あり得る valency list は以下の通り:

$$\begin{aligned} &[51, 51, 51], [51, 51, 42], [51, 51, 33], [51, 42, 42], [51, 42, 33], [51, 33, 33], \\ &[42, 42, 42], [42, 42, 33], [42, 33, 33], [33, 33, 33] \end{aligned}$$

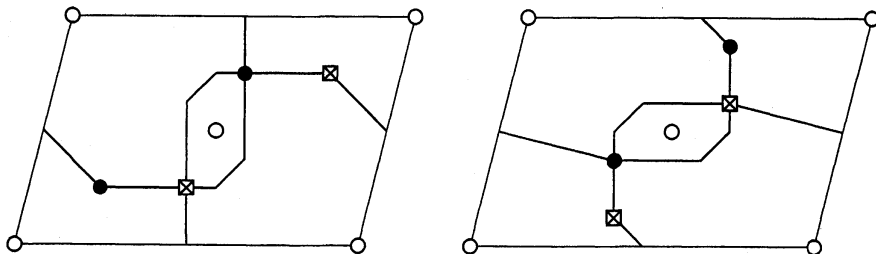
valency 最大の点を ∞ に取りたくなるが、この場合には同じ valency の点が多くあり、それらが互いに共役である可能性も高く、定義体を不用意に上げてしまわないためには、個別の場合に応じた注意が必要である。そうでなくて valency 最大の点を ∞ に取った場合でも、他にもある極の処理が必要で、そのために係数比較した連立方程式の変数が増えたり次数が上がったりして計算量が多くなり、係数比較のみの単純な方法では求まらない場合が多い。現在までで求まっているのは、実質的には、単純な係数比較ではなく、個々の dessin の特徴に注意して、中間被覆などを經由することでも求められる場合のみである。

次の valency list については、上記のような方法が取れない場合を含むため、現在の所、計算が完了していない:

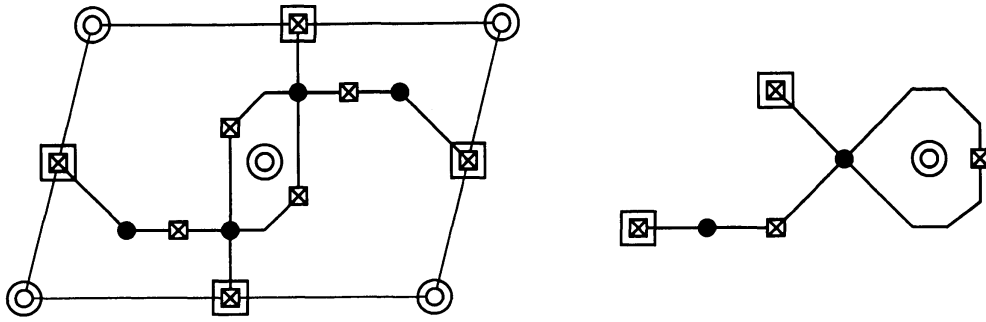
$$[51, 51, 42], [51, 42, 42], [51, 42, 33]$$

以下、個別にうまく計算できる幾つかの例を挙げるに留める。[Bir] で求められているのもこのような場合であるが、ここでは、そこに挙げられている以外の例を紹介する。

例 7.4.1. $[51, 42, 42]$ -dessin は 4 つ存在し、実なもの 2 つ、虚なもの 1 対ある。これらは共に $\text{Mon}(D) = \mathfrak{A}_6$ であり、Nielsen 類も一致するが、 $\text{Car}(D)$ (または重心細分の自己同型群) の違いによって、実の 2 つと虚の 1 対とでは Galois 軌道が異なることが判る。



虚な対の各々は頂点の色を入換える ($z \mapsto 1 - z$) ことで不変なので、重心細分は位数 2 の自己同型を持ち、その固定点は二重印の点である。この自己同型で割ると下図右の種数 0 の $[51, 42, 2211]$ -dessin を得る。



