数理解析研究所講究録
第 1813 巻 2012 年 183-192

一般 Bernoulli 数の poly 化と付随する L 関数の構成および諸性質について

近畿大学大学院総合理工学研究科　佐々木　義卓 (Yoshitaka Sasaki)
Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering
Kinki University

1　序論

金子 [5] によって, ポリログ関数

$$\mathrm{Li}_k(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^k} \qquad (|x| < 1, k \in \mathbb{Z})$$

を用いた Bernoulli 数の拡張 **poly-Bernoulli 数** $\mathbb{B}_n^{(k)}$ が導入された. poly-Bernoulli 数は, 次の母関数で定義されるものである:

$$\left.\frac{\mathrm{Li}_k(x)}{x}\right|_{x=1-e^{-t}} = \frac{\mathrm{Li}_k(1-e^{-t})}{1-e^{-t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{B}_n^{(k)}}{n!} t^n.$$

これは $k=1$ のとき, $\mathrm{Li}_1(1-e^{-t}) = t$ であることから, 従来の Bernoulli 数の母関数

$$\frac{te^t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n \qquad (\text{ただし, } B_1 = 1/2)$$

となることがわかる. poly-Bernoulli 数は, 双対関係 $\mathbb{B}_n^{(-k)} = \mathbb{B}_k^{(-n)}$ ([5]) を満たし, 最近ではその組合せ論的解釈 ([3], [8]) も報告されている ([6] も参照).

さらに, 荒川・金子 [1] によって poly-Bernoulli 数 (実際は, その変種である modified poly-Bernoulli 数) を非正整数点の特殊値にもつゼータ関数 (**荒川・金子のゼータ関数**)

$$\xi_k(s) := \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} \frac{\mathrm{Li}_k(1-e^{-t})}{e^t-1}\, dt \qquad (k \geq 1)$$

が導入された. これは, Riemann ゼータ関数の積分表示

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} \frac{1}{e^t-1}\, dt \tag{1.1}$$

と酷似した形をしており, 実際 $k=1$ のときは $\xi_1(s)=s\zeta(s+1)$ となるので, 荒川・金子のゼータ関数は Riemann ゼータ関数の拡張であることが分かる. Riemann ゼータ関数の非正整数点は, Bernoulli 数を用いて記述できることにも注意されたい.

荒川・金子のゼータ関数は, poly-Bernoulli 数をその特殊値としてもつだけの関数ではなく, 非常に豊かな構造をもっており, さらにその構造から導かれる多重ゼータ関数との関係には, 感動を覚える. ここに, 荒川・金子のゼータ関数の諸性質を列挙する:

定理 1.1 (荒川・金子 [1])

1. 任意の $k \geq 1$ に対して, $\xi_k(s)$ は, $\mathbb{C}$ 上整関数として解析接続される.
2. 任意の非負整数 n に対して,
$$\xi_k(-n)=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\binom{n}{l}\mathbb{B}_l^{(k)}=(-1)^nC_n^{(k)}.$$
3. $\Re s>1$ に対して,
$$\begin{aligned}\xi_k(s)=&(-1)^{k-1}\Biggl\{\sum_{j=1}^{k-1}\zeta(\underbrace{1,\ldots,1,\overset{j\text{-th}}{\overset{\downarrow}{2}},1,\ldots,1}_{k-1},s)+s\zeta(\underbrace{1,\ldots,1}_{k-1},s+1)\Biggr\}\\&+\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^j\zeta(k-j)\zeta(\underbrace{1,\ldots,1}_{j},s).\end{aligned}$$

ここで, $C_n^{(k)}$ は **modified poly-Bernoulli 数**と呼ばれるもので,
$$\frac{\mathrm{Li}_k(1-e^{-t})}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n^{(k)}}{n!}t^n$$
で定義される. また
$$\zeta(s_1,\ldots,s_n):=\sum_{0<m_1<\cdots<m_n}\frac{1}{m_1^{s_1}\cdots m_n^{s_n}}$$
は**多重ゼータ関数**であり, $\Re s_j \geq 1$ $(j=1,\ldots,n-1)$ および $\Re s_n>1$ に対して絶対収束する.

