数理解析研究所講究録
第 1815 巻 2012 年 100-105

2重可移群に共役で含まれる可移部分群の一計算方法

宮本 泉*
IZUMI MIYAMOTO
山梨大学
UNIVERSITY OF YAMANASHI

1 Introduction

1.1 群 G に共役で含まれる部分群

G, H : 集合 Ω 上の置換群のとき、
ある $g \in Sym(\Omega) = \{1, 2, \cdots, n\}$ で、H の g-共役 $g^{-1}Hg = H^g$ が

$$H^g \subseteq G$$

となることはあるか？また、そのような g の探し方は？

1.2 GAP システムの群のライブラリ

置換群のライブラリには、

- 30 次までの可移群
- 2499 次までの primitive な群

がある。

群 G と、その部分群 H が、共に、ライブラリにある群でも、そのままでは、$H \subset G$ となるとは限らない。
$\longleftarrow$ ライブラリは同型類の分類リストだから。

すなわち、置換群のライブラリにあるのは、

共役類 $\{G^g | g \in Sym(n)\}$ のうちの 1 つ。

$$\text{そのとき、}\ H \text{ が } G \text{ の部分群} \iff \exists g \in Sym(n) \text{ such that } H^g \subset G$$

*imiyamoto@yamanashi.ac.jp

1.3 【例１】散在型有限単純群 Co.3

Co.3 は、同じく散在型有限単純群 McL や HS を極大部分群として含む。Co.3 は、276 次の 2 重可移置換群として与えられる。このとき、具体的に、

$$\mathsf{McL},\ \mathsf{HS} \subset \mathsf{Co.3} \subset Sym(276)$$

となるように、McL や HS を求める方法は？

- McL は、Co.3 の 1 点固定部分群となる。⟵ 包含関係がよく分かる。
- HS は、100 次と 176 次の 2 通りの置換群として与えられる。これから、276 次の置換群として作ることができるが ([例 2])、このようにしてできた HS は、そのままでは HS⊂Co.3 とはなってくれない。
  - Case 1:この作り方が適当であった場合。ある $g \in Sym(276)$ によって、次が成立。

$$\mathsf{HS}^g \subset \mathsf{Co.3}$$

  - Case 2:この作り方が適当でなかった場合。すべての $g \in Sym(276)$ で、次が成立。

$$\mathsf{HS}^g \not\subset \mathsf{Co.3}$$

1.4 【例２】HS

- HS が 100 次の置換群として与えられたとき、1 点固定部分群は、M(11) である。
- HS は 176 次の 2 重可移群となる。M(11) も、176 次の primitive な群となる。このとき、次を満たす $g \in Sym(176)$ を求めることができるか？

$$\mathsf{M(11)}^g \subset \mathsf{HS}$$

GAP システムの primitive な群のライブラリから、176 次の群として M(11) と HS をもってきて、上の条件を満たす g を求めたい。

【注】M(11) は小さい群なので、176 次の HS の中で、比較的簡単に生成させることができる。

1.5 問題の設定

- 例にあげたような有限単純群とその (極大) 部分群の包含関係を、コンピュータで確認したい。
- $H^g \subset G$ を満たす g を探す一般的な方法は無い。
- H が小さい群ならば、G の中に H と同型な群を構成する方が易しいであろう。
- H は、比較的大きな群の場合を考えることにする。
- G は $Sym(n)$ よりはるかに小さいので、H と $g \in Sym(n)$ で G を生成するような g を探すのは無理。

2 準備

2.1 今までの研究との関連

群の可移拡大 $n-1$ 次の可移な群 H から、n 次の 2 重可移群 G で、1 点固定部分群が、

$$G_n = \{g \in G | n^g = n \in \Omega\} = H$$

となる群を構成する。

$\longrightarrow$ スーパースキームを使った構成法を得た (2006)

2.2 今回の実験

G：n 次の 2 重可移群、3 重可移ではない。
H：n 次の可移群

$\longrightarrow H^g \subseteq G$ となる $g \in Sym(n)$ を探す

【注】可移拡大の H も、$H \subset Sym(n)$ で、特に、 $n^h = n$ for $\forall h \in H$

2.3 G, H の制約の主な理由

- H：プログラムが複雑にならないようにするため。
- G：必要となるスーパースキーム計算で、爆発が起こらないようにするため。スーパースキームで群が決まるようにするため。