この Belyi射 $u = u(x)$ は次のように容易に求まる: 極の座標を $x = \infty(5重), a(1重)$ とし、零点の座標を $x = 0(4重), 1(2重)$ とすると、

$$u = \frac{x^4(x-1)^2}{k(x-a)} = \frac{g(x)^2h(x)}{k(x-a)} + 1 \quad \deg g = \deg h = 2, \text{ monic}$$

と書けるので、

$$x^4(x-1)^2 = g(x)^2h(x) + k(x-a)$$

となり、これを係数比較して、

$$a = \frac{-3 + \sqrt{-15}}{36}, \quad g(x) = x^2 - \frac{15 + \sqrt{-15}}{30}x + \frac{-3 + \sqrt{-15}}{45},$$

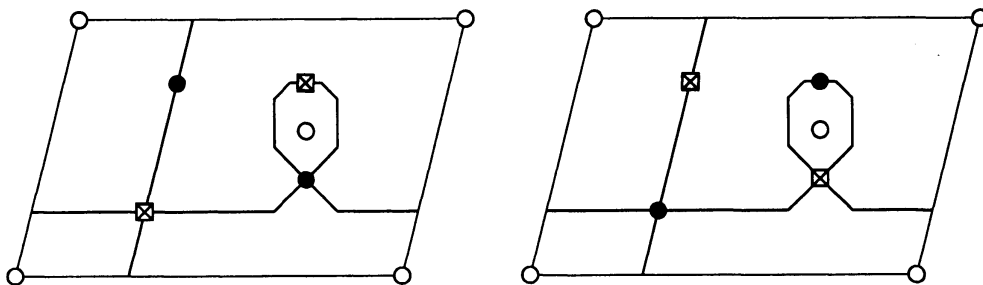
$$h(x) = x^2 - \frac{15 - \sqrt{-15}}{15}x + \frac{-15 + 7\sqrt{-15}}{90}, \quad k = \frac{4 + 4\sqrt{-15}}{15^3}$$

(とその共役)を得る。楕円曲線 E は $x = \infty$ および二重印の 3 点 (即ち、 $x = a$ と $h(x)$ の 2 根) で分岐する P_x^1 の 2 次被覆なので、 $E : ky^2 = (x-a)h(x)$ となる (後の都合で twist をこう選んでおく)。 $E \rightarrow P_u^1$ は重心細分 $s : z \mapsto u = 4z(1-z)$ を経由する。 $1-u = (2z-1)^2$ および

$$1-u = \frac{g(x)^2h(x)}{k(x-a)} = \left(\frac{g(x)y}{x-a}\right)^2$$

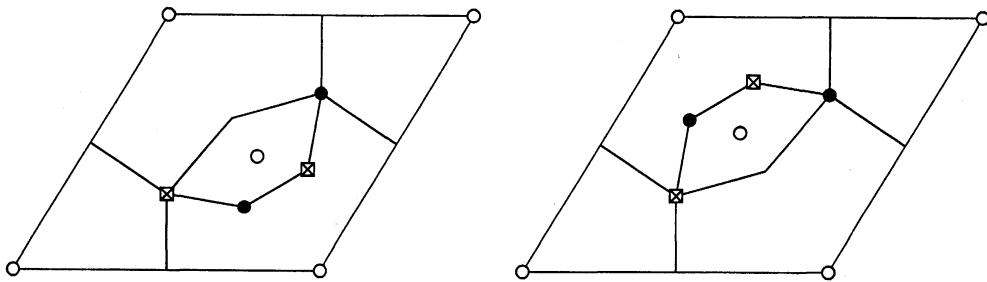
から、 $2z-1 = \frac{g(x)y}{x-a}$ となり、 $\mathbb{Q}(\sqrt{-15})$ 上定義された Belyi対を得る (y の符号の取り方を代えると、頂点の色の入換が起きるが、それは同じ dessin であった)。