上定理における 3 番目の性質から, 大野 [9] により
$$\xi_k(n)=\zeta^\star(\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1},k+1)$$
が示されている. 右辺は**等号付き多重ゼータ値 (多重ゼータ星値)** と呼ばれ,
$$\zeta^\star(k_1,\ldots,k_n):=\sum_{0<m_1\leq\cdots\leq m_n}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_n^{k_n}}$$

で定義される. したがって 3 番目の性質は, 荒川・金子のゼータ関数と等号付き多重ゼータ値とを関係づける重要な性質となっている. 最近では, 金子・大野 [7] により, 等号付き多重ゼータ値の**双対性**が荒川・金子のゼータ関数の性質を用いて導かれている. また, 金子・大野の結果の別証明が, 山﨑 [11] によって与えられている.

本稿では, この荒川・金子のゼータ関数の神秘に満ちた構成法を紐解き, その構成法の Dirichlet L 関数への適用について述べる. さらにその拡張した L 関数の特殊値を用いて, 一般 Bernoulli 数の poly 版を導入する.

2 荒川・金子のゼータ関数の構造

荒川・金子のゼータ関数の構造を読み解くには, poly-Bernoulli 数の拡張法の意味を読み解く事から始めなければならない. では poly-Bernoulli 数の定義に使ったポリログ関数とはいったい何であろうか？なぜポリログ関数なのであろうか？またポリログ関数の変数部に代入した $1-e^{-t}$ という関数は, いったいどういう意味をもつのであろうか？

前節で, 荒川・金子のゼータ関数の重要な性質として 定理 1.1 の 3 を強調した. ここでは, 3 番目の性質の証明のポイントとそこから分かる荒川・金子のゼータ関数の奇麗な構造に触れ, そこから poly-Bernoulli 数の謎に包まれた拡張法 ——定義に用いるポリログ関数と $1-e^{-t}$ という関数—— の意味を読みとりたいと思う.

定理 1.1 の 3 は, つぎの積分を二通りの方法で計算することにより導かれる:

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty x_k^{s-1} \operatorname{Li}_1(1-e^{-(\sum_{h=1}^k x_h)}) \prod_{j=1}^k \frac{1}{e^{\sum_{l=j}^k x_l}-1}\, dx_1 \cdots dx_k \tag{2.1}$$
$$= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty x_k^{s-1} \sum_{h=1}^k x_h \prod_{j=1}^k \frac{1}{e^{\sum_{l=j}^k x_l}-1}\, dx_1 \cdots dx_k.$$

この積分を帰納的に計算するので, 見やすくするために次のような積分を導入する:

$$J_\nu^{(k)}(s) := \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty x_k^{s-1} \operatorname{Li}_\nu(1-e^{-(\sum_{h=\nu}^k x_h)}) \prod_{j=\nu}^k \frac{1}{e^{\sum_{l=j}^k x_l}-1}\, dx_\nu \cdots dx_k$$

$(\nu=1,\ldots k)$. 容易に, (2.1) が $J_1^{(k)}(s)$ であることと $J_k^{(k)}(s)=\Gamma(s)\xi_k(s)$ がわかる.

■計算その1　まず (2.1) の右辺から,

$$J_1^{(k)}(s)=\sum_{h=1}^{k-1}\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty x_h x_k^{s-1}\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{e^{\sum_{l=j}^{k}x_l}-1}\,dx_1\cdots dx_k$$
$$+\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty x_k^{s}\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{e^{\sum_{l=j}^{k}x_l}-1}\,dx_1\cdots dx_k$$

がわかる. これは, 多重ゼータ関数の積分表示 ([1] 参照)

$$\zeta(s_1,\ldots,s_k)=\frac{1}{\Gamma(s_1)\cdots\Gamma(s_k)}\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\prod_{h=1}^{k}x_h^{s_h-1}\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{e^{\sum_{l=j}^{k}x_l}-1}\,dx_1\cdots dx_k$$

($\Re s_j\geq 1$ $(j=1,\ldots,k-1)$ および $s_k>1$) から, $J_1(s)$ が定理 1.1 の 3 の右辺 1, 2 項目で書けることが分かる.

