

## 非特異 4 次曲線の判別式について

甲南大学・知能情報学部 高橋 正 (Tadashi Takahashi)  
Department of Intelligence and Informatics, Konan University

### 概要

消去イデアルは、幅広い応用がある。イデアルに関する様々な操作では、“解を得ることができる=消去イデアルの計算ができる”が鍵になっている。そのような例の一つを示す。

### 1 目的

$\mathbb{P}^2$  における 3 次曲線については、 $f = x^2z + y^3 + pyz^2 + qz^3$  ( $p, q$ : パラメータ) とすると、 $(f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) = (0, 0, 0, 0)$  より、曲線が非特異であるためには、 $4p^3 + 27q^2 \neq 0$  という条件が得られる。この現象をグレブナー基底を用いて示すと、以下ようになる。

$G(f, f_1, f_2, f_3)$  を  $f, f_1, f_2, f_3$  のグレブナー基底とし、  
 $f = x^2z + y^3 + pyz^2 + qz^3$ ,  $f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $f_2 = \frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $f_3 = \frac{\partial f}{\partial z}$  とすると、  
 $G(f, f_1, f_2, f_3)$  から  $x, y, z$  を消去した消去イデアルは、 $\{4p^3 + 27q^2\}$  となる。

そのため、 $\mathbb{P}^2$  における 3 次曲線が非特異になるためには、 $4p^3 + 27q^2 \neq 0$  という条件が得られる。この 3 次曲線の現象と同様に、非特異 4 次曲線について、その定義方程式のパラメータが満たす条件式が判別式である。判別式を消去イデアルを用いた計算によって求める。

### 2 非特異 4 次曲線の定義方程式

$\mathbb{P}^2$  における非特異 4 次曲線の定義方程式としては、  
 $x^3z + y^3z + pxyz^2 + qxz^3 + rxy^4 + sy^3z + ty^2z^2 + uyz^3 + vz^4 = 0$   
( $p, q, r, s, t, u, v$ : パラメータ) (Case 1)

と

$x^3z + pxy^2z + pxyz^2 + rxz^3 + y^4 + sy^2z^2 + tyz^3 + uz^4 = 0$   
( $p, q, r, s, t, u$ : パラメータ) (Case 2)

の 2 種類がある。本稿では、Case 2 の判別式を導出する。

### 3 消去イデアルの応用

$G(f, f_1, f_2, f_3)$  を、 $f, f_1, f_2, f_3$  から構成されるグレブナー基底、 $f$  を上記 Case 2 の定義方程式、

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, f_2 = \frac{\partial f}{\partial y}, f_3 = \frac{\partial f}{\partial z}$$

とすると、Case 2 の非特異 4 次曲線の判別式を以下の手順によって求める。

- $G(f, f_1, f_2, f_3)$  から  $y, z$  を消去した消去イデアルを計算する
- $G(f, f_1, f_2, f_3)$  から  $x, z$  を消去した消去イデアルを計算する
- $G(f, f_1, f_2, f_3)$  から  $x, y$  を消去した消去イデアルを計算する
- 上記3つの消去イデアルにおける共通解を見いだす

## 4 計算

Mathematica を用いて,  $G(f, f_1, f_2, f_3)$  から,  $var1, var2, \dots, varn$  を消去した消去イデアルの計算を, 以下のように行う。

```
f = x^3 z + p x y^2 z + q x y z^2 + r x z^3 + y^4 + s y^2 z^2 + t y z^3 + u z^4;
Factor[GroebnerBasis[{f, D_x f, D_y f, D_z f}, {x, p, q, r, s, t, u}, {y, z},
MonomialOrder -> EliminationOrder]]
Factor[GroebnerBasis[{f, D_x f, D_y f, D_z f}, {y, p, q, r, s, t, u}, {x, z},
MonomialOrder -> EliminationOrder]]
Factor[GroebnerBasis[{f, D_x f, D_y f, D_z f}, {z, p, q, r, s, t, u}, {x, y},
MonomialOrder -> EliminationOrder]]
```