残る 2 つの実の dessin は、 $\beta \mapsto 1-\beta$ の変換で頂点の色を入換えることにより互いに移り変わるので、1 つの同じ楕円曲線が両方の Belyi射を持つことになり、楕円曲線 E は \mathbb{Q} 上定義されることが判る。しかし、それ以上の手掛かりがなく、直接計算も困難 (多変数高次の連立方程式が不可避) でまだ求められていない。 Galois 軌道についても、それぞれ \mathbb{Q} 上定義されて Galois 軌道が分かれるか、実 2 次体上定義されて互いに Galois 共役か、未だ不明である。 ■

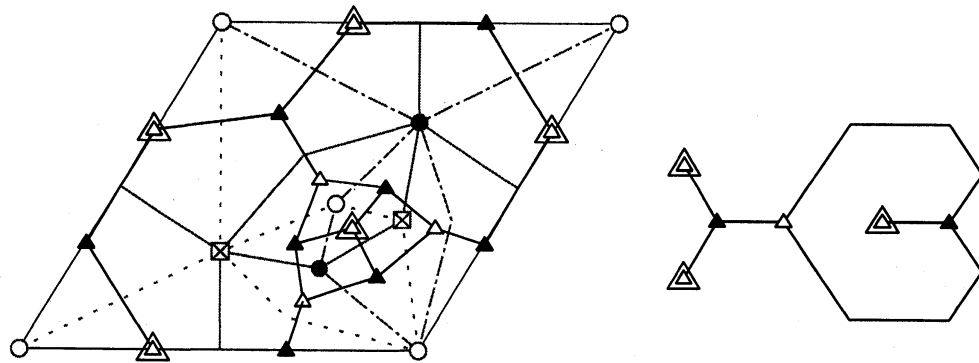


例 7.4.2. [42, 42, 42]-dessin は 2 つ存在し、互いに鏡像 (複素共役) である。従って、Belyi 対 (E, β) は虚二次体上定義されるが、両者は $\beta \mapsto 1-\beta$ の変換で頂点の色を入換えることにより互いに移り変わるので、1 つの同じ楕円曲線が両方の Belyi射を持つことになり、楕円曲線 E は複素共役で不変であること、従って今の場合 \mathbb{Q} 上定義されることが判る。とこ

ろが、このまま直接計算しようとするとは難航する。ここで更に、 $\beta \mapsto \frac{1}{1-\beta} \mapsto \frac{\beta-1}{\beta} \mapsto \beta$ の変換で $0, 1, \infty$ を 3 次巡換で入替えても dessin が不変であることに着目する。



そこで、 $\omega = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ を 1 の虚立方根として、 $0, 1, \infty$ を ∞ に、 $-\omega$ を 0 に、 $-\omega^2$ を 1 に、それぞれ写す 3 次の Belyi-extending map $t: z \mapsto t(z) = u = \frac{(z + \omega)^3}{(z + \omega)^3 - (z + \omega^2)^3}$ を合成すると、Belyi 対 $(E, t \circ \beta)$ の dessin は下図のようになる ($(t \circ \beta)^{-1}(0) = \{\blacktriangle\}, (t \circ \beta)^{-1}(1) = \{\triangle\}$):



この dessin には二重 \triangle 印の点を固定点とする位数 3 の自己同型があり、これで割ると右の種数 0 の $[42, 33, 3111]$ -dessin が得られる。この Belyi 射 $u = u(x)$ は次のように容易に求まる: 極の座標を $x = \infty$ (4 重), 1 (2 重) とし、 1 の逆像 \triangle のうち価数 3 の点を $x = 0$ とすると、

$$u = \frac{g(x)^3}{(x-1)^2}, \quad u-1 = \frac{x^3 h(x)}{(x-1)^2} \quad (\deg g = 2, \deg h = 3)$$

と書け、これより $g(x)^3 - (x-1)^2 = x^3 h(x)$ となる。これから係数比較に持込んでも良いが、 $g(x) \equiv (1-x)^2 \pmod{x^3}$ とみて二項展開しても、 $\deg g = 2$ から $g(x) = 1 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}x^2$ が得られる。以下、 x を $3(x-2)$ で置換えて、改めて

$$g(x) = -(x^2 - 2x - 1), \quad h(x) = -(x^3 - 3x - 6), \quad u = \frac{g(x)^3}{(3x-7)^2} = \frac{x^3 h(x)}{(3x-7)^2} + 1$$