■計算その2　一方で, $J_1^{(k)}(s)$ をポリログ関数の性質

$$\frac{d}{dx}\operatorname{Li}_k(x)=\frac{1}{x}\operatorname{Li}_{k-1}(x)\qquad(k\geq 2)\tag{2.2}$$

したがって

$$\frac{d}{dt}\operatorname{Li}_k(1-e^{-t})=\frac{\operatorname{Li}_{k-1}(1-e^{-t})}{e^t-1}\qquad(k\geq 2)\tag{2.3}$$

を用いて計算する.

$$\begin{aligned}J_1^{(k)}(s)&=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty x_k^{s-1}\left(\frac{d}{dt}\operatorname{Li}_2(1-e^{-(\sum_{h=1}^{k}x_h)})\right)\prod_{j=2}^{k}\frac{1}{e^{\sum_{l=j}^{k}x_l}-1}\,dx_1\cdots dx_k\\&=\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty x_k^{s-1}\left\{\zeta(2)-\operatorname{Li}_2(1-e^{-(\sum_{h=2}^{k}x_h)})\right\}\prod_{j=2}^{k}\frac{1}{e^{\sum_{l=j}^{k}x_l}-1}\,dx_2\cdots dx_k\\&=\Gamma(s)\zeta(2)\zeta(\underbrace{1,\ldots,1}_{k-2},s)-J_2^{(k)}(s)\end{aligned}$$

となるので, あとは同じ操作を繰り返せば, 定理 1.1 の 3 の第 3 項目を得る事が出来る:

$$J_1^{(k)}(s)=\Gamma(s)\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j-1}\zeta(j+1)\zeta(\underbrace{1,\ldots,1}_{k-j-1},s)+(-1)^{k-1}\Gamma(s)\xi_k(s).$$

上の計算での重要なポイントは次の 2 つである.

(i) $\mathrm{Li}_1(1-e^{-t})=t$ という性質から, $J_1^{(k)}(s)$ を全く異なる 2 通りの方法で計算できた.

(ii) (2.3) の関係から, $J_1^{(k)}(s)$ に帰納的構造を与える事ができた.

さらに (2.3) の右辺の分母が, Riemann ゼータ関数の積分表示 (1.1) の被積分関数であることにも注意すると, 荒川・金子のゼータ関数の重要な性質 (定理 1.1 の 3) は, ポリログ関数の帰納的関係 (2.2), (2.3) と $1-e^{-t}$ および Riemann ゼータ関数の積分関数の非積分関数が織りなす絶妙なハーモニーから導かれることがわかる.

この絶妙なハーモニーをさらに観察してみよう. (i) からは, $1-e^{-t}$ という関数が $\mathrm{Li}_1(x)$ の逆関数としての役割であることが理解できる. (ii) からは, ポリログ関数の役割を理解できる. (2.3) の右辺の分母に注目すると, それはもともと

$$\frac{1}{e^t-1}=\frac{(1-e^{-t})'}{1-e^{-t}} \tag{2.4}$$

であった. さらにこの式の左辺は Riemann ゼータ関数の積分表示 (1.1) の被積分関数である. このことからポリログ関数は, ゼータ関数の被積分関数によって構成される (2.4) のような微分方程式の解の逆関数を意味している事がわかる.

以上をまとめると, 荒川・金子のゼータ関数は L 関数が

$$L(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}G(t)\,dt$$

で与えられたとき,

$$L_k(s):=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}G(t)P_k(\varphi(t))\,dt \qquad (k\geq 1)$$

を考えることと見ることができる. ここで $\varphi(t)$ は, 適当な実数 C を用いて

$$G(t)=C\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \tag{2.5}$$

をみたす関数で, $P_1(x)$ は $\varphi(t)$ の逆関数 $(P_1(\varphi(t))=t)$. $P_k(x)$ は,

$$P_k(x)=\int_0^x \frac{P_{k-1}(x)}{x}\,dx \qquad (k\geq 2)$$

で帰納的に構成される関数である.