その結果は,

$$G(f, f_1, f_2, f_3) \cap I[x, p, q, r, s, t, u] = Dx^7$$

$$G(f, f_1, f_2, f_3) \cap I[y, p, q, r, s, t, u] = Dy^7$$

$$G(f, f_1, f_2, f_3) \cap I[z, p, q, r, s, t, u] = Dz^7$$

ここで,  $D$  は,  $p, q, r, s, t, u$  の多項式

となることを得る。

したがって, Case 2 の定義方程式の判別式は,  $D$  であることが分かる。

$D$  は, 以下のようになる。

$$\begin{aligned} D = & -6912u^4p^{12} - 1024r^3u^2p^{12} + 13824rsu^3p^{11} + 13824qtu^3p^{11} - 1024r^4t^2p^{11} + 768q^2r^2u^2p^{11} - \\ & 9216rt^2u^2p^{11} + 2048r^4sup^{11} + 1024qr^3tup^{11} - 2048r^2t^4p^{10} - 13824r^2u^3p^{10} - 10368q^2su^3p^{10} - \\ & 1024r^5s^2p^{10} + 768q^2r^3t^2p^{10} - 6912r^2s^2u^2p^{10} - 8064q^2t^2u^2p^{10} - 192q^4ru^2p^{10} - 2304qrstu^2p^{10} + \\ & 1024qr^4stp^{10} - 2048r^5up^{10} + 9216qrt^3up^{10} + 3072r^2st^2up^{10} - 2560q^2r^3sup^{10} - 768q^3r^2tup^{10} - \\ & 1024t^6p^9 - 1280q^2rt^4p^9 - 497664su^4p^9 + 6656qr^2st^3p^9 + 13824s^3u^3p^9 + 20736t^2u^3p^9 + 27648q^2ru^3p^9 + \\ & 768q^2r^4s^2p^9 - 192q^4r^2t^2p^9 - 3840r^3s^2t^2p^9 + 16q^6u^2p^9 + 4608q^2rs^2u^2p^9 - 24192s^2t^2u^2p^9 - 59904r^3su^2p^9 - \\ & 6912qr^2tu^2p^9 + 10944q^3stu^2p^9 + 2048r^6sp^9 - 3072qr^5tp^9 - 768q^3r^3stp^9 + 5632q^2r^4up^9 + 9216st^4up^9 + \\ & 2048r^3s^3up^9 + 1152q^3t^3up^9 - 1536r^3t^2up^9 - 14208q^2rst^2up^9 + 1152q^4r^2sup^9 + 768qr^2s^2tup^9 + \\ & 192q^5rtup^9 - 1024r^7p^8 + 1536qst^5p^8 - 2048r^4s^4p^8 + 16q^4t^4p^8 - 768rs^2t^4p^8 + 995328ru^4p^8 - \\ & 3328qr^3t^3p^8 + 1856q^3rst^3p^8 - 7776q^4u^3p^8 + 912384rs^2u^3p^8 + 829440qstu^3p^8 - 192q^4r^3s^2p^8 - \\ & 7296q^2r^2s^2t^2p^8 + 16q^6rt^2p^8 - 61440r^4st^2p^8 + 140544r^4u^2p^8 - 13824rs^4u^2p^8 - 3456qt^3u^2p^8 - \\ & 3312q^4s^2u^2p^8 - 590976rst^2u^2p^8 + 41472q^2r^2su^2p^8 + 27648qs^3tu^2p^8 - 18432q^3rtu^2p^8 - 2560q^2r^5sp^8 + \\ & 3328q^3r^4tp^8 + 6656qr^3s^3tp^8 + 192q^5r^2stp^8 + 4608rt^4up^8 - 4480q^4r^3up^8 - 1920q^2r^2s^3up^8 - 12672qs^2t^3up^8 + \\ & 135168r^4s^2up^8 + 5760rs^3t^2up^8 + 23040q^2r^2t^2up^8 - 1824q^4st^2up^8 - 224q^6rsup^8 - 16q^7tup^8 + \\ & 7680q^3rs^2tup^8 + 44544qr^3stup^8 + 768q^2r^6p^7 - 2304qrt^5p^7 - 1280q^2r^3s^4p^7 - 480q^2s^2t^4p^7 - 123648r^2st^4p^7 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 1741824q^2u^4p^7 - 59392r^5s^3p^7 + 192qrs^3t^3p^7 - 896q^3r^2t^3p^7 - 16q^5st^3p^7 - 518400q^2s^2u^3p^7 - 2820096r^2su^3p^7 - \\