としよう。楕円曲線 E は二重 \triangle 印の 3 点 (即ち h の根) で完全分岐する \mathbb{P}_x^1 の 3 次被覆なので、 $E: y^3 = h(x)$ となる。 $E \rightarrow \mathbb{P}_u^1$ は Belyi-extending map t を経由する。

$\frac{u-1}{u} = \left(\frac{z+\omega^2}{z+\omega}\right)^3$ であるから、

$$\left(\frac{z+\omega^2}{z+\omega}\right)^3 = \frac{x^3 h(x)}{g(x)^3} = \left(\frac{xy}{g(x)}\right)^3,$$

これより $\frac{z + \omega^2}{z + \omega} = \frac{xy}{g(x)}$ となり、 $Q(\omega) = Q(\sqrt{-3})$ 上定義された Belyi射を得る (3乗根の取り方を代えると、頂点の色の巡換が起きるが、それは同じ dessin であった)。 ■

7.5. 7次で2点で完全分岐の場合. 7次になると場合が多いので、ここでは2点が完全分岐する場合のみを考えた。valency list は次の2つがある:

$$[7, 7, 31111], [7, 7, 22111]$$

完全分岐する点を ∞ および $P(0, 0)$ に取る。P は 7等分点である (2等分点でも3等分点でもない) ので、 $x \in L(2\infty - P), y \in L(3\infty - 2P)$ と取れる。6次までの場合と同様に、xの正規化は後回しにして、まず $u := x^2 - y \in L(4\infty - 2P)$ とおくと、 $u \in L(4\infty - 3P)$ となるように、y を取ることにする (これで後で x を正規化したときに y が連動して決まる)。Belyi射 β に対し、定数倍 k は後で調整することにして $z = k\beta$ とおいておく。z の critical value は $0, k, \infty$ である。ここで、幾つかの関数の ∞, P での位数をまとめておく。

	u	xy	x ³	y ²	x ² y	z
ord _∞	-4	-5	-6	-6	-7	-7
ord _P	≥ 3	3	3	4	4	7

$y^2 \in L(6\infty - 3P) = \langle x^3, xy, u \rangle$ および $z \in L(7\infty - 3P) = \langle x^2y, x^3, xy, u \rangle$ である。ここで、 $x^3 - y^2 \in L(5\infty - 3P) = \langle xy, u \rangle$ となるように x を正規化し、更に、 $x^2y - z \in L(6\infty - 3P)$ となるように k を調整すると、

$$y^2 = x^3 + axy + bu, \quad z = x^2y + cx^3 + dxy + eu$$

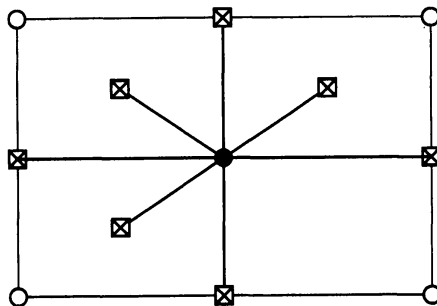
とおける。これより y を消去すると、

$$\begin{aligned} f(x, z) := & x^7 - (ac - 2d + c^2 - b)x^6 - (ae + 2e + 2ec - d^2 - 2bd - bc + acd)x^5 \\ & - (-bcd + 2de - bd^2 + be + ade - ace + e^2)x^4 \\ & - (-az - 2cz + bce + bde - e^2 - ae^2)x^3 \\ & + z(2e - b + ad)x^2 - z(bd + ae)x + z(be - z) = 0 \end{aligned}$$