また, poly-Bernoulli 数は上記のように構成された L 関数の非積分関数を母関数 (もしくは, その非正整数点での特殊値) とする数と見る事ができる.

3 Dirichlet L の拡張法

Dirichlet L 関数は, Dirichlet 指標 $\chi\ (\mathrm{mod} N)$ を用いて,

$$L(s,\chi):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^{s}}$$

で定義され, その積分表示は

$$L(s,\chi)=\frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{m=1}^{N}\chi(m)\int_{0}^{\infty}t^{s-1}\frac{e^{(N-m)t}}{e^{Nt}-1}\,dt$$

である. この被積分関数は m に応じて変動するため, 変動しない部分を前節 (2.5) の関数 G に当てはめて, 拡張を考える. 以下, 二通りの拡張および拡張した L 関数の諸性質について述べる.

4 Ordinary case

$G(t)=1/(e^{Nt}-1)$ とおくと, (2.5) の解は,

$$\varphi(t)=1-e^{-Nt}$$

となる (ただし, $C=1/N$). したがって, $P_k(x)=\mathrm{Li}_k(x)/N$ となり, これを用いて拡張した L 関数は,

$$L_k(s,\chi;1-e^{-Nt})=\frac{1}{\Gamma(s)}\sum_{m=1}^{N}\chi(m)\int_{0}^{\infty}t^{s-1}\frac{e^{(N-m)t}}{e^{Nt}-1}\frac{\mathrm{Li}_k(1-e^{-Nt})}{N}\,dt. \tag{4.1}$$

ここで

$$\xi_k(s,a):=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_{0}^{\infty}t^{s-1}e^{(1-a)t}\frac{\mathrm{Li}_k(1-e^{-t})}{e^{t}-1}\,dt\qquad(0<a<1), \tag{4.2}$$

とおけば, (4.1) は

$$L_k(s,\chi;1-e^{-Nt})=\frac{1}{N^{s+1}}\sum_{m=1}^{N}\chi(m)\xi_k(s,m/N).$$

と書ける. ここで関数 $\xi_k(s,x)$ は $\Re s>0$ に対して絶対収束する.

注意 4.1 関数 $\xi_k(s,x)$ は, 荒川・金子のゼータ関数の拡張として, Coppo-Candelpergher [4] によって最初に導入された. また (4.1) は, 本研究とは独立に, 最近, Bayad・浜畑 [2] によっても導入されている.

定理 1.1 で述べた荒川・金子のゼータ関数が満たす性質と同様の性質が, この L 関数に対しても成り立つ. それを述べるために, いくつか定義する. 一般 Bernoulli 数 $B_{n,\chi}$:

$$\sum_{m=1}^{N}\chi(m)\frac{te^{mt}}{e^{Nt}-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_{n,\chi}}{n!}t^n$$

は, Dirichlet L 関数の非正整数点での特殊値を表すもの, もしくは Dirichlet L 関数の積分表示の被積分関数であった. したがって一般 Bernoulli 数の多重版を, (4.1) の被積分関数で導入するのは自然である.

定義 4.2 この場合の一般 Bernoulli 数の多重版を次で定義する:

$$\sum_{m=1}^{N}\chi(m)\frac{e^{mt}\,\mathrm{Li}_k(1-e^{-Nt})}{N(e^{Nt}-1)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbb{B}_{n,\chi}^{(k)}}{n!}t^n. \tag{4.3}$$

また, Dirichlet L 関数を (4.1) のように拡張すると, その L 関数は定理 1.1 の 3 と同様の性質を見たす. そのとき対応する L 関数を次で定義する.