& 1741824qrtu^3p^7 + 16q^6r^2s^2p^7 + 135936r^5t^2p^7 - 768r^2s^4t^2p^7 - 528q^4rs^2t^2p^7 + 54528q^2r^3st^2p^7 - \\
& 10368q^2s^4u^2p^7 - 368640q^2r^3u^2p^7 - 400896r^2s^3u^2p^7 + 1264896r^2t^2u^2p^7 - 489888q^2st^2u^2p^7 - 576q^4rsu^2p^7 + \\
& 7632q^5tu^2p^7 - 228096qrs^2tu^2p^7 + 1152q^4r^4sp^7 - 1344q^5r^3tp^7 + 1856q^3r^2s^3tp^7 + 49152qr^4s^2tp^7 - \\
& 16q^7rstp^7 + 576q^2t^4up^7 - 1440q^4rs^3up^7 + 572544qrst^3up^7 + 1568q^6r^2up^7 - 139008q^2r^3s^2up^7 + \\
& 3744q^2s^3t^2up^7 + 186624r^2s^2t^2up^7 - 6048q^4rt^2up^7 + 16q^8sup^7 - 417792r^5sup^7 - 103680qr^4tup^7 + \\
& 2304qrs^4tup^7 + 624q^5s^2tup^7 - 56064q^3r^2stup^7 - 1024r^3s^6p^6 - 62208st^6p^6 - 192q^4r^5p^6 + 1056q^3t^5p^6 + \\
& 5971968u^5p^6 + 16q^4r^2s^4p^6 - 432s^4t^4p^6 + 277440r^3t^4p^6 - 77856q^2rst^4p^6 - 11943936s^2u^4p^6 + 40448q^2r^4s^3p^6 - \\
& 16q^3s^3t^3p^6 + 389760qr^2s^2t^3p^6 + 1360q^5rt^3p^6 + 870912s^4u^3p^6 + 2764800r^3u^3p^6 + 1119744st^2u^3p^6 + \\
& 6013440q^2rsu^3p^6 + 3214080q^3tu^3p^6 + 258048r^6s^2p^6 - 328320q^2r^4t^2p^6 - 480q^2rs^4t^2p^6 - 228864r^3s^3t^2p^6 - \\
& 16608q^4r^2st^2p^6 - 6912s^6u^2p^6 + 18144t^4u^2p^6 + 252288q^2rs^3u^2p^6 + 219456q^4r^2u^2p^6 - 27648r^3s^2u^2p^6 - \\
& 1482624s^3t^2u^2p^6 - 1145664q^2rt^2u^2p^6 - 2808q^6su^2p^6 + 620352q^3s^2tu^2p^6 - 224q^6r^3sp^6 + 1536qr^2s^5tp^6 - \\
& 16q^5rs^3tp^6 + 240q^7r^2tp^6 - 36480q^3r^3s^2tp^6 - 314880qr^5stp^6 + 278528r^6up^6 - 1152q^2r^5sup^6 + \\
& 129024r^3s^4up^6 + 561600s^2t^4up^6 + 16q^6s^3up^6 - 1195776qr^2t^3up^6 + 61344q^3st^3up^6 + 61248q^4r^2s^2up^6 - \\
& 1200q^6t^2up^6 + 3456s^5t^2up^6 - 791424q^2rs^2t^2up^6 - 542592r^3st^2up^6 - 256q^8rup^6 + 1127040q^2r^4sup^6 + \\
& 576q^3s^4tup^6 + 305664q^3r^3tup^6 + 27648qr^2s^3tup^6 + 17664q^5rstup^6 + 139968rt^6p^5 - 116736r^4s^5p^5 + \\
