数理解析研究所講究録
第 1817 巻 2012 年 52-63

$\mathbf{H}^n$ 内の複素ラグランジュ部分多様体について

名城大学・数学科　江尻 典雄
Norio Ejiri[1]
Department of Mathematics,
Meijo University

1. Introduction.

$Z_1, Z_2 \in \mathbf{C}^n$ に対して $\underline{(Z_1, Z_2)}$ の全体 $\mathbf{C}^{2n}$ を考え Hermite 内積 $(\,,\,)$ を $((Z_1,Z_2),(Z_1',Z_2')) = Z_1{}^t\overline{Z_1'} + Z_2{}^t\overline{Z_2'}$ で定め実部でユークリッド内積 $<,>$ を与える．$\mathbf{C}^n$ の元は row vector で表すものとする．3 つの orthogonal complex structure I, J, K を以下のように定める．

$$I(Z_1,Z_2) = (iZ_1, iZ_2), \quad J(Z_1,Z_2) = (i\overline{Z_2}, -i\overline{Z_1}), \quad K(Z_1,Z_2) = (-\overline{Z_2}, \overline{Z_1})$$

この時 I, J, K は $-I^2 = -J^2 = -K^2$ が恒等写像, $IJ = K$, $JI = -IJ$ を満たしユークリッド内積を保つ．従って $\mathbf{C}^{2n}$ に quaternion structure が与えられ $\mathbf{H}^n$ となる．$\mathbf{C}^{2n}$ の complex symplectic form ω を次で定める

$$\omega((Z_1,Z_2),(Z_1',Z_2')) = -(Z_1{}^tZ_2' - Z_2{}^tZ_1').$$

符号が普通とは逆であることに注意．従って $\omega = dZ_2 \wedge^t dZ_1$ が成り立つ．
次が成立する．

$$\omega((Z_1,Z_2),(Z_1',Z_2')) = -<K(Z_1,Z_2),(Z_1',Z_2')> +i<J(Z_1,Z_2),(Z_1',Z_2')>.$$

M を実 q 次元 manifold とし, M から $\mathbf{C}^{2n}$ への immersion f を考える．$f^*\omega = 0$ のとき M を complex isotropic submanifold と呼ぶ．必要十分条件は 2 つの Kähler form が消えることである．

$$<K(Z_1,Z_2),(Z_1',Z_2')> = <J(Z_1,Z_2),(Z_1',Z_2')> = 0$$

従って M は 2 つの complex structure J, K について isotropic submanifold となることである．$q \leq 2n$ が成り立つ．特に $q = 2n$ のとき complex Lagrangian

[1]The author is partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Reserch (C) (No.22540103), Ministry of Education, Science, Sports Culture and Technology.

submanifold と呼ぶ. M は J と K について Lagrangian であり, M の tangent space は I について不変となるので I から complex structure が M に導かれ I に関して n 次元 complex submanifold となる. Hitchin[Hi] は"bilagrangian" condition と呼んでいる. M が complex isotropic だけでは一般に complex submanifold とは限らないが, complex Lagrangian submanifold が研究対象なので, 最初から I に関して complex submanifold を仮定する.

1. A を n 次 complex symmetric matrix とする. n 次元 subspace

$$\{(Z, ZA) | Z \in \mathbf{C}^n\}$$

は complex Lagrangian subspace である.

2. f を $\mathbf{C}^n$ の領域 Ω 上の holomorphic function とする. graph

$$(z_1, \ldots, z_n, \frac{\partial f}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_n}), \quad (z_1, \ldots, z_n) \in \Omega$$

は complex Lagrangian graph である.

3. $\mathbf{C}^2$ の任意の holomorphic curve は complex Lagrangian である.

4. complex Lagrangian submanifold は J に関して special Lagrangian submanifold である. $\mathbf{C}^2$ の任意の special Lagrangian surface は complex Lagrangian である [Jo1].