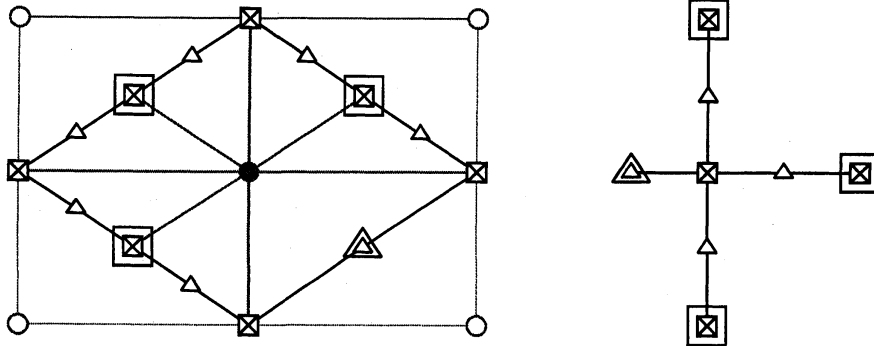
が得られる。これが $z = 0$ で $x = 0$ (7重根)、 $z = k$ で所定の重複根を持つように、係数比較で a, b, c, d, e, k を決めればよい。

尚、種数 1 の $[7, 7, *]$ -dessin については、どの場合も、 $0, \infty$ を ∞ に、1 を 0 に写す Belyi-extending map $t : z \mapsto -\frac{(z-1)^2}{4z}$ を合成すると、 $(E, t \circ \beta)$ が位数 2 の自己同型を持ち、これで割って種数 0 の dessin (特に木になる) が得られるので、それを利用しても計算できる。

例 7.5.1. $[7, 7, 22111]$ -dessin は 5 つあるが、そのうち、 $\text{Mon}(D) = \mathfrak{A}_7$, Nielsen 類 (7A, 7B, 2A) (即ち 7次巡環 z, x が $\text{Mon}(D)$ 内で非共役) なものは下図 1 つだけなので、Q 上定義されることが判る。



Belyi-extending map $t : z \mapsto -\frac{(z-1)^2}{4z}$ を合成することにより下図左の dessin が得られる ($(t \circ \beta)^{-1}(0) = \{\square\}, (t \circ \beta)^{-1}(1) = \{\triangle\}$)。これは二重印の点を固定点とする位数 2 の自己同型を持ち、この自己同型で割ると下図右の種数 0 の $[7, 4111, 2221]$ -dessin を得る。



この Belyi 射 $u = u(x)$ の極を $x = \infty$ 、4 個の零点の座標を $x = 0$ とし、 $u - 1$ の唯一の単根を $x = 1$ とすると、

$$u = kx^4g(x) = k(x-1)h(x)^2 + 1 \quad \deg g = \deg h = 3, \text{ monic}$$

と書けるので、differential trick などにより容易に、

$$g(x) = x^3 + \frac{7}{5}x^2 + \frac{56}{25}x + \frac{28}{5}, \quad h(x) = x^3 + \frac{6}{5}x^2 + \frac{8}{5}x + \frac{16}{5}, \quad k = -\frac{25}{256}$$

を得る。楕円曲線 E は二重印の 4 点 (即ち、 $x = 1$ と $g(x)$ の 3 根) で分岐する P_x^1 の 2 次被覆なので、 $E : y^2 = (x-1)g(x)$ となる。 $E \rightarrow P_u^1$ は $t : z \mapsto u = -\frac{(z-1)^2}{4z}$ を経由する。 $\frac{u}{u-1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$ および

$$\frac{u}{u-1} = \frac{kx^4g(x)}{k(x-1)h(x)^2} = \frac{x^4(x-1)g(x)}{(x-1)^2h(x)^2} = \left(\frac{x^2y}{(x-1)h(x)}\right)^2$$

から、 $\frac{z-1}{z+1} = \frac{x^2y}{(x-1)h(x)}$ となり、 \mathbb{Q} 上定義された Belyi 対を得る (y の符号の取り方を代えれば、 \circ と \bullet との入換が起きるが、それは同じ dessin であった)。 ■