& 85536qs^2t^5p^5 + 16q^6r^4p^5 - 44064rs^3t^4p^5 - 277776q^2r^2t^4p^5 + 456q^4st^4p^5 + 29859840rsu^4p^5 - \\
& 41803776qtu^4p^5 - 11680q^4r^3s^3p^5 - 16q^7t^3p^5 + 103296q^3rs^2t^3p^5 - 1091904qr^3st^3p^5 + 16920576rs^3u^3p^5 - \\
& 7050240q^2r^2u^3p^5 + 5474304rt^2u^3p^5 - 2581632q^4su^3p^5 + 14929920qs^2tu^3p^5 - 463104q^2r^5s^2p^5 + \\
& 196800q^4r^3t^2p^5 - 407232q^2r^2s^3t^2p^5 - 536832r^4s^2t^2p^5 + 408q^6rst^2p^5 - 787968rs^5u^2p^5 - 190944q^4s^3u^2p^5 - \\
& 414720qst^3u^2p^5 - 1555200q^2r^2s^2u^2p^5 - 1813104q^4t^2u^2p^5 - 8335872rs^2t^2u^2p^5 - 47808q^6ru^2p^5 + \\
& 2211840r^4su^2p^5 + 1534464qs^4tu^2p^5 - 4561920qr^3tu^2p^5 - 2985984q^3rstu^2p^5 - 327680r^7sp^5 + 16q^8r^2sp^5 + \\
& 389120qr^6tp^5 + 374784qr^3s^4tp^5 + 12192q^5r^2s^2tp^5 - 16q^9rtp^5 + 493632q^3r^4stp^5 + 16q^{10}up^5 - \\
& 1155072q^2r^5up^5 + 23328qt^5up^5 - 110592q^2r^2s^4up^5 - 1003104rst^4up^5 + 2506752r^4s^3up^5 - 705024qs^3t^3up^5 + \\
& 1910592q^3rt^3up^5 - 13584q^6rs^2up^5 + 1142784r^4t^2up^5 + 331776rs^4t^2up^5 - 98064q^4s^2t^2up^5 + 3755808q^2r^2st^2up^5 - \\
& 938304q^4r^3sup^5 + 428544q^3rs^3tup^5 - 194112q^5r^2tup^5 + 117504qr^3s^2tup^5 - 312q^7stup^5 + 131072r^8p^4 - \\
& 227448q^2t^6p^4 - 70656q^2r^3s^5p^4 - 338256qrst^5p^4 - 669696r^5s^4p^4 - 26568q^2s^3t^4p^4 - 2056752r^2s^2t^4p^4 - \\
& 287100q^4rt^4p^4 - 29859840r^2u^4p^4 - 22394880q^2su^4p^4 + 888q^6r^2s^3p^4 - 3868416qr^4t^3p^4 + 10368qr^4s^4t^3p^4 - \\
& 888q^5s^2t^3p^4 + 1132464q^3r^2st^3p^4 - 2737152q^2s^3u^3p^4 - 80621568r^2s^2u^3p^4 + 69548544q^2t^2u^3p^4 + \\
& 6863616q^4ru^3p^4 + 9953280qrst^3p^4 + 245136q^4r^4s^2p^4 - 41472r^2s^5t^2p^4 - 29232q^4rs^3t^2p^4 - 45552q^6r^2t^2p^4 + \\
& 1440288q^2r^3s^2t^2p^4 + 3950592r^5st^2p^4 + 3285q^8u^2p^4 - 3538944r^5u^2p^4 - 570240q^2s^5u^2p^4 - 4520448r^2s^4u^2p^4 - \\
& 46407168q^2r^3u^2p^4 + 1767744q^4rs^2u^2p^4 - 13903488q^2s^2t^2u^2p^4 + 40103424r^2st^2u^2p^4 - 2419200q^2r^3su^2p^4 - \\
& 10948608qr^3tu^2p^4 + 4831488q^3r^2tu^2p^4 + 2706048q^5stu^2p^4 + 796672q^2r^6sp^4 - 1060608q^3r^5tp^4 + \\