2.4 アソシエーションスキーム、スーパースキーム

G は Ω 上の置換群　$\Omega^2 = \Omega \times \Omega$ への作用：$(x,y)^g = (x^g, y^g)$
このとき、下の作用の作る orbit の全体は、それぞれ、

- G は可移、Ω^2 への作用 $\rightarrow$ アソシエーションスキーム
- Ω^2 への作用 $\rightarrow$ コヒアラントコンフィギュレーション
- Ω, Ω^2, Ω^3 への作用 $\rightarrow$ 3-スーパースキーム

を作る。

2.5 スーパースキーム

定義. (Ω, Π) が **t-スーパースキーム**であるとは、$\Longleftrightarrow$

S1. $\Pi = \{\Pi^1, \Pi^2, \cdots, \Pi^t\}$, $t \geq 2$, で Π^ℓ は $1 \leq \ell \leq t$ において Ω^ℓ の分割,

S2. $\sigma \in Sym(\ell)$ について, $\sigma((y_1, y_2, \cdots, y_\ell)) = (y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}, \cdots, y_{\sigma(\ell)})$, $\Pi^\ell = \{R_0^\ell, R_1^\ell, \cdots, R_{d_\ell}^\ell\}$, $1 \leq \ell \leq t$, とおくと, すべての R_k^ℓ と $\sigma \in Sym(\ell)$, に対して、$\sigma(R_k^\ell) \in \Pi^\ell$ $\cdots$(*symmetric*)

S3. *projection* $\pi_j^\ell : \Omega^\ell \to \Omega^{\ell-1}$ を
$\pi_j^\ell((y_1, y_2, \cdots, y_\ell)) = (y_1, y_2, \cdots, y_{j-1}, y_{j+1}, \cdots, y_\ell)$ で定義すると,
すべての $R_k^\ell \in \Pi^\ell$, $2 \leq \ell \leq t$ に対して, $\pi_j^\ell(R_k^\ell) \in \Pi^{\ell-1}$,

S4. すべての R_k^ℓ, $2 \leq \ell \leq t$, と, すべての $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_{\ell-1}) \in \pi_j^\ell(R_k^\ell)$ に対して, constant $p_{k,j}^\ell = |(\pi_j^\ell)^{-1}(\boldsymbol{y}) \cap R_k^\ell|$ が存在. 特に, $p_{k,j}^\ell = |R_k^\ell|/|\pi_j^\ell(R_k^\ell)|$. $\cdots$ (*regular*)

3 Algorithm

3.1 Algorithm（スーパースキーム）

- G と H の作るスーパースキームを計算する。
- H の作るスーパースキームのフュージョンスキームを計算して、G の作るスーパースキームと同型になりうるものを探す。
  - (Ω, Π) が (Ω, Π') のフュージョンスキーム $\Longleftrightarrow$ Π'^ℓ は Π^ℓ の refinement
- 同型になりうるものが得られたら、その自己同型群が G と共役になるかどうか計算する。

3.2 Algorithm（orbit）

- G と H の Ω^3 上の orbit Π^3 と Π'^3 を計算する。
- H の orbit を適当にまとめて、$Sym(\Omega)$ の元で移して G の orbit と一致する可能性のあるものを求める。
- orbit 全体を不変に保つ群が、G と共役であるかどうか計算する。(共役計算の困難な場合：2009 本研究集会)

3.3 計算の困難さについて

- 可移な群の作るアソシエーションスキームでも同様な方法が適用できるが、非常に多くの群が同じアソシエーションスキームを作る場合がある。(2008 本研究集会)
- 同様に、非常に多くの群が Ω^3 上に同じ orbit を持つ、すなわち、同じ 3-スーパースキームを作る場合がある。
- primitive な群なら、アソシエーションスキームで、ほぼ決まる。
- 2 重可移群は対称群と同じアソシエーションを作るので、3-スーパースキームを考える必要がある。
- 3 重可移群では、4-スーパースキームが必要、しかし、Ω^4 は直接計算では大きすぎる。
- H の Ω^3 上の orbit 数が少なくないと、計算が爆発する。(20 個以下？)
- 次数 $n = |\Omega|$ が大きくても、Ω^3 上の orbit 数が少なければ計算可能。(スーパースキームの自己同型計算については、Ω^3 で行っているので、大変。)

4 実験

4.1 GAP の primitive な群のライブラリから 31 次 –200 次

- いずれの実験例でも、計算時間の大部分はスーパースキームを表す $n \times n \times n$ 次の 3 次元配列の直接計算にかかっている。
- H の orbit 情報およびそれらを結合して G の共役群の orbit 候補を作る計算、スーパースキームの自己同型群計算は、全部で数秒程度。(orbit 候補計算が爆発しない例を選んでいる。)
- スーパースキームの自己同型群計算と G の共役計算は、1，2 秒以内、または、計算困難 (2009 本研究集会)。