8. 表

- “定義体” の欄に括弧付きで群が書いてあるものは、定義体の Galois 閉包の Galois 群のみ示したものである。
- “定義体” の欄・“Mon” (monodromy 群) の欄の nT_i は Butler-McKay[B-MK] の可移置換群の表による番号である。
- \mathbb{Q} 上定義される場合には、 j -不変量の素因数分解と共に、Cremona の楕円曲線の表 [Cre, Cre2] による分類記号を “ID” の欄に記したが、dessin は $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の同型類しか定めないので参考程度である。

8.1. 5 次以下の場合 (再計算).

val. list	#	定義体	Mon	Nielsen 類	j	ID	備考
[3, 3, 3]	1	\mathbb{Q}	C_3	(3A, 3A, 3A)	0	27A3	
[4, 4, 31]	1	\mathbb{Q}	\mathfrak{S}_4	(4A, 4A, 3A)	$2^1 3^{-8} 47^2$	48A6	
[4, 4, 22]	1	\mathbb{Q}	C_4	(4A, 4A, 2B)	$2^6 3^3$	32A2	
[5, 5, 311]	1	\mathbb{Q}	\mathfrak{A}_5	(5A, 5A, 3A)	$-2^{-10} 3^{-5} 269^3$	150A3	
	1	\mathbb{Q}	\mathfrak{A}_5	(5A, 5B, 3A)	$2^{12} 3^{-5} 5^1$	75C1	
[5, 5, 221]	1	\mathbb{Q}	\mathfrak{A}_5	(5A, 5B, 2A)	$2^{-15} 5^1 211^3$	50B2	
[5, 41, 41]	1	\mathbb{Q}	\mathfrak{S}_5	(5A, 4A, 4A)	$2^1 3^3 5^1$	400H1	
	2	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$	F_{20}	(5A, 4A, 4B)	$-2^{-1} 5^2$	400C1	#
[5, 41, 32]	2	$\mathbb{Q}(\sqrt{6})$	\mathfrak{S}_5	(5A, 4A, 6A)			
[5, 32, 32]	1	\mathbb{Q}	\mathfrak{S}_5	(5A, 6A, 6A)	$-2^{13} 3^{-3} 5^1$	900D1	

楕円曲線自体は \mathbb{Q} 上定義できて、Belyi射が虚二次体上定義され互いに複素共役

8.2. 6 次で ∞ が完全分岐する場合 (一部再計算).

val. list	#	定義体	Mon	Nielsen 類	j	ID	備考
[6, 6, 3111]	1	\mathbb{Q}	${}_6T_5$	(6A, 6A, 3A)	0	27A3	T
	3	$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$	\mathfrak{S}_6	(6A, 6A, 3A)			
[6, 6, 2211]	1	\mathbb{Q}	${}_6T_6$	(6A, 6B, 2B)	$2^{11} 3^{-1}$	48A4	D
	1	\mathbb{Q}	${}_6T_9$	(6A, 6B, 2A)	$2^{-3} 3^3 7^3$	54B1	T'
	1	\mathbb{Q}	\mathfrak{S}_5	(6A, 6A, 2A)	$2^{-3} 3^{-1} 5^{-1} 211^3 1979^3$	90C7	
[6, 51, 411]	2	$\mathbb{Q}(\sqrt{6})$	\mathfrak{S}_5	(6A, 5A, 4A)			
	4	(\mathfrak{S}_4)	\mathfrak{S}_6	(6A, 5A, 4A)			
[6, 51, 321]	8	$({}_8T_{24})$	\mathfrak{S}_6	(6A, 5A, 6B)			
[6, 51, 222]	1	\mathbb{Q}	\mathfrak{S}_5	(6A, 5A, 2B)	$3^{-2} 5^{-8} 23^3 73^3$	15A4	
[6, 42, 411]	1	\mathbb{Q}	${}_6T_{11}$	(6A, 4B, 4A)	$2^6 3^{-2} 7^3$	96B1	D
	4	(\mathfrak{S}_4)	\mathfrak{S}_6	(6A, 4B, 4A)			
[6, 42, 321]	2	$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$	${}_6T_{13}$	(6A, 4B, 6B)			
	3	(\mathfrak{S}_3)	\mathfrak{S}_6	(6A, 4B, 6B)			
[6, 42, 222]	1	\mathbb{Q}	${}_6T_{11}$	(6A, 4A, 2D)	$2^4 3^{-2} 13^3$	24A1	D
[6, 411, 33]	2	$\mathbb{Q}(\sqrt{6})$	\mathfrak{S}_5	(6A, 4A, 3A)			
[6, 33, 321]	2	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$	\mathfrak{S}_6	(6A, 3B, 6B)			
[6, 33, 222]	1	\mathbb{Q}	C_6	(6A, 3A, 2A)	0	27A3	DT