& 102528q^3r^2s^4tp^4 - 511488qr^4s^3tp^4 - 888q^7rs^2tp^4 - 251616q^5r^3stp^4 + 1734816q^4r^4up^4 - 79488q^4rs^4up^4 + \\
& 1236384r^2t^4up^4 + 2058696q^2st^4up^4 - 1238400q^2r^3s^3up^4 + 255888q^5t^3up^4 + 12389760qr^2s^2t^3up^4 + \\
& 888q^8s^2up^4 - 11943936r^5s^2up^4 + 207360q^2s^4t^2up^4 + 365760q^2r^3t^2up^4 + 2498688r^2s^3t^2up^4 - 3066552q^4rst^2up^4 + \\
& 350448q^6r^2sup^4 + 124416qrs^5tup^4 + 34560q^5s^3tup^4 - 2223936q^3r^2s^2tup^4 + 45792q^7rtup^4 + 7446528qr^4stup^4 - \\
& 311296q^2r^7p^3 - 55296r^3s^7p^3 - 1102248s^2t^6p^3 + 864q^4r^2s^5p^3 - 8223120qr^2t^5p^3 + 378108q^3st^5p^3 + \\
& 214990848su^5p^3 + 272640q^2r^4s^4p^3 + 3525q^6t^4p^3 - 23328s^5t^4p^3 - 1473552q^2rs^2t^4p^3 + 8273664r^3st^4p^3 - \\
& 113467392s^3u^4p^3 - 116453376t^2u^4p^3 + 5971968q^2ru^4p^3 + 5767168r^6s^3p^3 - 864q^3s^4t^3p^3 + 2642208q^3r^3t^3p^3 + \\
& 6397056qr^2s^3t^3p^3 + 462828q^5rst^3p^3 - 1546560q^6u^3p^3 + 16422912s^5u^3p^3 + 75644928q^2rs^2u^3p^3 + \\
& 37324800s^2t^2u^3p^3 + 159252480r^3su^3p^3 + 2985984qr^2tu^3p^3 - 35334144q^3stu^3p^3 - 53520q^6r^3s^2p^3 - \\
& 4767744r^6t^2p^3 - 25920q^2rs^5t^2p^3 - 3794688r^3s^4t^2p^3 - 1915416q^4r^2s^2t^2p^3 + 3525q^8rt^2p^3 - 606720q^2r^4st^2p^3 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 373248s^7u^2p^3 + 2764800q^2r^4u^2p^3 + 2198016q^2rs^4u^2p^3 - 7558272st^4u^2p^3 + 22118400r^3s^3u^2p^3 - \\
& 35323776q^3t^3u^2p^3 - 860976q^6s^2u^2p^3 - 26687232s^4t^2u^2p^3 - 61378560r^3t^2u^2p^3 + 12234240q^2rst^2u^2p^3 - \\
& 943488q^4r^2su^2p^3 + 15344640q^3s^3tu^2p^3 - 10782720qr^2s^2tu^2p^3 - 5759424q^5rtu^2p^3 - 681216q^4r^5sp^3 + \\
& 82944qr^2s^6tp^3 + 848496q^5r^4tp^3 - 864q^5rs^4tp^3 + 816000q^3r^3s^3tp^3 - 9560064qr^5s^2tp^3 + 54120q^7r^2stp^3 - \\
& 62208q^2rs^6up^3 + 944784t^6up^3 + 2433024r^3s^5up^3 + 864q^6s^4up^3 + 10007712s^3t^4up^3 + 40427424q^2rt^4up^3 - \\
& 1108096q^6r^3up^3 + 605664q^4r^2s^3up^3 - 1872288q^3s^2t^3up^3 - 30233088qr^2st^3up^3 + 17178624q^2r^4s^2up^3 + \\