定義 4.3 Hurwitz 型の多重ゼータ関数を

$$\zeta_{H,k}(s_1,\ldots,s_k;x):=\sum_{0<n_1<\cdots<n_k}\frac{1}{n_1^{s_1}\cdots n_{k-1}^{s_{k-1}}(n_k-1+x)^{s_k}}\qquad(0<x<1) \tag{4.4}$$

で定義し, それに付随する L 関数を,

$$L_k(s_1,\ldots,s_k;\chi):=\sum_{m=0}^{N}\chi(m)\zeta_{H,k}(s_1,\ldots,s_k;m/N)$$

で定義する.

以上を用いると, (4.1) がみたす性質は, 次のように述べられる.

定理 4.4 (佐々木 [10])

1. 任意の $k\geq 1$ に対して, $L_k(s,\chi;1-e^{-t})$ は $\mathbb{C}$ 上整関数として解析接続される.
2. 任意の非負整数 n に対して,

$$L_k(-n,\chi;1-e^{-Nt})=(-1)^n\chi(-1)\mathbb{B}_{n,\chi}^{(k)}.$$

3. $\Re s > 1$ に対して,

$$L_k(s,\chi; 1-e^{-Nt})$$
$$= \frac{(-1)^{k-1}}{N^{s+1}} \left\{ \sum_{j=1}^{k-1} L_k(1,\ldots,1, \overset{j\text{-th}}{\overset{\downarrow}{2}}, 1,\ldots,1,s;\chi) + sL_k(1,\ldots,1,s+1;\chi) \right\}$$
$$+ \frac{1}{N^{s+1}} \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^j \zeta(k-j) L_{j+1}(\underbrace{1,\ldots,1}_{j}, s; \chi).$$

5 Another case

もう一つの拡張は,

$$G(t) = \frac{1}{e^{Nt/2} - e^{-Nt/2}}$$

として導かれるものである. そのとき,

$$\varphi(t) = \frac{e^{Nt/4} - e^{-Nt/4}}{e^{Nt/4} + e^{-N/4t}} = \tanh(Nt/4)$$

$(C = 1/N$ とした$)$ となり, その逆関数は

$$P_1(x) = \frac{4}{N} \operatorname{arctanh} x = (4/N) \int_0^x \frac{dx}{1-x^2} = \frac{4}{N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} =: \frac{4}{N} \mathrm{Ath}_1(x).$$

である. さらに,

$$\mathrm{Ath}_k(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)^k} = \int_0^x \frac{\mathrm{Ath}_{k-1}(x)}{x} dx \qquad (k \geq 2)$$

とすれば, この場合の L 関数は,
(5.1)
$$L_k(s,\chi; \tanh(Nt/4)) = \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{m=1}^{N} \chi(m) \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{(N/2-m)t} \frac{4\,\mathrm{Ath}_k(\tanh(Nt/4))}{N(e^{Nt/2} - e^{-Nt/2})} dt$$

となる. 上式右辺の積分部を

$$\psi_k(s,a) := \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{(2-4a)t} \frac{\mathrm{Ath}_k(\tanh t)}{e^{2t} - e^{-2t}} dt \qquad \text{for } 0 < a < 1,$$

とすれば, (5.1) は以下のように書ける:

$$L_k(s,\chi, \tanh(Nt/4)) = \left(\frac{4}{N}\right)^{s+1} \sum_{m=1}^{N} \chi(m) \psi_k(s, m/N).$$

ここで, 関数 $\psi_k(s,a)$ は $\Re s>0$ に対して絶対収束し, そこで正則な関数として定義される.

前節と同様に, この L 関数から導かれる一般 Bernoulli 数の多重版と, 定理 1.1 の 3 のアナロジーに現れる多重ゼータ関数を以下に定義する.