D 楕円曲線から P^1 への 2 次被覆を經由
T 楕円曲線から P^1 への Galois 3 次被覆を經由
T' 楕円曲線から P^1 への non-Galois 3 次被覆を經由

8.3. 6 次で完全分岐する点がない場合 (一部再計算).

val. list	#	定義体	Mon	Nielsen 類	j	ID	備考
[51, 51, 51]	1	\mathbb{Q}	\mathfrak{A}_5	(5A, 5A, 5A)	$2^{45-2}11^3$	20A1	
	2 × 3	$\mathbb{Q}(\sqrt{-15})$	\mathfrak{A}_6	(5A, 5A, 5B)			*
	2	$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	\mathfrak{A}_6	(5A, 5A, 5A)			#
[51, 51, 42]	4	実 2 つ + 虚 1 対	\mathfrak{A}_6	(5A, 5A, 4A)			?
	4	虚 2 対	\mathfrak{A}_6	(5A, 5B, 4A)			?
[51, 51, 33]	1	\mathbb{Q}	\mathfrak{A}_6	(5A, 5B, 3B)	$2^13^35^1$	400H1	
	1	\mathbb{Q}	\mathfrak{A}_5	(5A, 5A, 3A)	$2^43^{-4}7^3$	300D2	
	1	\mathbb{Q}	\mathfrak{A}_5	(5A, 5B, 3A)	$3^{-4}5^{-4}13^337^3$	15A1	
[51, 42, 42] ※	2	$\mathbb{Q}(\sqrt{-15})$	\mathfrak{A}_6	(5A, 4A, 4A)			
	2	実 2 つ	\mathfrak{A}_6	(5A, 4A, 4A)			?
[51, 42, 33]	2	実 2 つ	\mathfrak{A}_6	(5A, 4A, 3B)			?
[51, 33, 33]	1	\mathbb{Q}	\mathfrak{A}_5	(5A, 3B, 3B)	$-2^{45-6}109^3$	180A4	
[42, 42, 42]	2	$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	\mathfrak{A}_6	(4A, 4A, 4A)			#
[42, 42, 33]	1	\mathbb{Q}	${}_6T_7$	(4A, 4A, 3A)	$2^43^{-2}13^3$	48A1	D
	1	\mathbb{Q}	${}_6T_{10}$	(4A, 4B, 3B)	-2^13^1	216B1	
[42, 33, 33]	0	-	-	-	-	-	-
[33, 33, 33]	1	\mathbb{Q}	${}_6T_4$	(3A, 3A, 3A)	$2^43^35^3$	36A2	I

- * $0, 1, \infty$ の入換えで移り合う 3 つの dessin が 2 組あって、組同士が複素共役
 ※ cartographic 群または重心細分の自己同型群で区別できる
 # 楕円曲線自体は \mathbb{Q} 上定義できて、Belyi 射が虚二次体上定義され互いに複素共役
 D 楕円曲線から \mathbb{P}^1 への 2 次被覆を經由
 I 楕円曲線の 2 次の同種写像を經由
 ? 単一の Galois 軌道かどうか未決定

8.4. 7 次で $0, \infty$ が完全分岐する場合.