& 186624s^6t^2up^3 - 11000448q^2rs^3t^2up^3 + 2467152q^4r^2t^2up^3 - 12386304r^3s^2t^2up^3 - 446958q^6st^2up^3 + \\
& 18874368r^6sup^3 - 61770q^8rsup^3 - 3525q^9tup^3 - 4866048qr^5tup^3 + 31104q^3s^5tup^3 - 476928qr^2s^4tup^3 + \\
& 2029104q^5rs^2tup^3 - 9423360q^3r^3stup^3 - 4251528qt^7p^2 + 179200q^4r^6p^2 - 1658880r^4s^6p^2 + 4251528rst^6p^2 + \\
& 1259712qs^3t^5p^2 - 5913648q^3rt^5p^2 - 429981696ru^5p^2 - 473952q^4r^3s^4p^2 - 24634368r^4t^4p^2 - 629856r^4s^4t^4p^2 - \\
& 108135q^4s^2t^4p^2 + 31090392q^2r^2st^4p^2 - 61585920q^4u^4p^2 + 35831808rs^2u^4p^2 - 788299776qstu^4p^2 - \\
& 4460544q^2r^5s^3p^2 + 1560384q^3rs^3t^3p^2 - 1165320q^5r^2t^3p^2 - 44167680qr^3s^2t^3p^2 - 4125q^7st^3p^2 - \\
& 127401984r^4u^3p^2 + 62705664rs^4u^3p^2 + 282175488qt^3u^3p^2 + 14867712q^4s^2u^3p^2 + 362797056rst^2u^3p^2 - \\
& 168708096q^2r^2su^3p^2 + 107495424qs^3tu^3p^2 + 145317888q^3rtu^3p^2 - 13369344r^7s^2p^2 + 4125q^8r^2s^2p^2 - \\
& 10229760q^2r^5t^2p^2 - 6111936q^2r^2s^4t^2p^2 + 11612160r^4s^3t^2p^2 - 120510q^6rs^2t^2p^2 + 622392q^4r^3st^2p^2 - \\
& 11197440rs^6u^2p^2 - 5176224q^4s^4u^2p^2 - 136048896rt^4u^2p^2 - 10526976q^4r^3u^2p^2 - 15178752q^2r^2s^3u^2p^2 - \\
& 100776960qs^2t^3u^2p^2 - 84934656r^4s^2u^2p^2 + 33592320rs^3t^2u^2p^2 - 57853440q^2r^2t^2u^2p^2 + 38027232q^4st^2u^2p^2 + \\
& 2544480q^6rsu^2p^2 + 1587600q^7tu^2p^2 + 22394880qs^5tu^2p^2 - 60549120q^3rs^2tu^2p^2 - 28532736qr^3stu^2p^2 + \\
& 260200q^6r^4sp^2 + 5432832qr^3s^5tp^2 - 299200q^7r^3tp^2 + 618912q^5r^2s^3tp^2 + 5199360q^3r^4s^2tp^2 + 23691264qr^6stp^2 - \\
& 4125q^9rstp^2 - 9437184r^7up^2 - 1586304q^2r^2s^5up^2 + 37791360qst^5up^2 + 9289728r^4s^4up^2 + 4871178q^4t^4up^2 - \\
& 34012224rs^2t^4up^2 - 539352q^6rs^3up^2 - 10357632qs^4t^3up^2 + 50761728qr^3t^3up^2 - 51508224q^3rst^3up^2 + \\
& 345450q^8r^2up^2 - 4894272q^4r^3s^2up^2 + 4758912rs^5t^2up^2 - 543672q^4s^3t^2up^2 + 74991744q^2r^2s^2t^2up^2 - \\
& 244980q^6rt^2up^2 + 77635584r^4st^2up^2 + 4125q^{10}sup^2 - 32956416q^2r^5sup^2 + 26505216q^3r^4tup^2 + \\