4.2 GAP のライブラリの記号、n 次の primitive な群、その他の記号

$$G = \mathsf{PrimitiveGroup}(n, i), \quad H = \mathsf{PrimitiveGroup}(n, j)$$

$$S：得られたスーパースキーム，\quad Aut(S)：その自己同型群$$

4.3 実験結果

次数	G			H			結果	秒
n	i	name	$\vert G\vert$	j	name	$\vert G\vert/\vert H\vert$	$Aut(S)$	time
120	15	$PSp(8,2)$	47377612800	2	$Alt(9)$	261120	$PSp(8,2)$	140
							$Alt(9)$	–
				12	$PSp(4,4)$	48384	$PSp(8,2)$	130
				13	$PSp(4,4).2$	24192	$PSp(8,2)$	150
				14	$PSp(6,2)$	32640	$PSp(8,2)$	150
				16	$O^+(8,2)$	272	$PSp(8,2)$	150
	(same superscheme as 16)			17	$PSO^+(8,2)$	136	$PSp(8,2)$	150
				18	$Alt(10)$	26112	$Sym(10)$	135
							$Sym(10)$	–
136	6	$PSp(8,2)$	47377612800	7	$PSp(4,4)$	48384	$PSp(8,2)$	220
				8	$PSp(4,4).2$	24192	$PSp(8,2)$	250
				9	$O^-(8,2)$	240	$PSp(8,2)$	275
	(same superscheme as 9)			10	$PSO^-(8,2)$	120	$PSp(8,2)$	275
156	5	$PSL(4,5)$	7254000000	1	$PSp(4,5)$	1550	$PGL(4,5)$	14+?
				2	$PSp(4,5).2$	775	$PGL(4,5)$	28+?
				3	$PSp(4,5)$	1550	[ ]	0.2 秒
				4	$PSp(4,5).2$	775	[ ]	0.2 秒
176	4	HS	44352000	3	$M(11)$	100	HS	12
							$M(11)$	–
255	2	$PSL(8,2)$	$\approx 5 \times 10^{18}$	1	$PSp(8,2)$	$\approx 10^8$	$PSL(8,2)$	236
276	3	$Co.3$	495766656000	4	$M(24)$	2025	[ ]	0.5 秒

5 考察

5.1 【例】$G = M(9) = 3^2{:}Q(8)$, $H = 3^2{:}2$

- (Ω, Π)：G の作るスーパースキーム、
  $\Pi^{(3)}$：Ω^3 の分割で、$(i,j,k) \in P \in \Pi^{(3)}$, i,j,k は互いに異なる
  $\Longrightarrow |\Pi^{(3)}| = 7$、すべて同じサイズで区別が困難
- 192 個の答
  - 48 個は G と共役な群
  - 144 個は PrimitiveGroup$(9,4) = 3^2{:}8$ と共役な群

5.2 【例】$G =$PrimitiveGroup$(156,5) = PSL(4,5)$

- PrimitiveGroup$(156,7) = PGL(4,5)$ が得られる
- 2 つの $PGL(4,5)$ 間の共役元計算は、GAP の関数 RepresentativeAction では困難 285 分より大
- 2009 本研究集会の方法で、105 秒

5.3 【例】$G =$PrimitiveGroup$(255,2) = PSL(8,2)$

- スーパースキーム構成の計算：1 秒以下
- スーパースキームを表す 3 次元配列の計算：235 分、1252MB
- スーパースキームの自己同型群計算：42 秒
  - MacBook
  - CPU ：2.4 GHz Intel Core 2 Duo
  - メモリ：4 GB 667 MHz DDR2 SDRAM
- 可移拡大計算のときは、群 H の作用を考慮して 3 次元配列の直接計算はしていない

5.4 G, H の制約条件

- 最初の例、276 次の 2 重可移群 $G = Co.3$ と可移ではない $H = HS$
- この方法の一般化は、フュージョンスキームの計算になる (複雑？)
  - (Ω, Π) が (Ω, Π') のフュージョンスキーム
    $\Longleftrightarrow$ 各 i で、分割 Π'^i は分割 Π^i の refinement
- 結局、G の中に H と同型な群を作る、または、H を含む G と同型な群を作ることが本質？