val. list	#	定義体	Mon	Nielsen 類	j	ID	備考
[7, 7, 31111]	2	$\mathbb{Q}(\sqrt{21})$	\mathfrak{A}_7	(7A, 7B, 3A)			
	3	$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{28})$	\mathfrak{A}_7	(7A, 7A, 3A)			
[7, 7, 22111]	1	\mathbb{Q}	\mathfrak{A}_7	(7A, 7B, 2A)	$2^{-14}3^35^{-7}12099^3$	490K2	
	2	$\mathbb{Q}(\sqrt{21})$	\mathfrak{A}_7	(7A, 7A, 2A)			
	2	$\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$	$\text{PSL}(2, 7)$	(7A, 7A, 2A)			

参考文献

- [LMS200] “The Grothendieck theory of dessins d’enfants”, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 200 (L. Schneps Ed.), Cambridge Univ. Press, 1994.
- [LMS242] “Geometric Galois Actions 1”, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 242 (L. Schneps, P. Lochak Eds.), Cambridge Univ. Press, 1997.
- [LMS243] “Geometric Galois Actions 2”, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 242 (L. Schneps, P. Lochak Eds.), Cambridge Univ. Press, 1997.
- [Beck] S. Beckmann, Ramified primes in the field of moduli of branched coverings of curves, *J. Algebra* 125 (1989), 236–255.
- [Bel] G. V. Belyĭ, On Galois extensions of a maximal cyclotomic field, *Izv. Akad. Nauk USSR* 43 (1979), 267–276. (English transl. in *Math. USSR Izvestija* 14 (1980), 247–256.)
- [Bir] B. Birch, “Noncongruence subgroups, covers and drawings”, in [LMS200], 25–46.
- [B-MK] G. Butler, J. McKay, “The transitive groups of degree up to eleven”, *Comm. Algebra* 11 (1983), no. 8, 863–911.
- [Cre] J. E. Cremona, “Algorithms for modular elliptic curves” (2nd ed.), Cambridge Univ. Press, 1997.
- [Cre2] J. E. Cremona, “Elliptic Curve Data”, <http://www.warwick.ac.uk/staff/J.E.Cremona/ftp/data/>.
- [Ell] J. S. Ellenberg, “Galois invariants of dessins d’enfants”, in “Arithmetic fundamental groups and noncommutative algebra”, *Proc. Sympos. Pure Math.*, 70 (M. Fried, Y. Ihara eds.), 27–42, AMS, 2002.
- [Gro] A. Grothendieck, “Esquisse d’un Programme”, English transl. in [LMS242].
- [HoNa] K. Hoshino, H. Nakamura, “Belyi function on $X_0(49)$ of degree 7”, Appendix to: K. Hoshino, “The Belyi functions and dessin d’enfants corresponding to the non-normal inclusions of triangle groups”, *Math. J. Okayama Univ.* 52 (2010), 61–63.
- [Kura] 倉繁章, 種数 1 における Belyi 射の計算的研究, 修士論文 (上智大学, 2007 年度).
- [Mal] G. Malle, “Fields of definition of some three point ramified field extensions”, in [LMS200], 147–168.
- [Miya] 宮下昌明, デッサンの集合への絶対ガロア群の作用の忠実性, 修士論文 (大阪大学, 1998 年度).
- [ShaVoe] G. B. Shabat, V. A. Voevodsky, “Drawing curves over number fields” in “The Grothendieck Festschrift, Vol. III”, *Progr. Math.* 88, Birkhäuser, 1990, 199–227.
- [Sch] L. Schneps, “Dessins d’enfants on the Riemann sphere”, in [LMS200], 47–77.
- [Wood] M. Wood, “Belyi-extending maps and the Galois action on dessins d’enfants”, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 42 (2006) no.3, 721–737.
- [Yano] 矢野謙太郎, 楕円曲線の 6 次 Belyi 射について, 修士論文 (上智大学, 2006 年度).
- [Zap] L. Zapponi, “Dessins d’enfants en genre 1”, in [LMS243], 79–116.

上智大学理工学部情報理工学科 102-8554 東京都千代田区紀尾井町 7-1
 E-mail address: tsuno-h@cc.sophia.ac.jp