& 6718464q^3rs^4tup^2 - 3981312qr^3s^3tup^2 + 145260q^7s^2tup^2 + 459648q^5r^2stup^2 - 1223424q^2r^3s^6p - \\
& 34012224r^2t^6p + 5314410q^2st^6p - 40000q^6r^5p + 5308416r^5s^5p + 273375q^5t^5p - 10392624qrs^2t^5p - \\
& 537477120q^2u^5p + 16200q^6r^2s^4p - 472392q^2s^4t^4p - 10777536q^2r^3t^4p - 5038848r^2s^3t^4p + 6335010q^4rst^4p + \\
& 116453376q^2s^2u^4p + 573308928r^2su^4p + 1182449664qrtu^4p + 641280q^4r^4s^3p + 139968qrs^5t^3p - \\
& 16200q^5s^3t^3p - 35139744q^3r^2s^2t^3p + 335250q^7rt^3p + 38817792qr^4st^3p + 42550272q^2s^4u^3p + 55738368q^2r^3u^3p - \\
& 286654464r^2s^3u^3p - 644972544r^2t^2u^3p + 292253184q^2s^2u^3p + 41679360q^4rsu^3p + 48211200q^5tu^3p + \\
& 582266880qrs^2tu^3p + 10665984q^2r^6s^2p - 559872r^2s^6t^2p + 9092160q^4r^4t^2p - 520992q^4rs^4t^2p + \\
& 60756480q^2r^3s^3t^2p - 27869184r^5s^2t^2p - 391650q^6r^2st^2p - 9517824q^2s^6u^2p + 35831808r^2s^5u^2p - \\
& 124711488q^2t^4u^2p + 16319232q^4rs^3u^2p - 544195584qrs^3u^2p + 6436800q^6r^2u^2p + 53415936q^2r^3s^2u^2p + \\
& 55427328q^2s^3t^2u^2p - 80621568r^2s^2t^2u^2p - 149454720q^4rt^2u^2p - 756000q^8su^2p + 169869312r^5su^2p + \\
& 63700992qr^4tu^2p - 226188288qrs^4tu^2p - 11871360q^5s^2tu^2p + 145400832q^3r^2stu^2p + 12582912r^8sp - \\
& 46250q^8r^3sp - 16515072qr^7tp + 1788480q^3r^2s^5tp - 37490688qr^4s^4tp - 16200q^7rs^3tp + 49375q^9r^2tp - \\
& 709680q^5r^3s^2tp - 20926464q^3r^5stp + 20054016q^2r^6up - 1376352q^4rs^5up + 147386304qrt^5up + \\
& 9289728q^2r^3s^4up - 42515280q^2s^2t^4up + 120932352r^2st^4up + 16200q^8s^3up - 42467328r^5s^3up + \\
& 117573120qrs^3t^3up + 101990016q^3r^2t^3up - 8048160q^5st^3up + 676080q^6r^2s^2up - 301500q^8t^2up - \\
& 95551488r^5t^2up + 3709152q^2s^5t^2up - 8957952r^2s^4t^2up + 40090464q^4rs^2t^2up - 240371712q^2r^3st^2up - \\
& 52500q^{10}rup + 21602304q^4r^4sup + 1679616qrs^6tup + 618192q^5s^4tup - 17040960q^5r^3tup - 50139648q^3r^2s^3tup + \\
& 134037504qr^4s^2tup + 482400q^7rstup - 4194304r^9 - 746496r^3s^8 - 14348907t^8 + 11664q^4r^2s^6 - \\
& 4251528s^3t^6 - 27634932q^2rt^6 - 1289945088u^6 + 4810752q^2r^4s^5 - 1968300q^3s^2t^5 + 68024448qr^2st^5 + \\