定義 5.1 この場合の一般 Bernoulli 数の多重版を次で定義する:

$$\sum_{m=1}^{N}\chi(m)e^{(N/2-m)t}\frac{\mathrm{Ath}_k(\tanh(Nt/4))}{e^{Nt/2}-e^{-Nt/2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbb{T}_{n,\chi}^{(k)}}{n!}t^n.$$

定義 5.2 $0<a<1$ に対して, Hurwitz 型の多重ゼータ関数を

$$\begin{aligned}&\zeta_{H,k,(4)}(s_1,\ldots,s_k;a)\\&:=\sum_{0<n_1<\cdots<n_k}\frac{1}{(4n_1-2)^{s_1}\cdots(4n_{k-1}-2(k-1))^{s_{k-1}}(4n_k-2k-(2-4a))^{s_k}}.\end{aligned}$$

で定義し, それに付随する L 関数を次で定義する:

$$L_{k,(4)}(s_1,\ldots,s_k;\chi):=\sum_{m=1}^{N}\chi(m)\zeta_{H,k,(4)}(s_1,\ldots,s_k;m/N).$$

以上を用いると, 拡張された L 関数 (5.1) は, 次のように述べられる.

定理 5.3 (佐々木 [10])

1. 任意の $k\geq 1$ に対して, $L_k(s,\chi;\tanh(Nt/4))$ は $\mathbb{C}$ 上整関数として解析接続される.
2. 任意の非負整数 n に対して,

$$L_k(s,\chi;\tanh(Nt/4))=(-1)^n\mathbb{T}_{n,\chi}^{(k)}$$

3. $\Re s>1$ に対して,

$$\begin{aligned}&L_k(s,\chi;\tanh(Nt/4))\\&=(-4)^{k-1}\left(\frac{N}{4}\right)^{1-s}\left\{\sum_{j=1}^{k-1}L_{k,(4)}(1,\ldots,1,\overset{j\text{-th}}{\overset{\downarrow}{2}},1,\ldots,1,s)+sL_{k,(4)}(1,\ldots,1,s)\right\}\\&\quad+\left(\frac{N}{4}\right)^{1-s}2^{-k}\sum_{j=0}^{k-2}(-1)^j2^{3j}(2^{k-j}-1)\zeta(k-j)L_{j+1,(4)}(\underbrace{1,\ldots,1}_{j},s).\end{aligned}$$

謝辞

今回, 講演の機会を与えて下さった研究代表者である大野泰生先生に感謝申し上げます. また本研究について, 金子昌信先生からご助言を頂きました. ここに深く御礼申し上げます.

参考文献

[1] T. Arakawa and M. Kaneko, *Multiple zeta values, poly-Bernoulli numbers, and related zeta functions*, Nagoya Math. J. **153** (1999), 189–209.

[2] A. Bayad and Y. Hamahata, *Arakawa-Kaneko L-functions and generalized poly-Bernoulli polynomials*, preprint.

[3] C. Brewbaker, *Lonesum* $(0,1)$*-matrices and poly-Bernoulli numbers of negative index*, Master's thesis, Iowa State University, 2005.

[4] M-A. Coppo and B. Candelpergher, *The Arakawa-Kaneko zeta function*, Ramanujan J. **22** (2010), 153–162.

[5] M. Kaneko, *Poly-Bernoulli numbers*, J. Th. Nombre Bordeaux, **9** (1997), 199–206.

[6] M. Kaneko, *A note on poly-Bernoulli numbers and multiple zeta values*, Diophantine analysis and related fields–DARF 2007/2008, 118–124, AIP Conf. Proc., 976, Amer. Inst. Phys., Melville, NY, 2008.

[7] M. Kaneko and Y. Ohno, *On a kind of duality of multiple zeta-star values*, Int. J. Number Theory, to appear.

[8] S. Launois, *Rank t $\mathscr{H}$-primes in quantum matrices*, Comm. Algebra **33** (2005), 837–854.

[9] Y. Ohno, *A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values*, J. Number Theory **74** (1999), 39–43.

[10] Y. Sasaki, *On generalized poly-Bernoulli numbers and related L-functions*, submitted.

[11] C. Yamazaki, *On the duality for multiple zeta-star values of height* 1, Kyushu J. Math. **64** (2010), 145–152.