& 1289945088s^2u^5 + 3125q^8r^4 - 3538944r^6s^4 - 314928s^6t^4 - 2676888q^2rs^3t^4 - 15199650q^4r^2t^4 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 40310784r^3s^2t^4 - 151875q^6st^4 - 483729408s^4u^4 - 573308928r^3u^4 - 1451188224st^2u^4 + 627056640q^2rsu^4 + \\
& 223948800q^3tu^4 - 281000q^6r^3s^3 - 3125q^9t^3 - 35831808qr^5t^3 - 11664q^3s^5t^3 + 15116544qr^2s^4t^3 - \\
& 2089800q^5rs^2t^3 + 60030720q^3r^3st^3 + 80621568s^6u^3 + 272097792t^4u^3 - 326965248q^2rs^3u^3 + 83980800q^4r^2u^3 + \\
& 382205952r^3s^2u^3 + 765904896s^3t^2u^3 - 705438720q^2rt^2u^3 - 7776000q^6su^3 + 85847040q^3s^2tu^3 - \\
& 1289945088qr^2stu^3 - 3532800q^4r^5s^2 - 349920q^2rs^6t^2 - 10450944r^3s^5t^2 - 1960500q^6r^3t^2 + 8880840q^4r^2s^3t^2 - \\
& 87588864q^2r^4s^2t^2 + 31850496r^6st^2 - 161250q^8rst^2 - 5038848s^8u^2 - 84934656r^6u^2 + 45909504q^2rs^5u^2 - \\
& 95551488r^3s^4u^2 - 544195584s^2t^4u^2 - 1641600q^6s^3u^2 + 725594112qr^2t^3u^2 - 75582720q^3st^3u^2 - \\
& 63037440q^4r^2s^2u^2 - 7128000q^6t^2u^2 - 110854656s^5t^2u^2 - 20155392q^2rs^2t^2u^2 - 1080000q^8ru^2 + \\
& 42467328q^2r^4su^2 - 37138176q^3s^4tu^2 - 247173120q^3r^3tu^2 + 376233984qr^2s^3tu^2 + 34732800q^5rstu^2 - \\
& 7471104q^2r^7s + 3125q^{10}r^2s + 1119744qr^2s^7t + 6242304q^3r^6t - 11664q^5rs^5t - 11536128q^3r^3s^4t + \\
& 45121536qr^5s^3t + 448500q^7r^2s^2t - 3125q^{11}rt + 5404800q^5r^4st + 3125q^{12}u - 839808q^2rs^7u + 11943936r^3s^6u + \\
& 153055008st^6u - 5474304q^4r^5u + 11664q^6s^5u + 21730032q^3t^5u + 5155488q^4r^2s^4u + 39680928s^4t^4u - \\
& 120932352r^3t^4u + 81251424q^2rst^4u - 40476672q^2r^4s^3u + 20435328q^3s^3t^3u - 241864704qr^2s^2t^3u + \\
& 21578400q^5rt^3u + 28311552r^6s^2u - 306000q^8rs^2u + 2519424s^7t^2u + 217976832q^2r^4t^2u - 21135168q^2rs^4t^2u + \\
& 89579520r^3s^3t^2u + 3250800q^6s^2t^2u - 71500320q^4r^2st^2u - 4456800q^6r^3su + 419904q^3s^6tu - 17915904qr^2s^5tu - \\
& 7309440q^5rs^3tu + 3078000q^7r^2tu + 105283584q^3r^3s^2tu + 180000q^9stu - 191102976qr^5stu
\end{aligned}$$