Lag^C を $\mathbf{C}^{2n}$ の complex Lagrangian subspace 全体のなす Grassmann manifold とする. このとき $n = 1$ なら Lag^C は CP^1, $n = 2$ なら 3-quadric Q^3 となり, 一般には Lag^C は rank n の compact type の Hermitian symmetric space となる. V を Lag^C 上の tautological vector bundle とし Φ を V から $\mathbf{C}^{2n}$ への対応する写像とする. V 上に $Sp(n, \mathbf{C})$-不変 holomorphic 1-form Ξ が存在し $d\Xi = -2\Phi^*\omega$ が成立する. fibre への $\mathbf{C}^*$ 作用に関し Ξ の性質を使い次の定理が導かれる.

定理 1.1. M を Lag^C の complex submanifold. $V|_M$ を M に引き戻された bundle とする. $V|_M$ 上の closed holomorphic 1-form β を作り $V|_M$ 上 $\Xi - \beta$ を考える. $\Xi - \beta = 0$ を満たす $V|_M$ の集合 S の Φ による image は complex isotropic となる (特異点を持つかもしれない). $\beta = 0$ のときは

complex isotropic cone を与える. S から M への projection が M の complex submanifold N への submersion となっていれば N の closed holomorphic 1-form α が存在して S は $V|_N$ の集合 $\Xi - \alpha = 0$ に含まれる.

M は Lag^C の任意の complex submanifold に対して $V|_M$ の零点集合 (analytic set) から complex Lagrangian cone が得られる可能性を持つ. 大域的な研究に役立つかもしれない. また十分に小さい t に対して $V|_N$ の集合 $\Xi - t\alpha = 0$ は complex Lagrangian cone $\Xi = 0$ の変形を与えているように見える. complex Lagrangian submanifold の特異点の研究に役に立ち moduli space of asymptotical conical complex Lagrangian submanifolds for a complex Lagrangian cone $\Xi = 0$ in $V|_N$ は $H^{1,0}(N)$ であることが期待される.

complex Lagrangian cone については次のようなことが成り立つ. I から導かれる complex structure を持った complex projective space CP_I^{2n-1} は holomorphic contact structure を持ち holomorphic horizontal submanifold を考えることができる. これは complex Lagrangian cone の CP_I^{2n-1} での image で与えられる. 一方 CP_J^{2n-1} での image は real Lagrangian submanifold を与える. これらの関係は [Ej2], [E-T1], [E-T2] で与えられている. 応用として HP^n の homogeneous maximal totally complex submanifold が分類され [B-G-P], 塚田氏の parallel submanifold であることが示された [Ts].

Lag^C の null submanifold を complex Lagrangian cone の Lag^C への Gauss map の image の持つ性質から定義する. Gauss image から complex Lagrangian cone を再構成するものとして holomorphic horizontal submanifold と null submanifold の間の Lie transform を具体的に与える. このことは Q^3 の null curve と CP^3 の horizontal holomorphic curve の Lie transform [Br1] の一般化と見なせる. 定理 5.1 において $\mathbf{C}^4$ における 2-dimensional ruled complex Lagrangian submanifold の例を構成する.

2. 定理 1.1 の前半の証明.

$\{(Z, Z\tau)|Z \in \mathbf{C}^n\}$, ここで τ を n 次 complex symmetric matrix, で与えられる complex Lagrangian subspace 全体を Lag_o^C とする. 従って S_C^2 を n 次 complex symmetric matrix 全体とすれば Lag_o^C 同一視できる. Lag_o^C は Lag^C の Zariski open subset である. これからの計算は Lag_o^C 上で考える. Lag_o^C 上の tautological vector bundle は

$$\{(\tau, (Z, Z\tau)| \in S_C^2, Z \in \mathbf{C}^n\}$$

とみることができ $S^2_C \times \mathbf{C}^n$ とみなせる．$Sp(n,\mathbf{C})$ は $a\,{}^t d - b\,{}^t c = E_n$ で $a\,{}^t b$, $c\,{}^t d$ がsymmetric matrix となる n 次 complex matrix a,b,c,d で $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ となる $2n$ 次 complex matrix 全体とする．その時 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の $\mathbf{C}^{2n}$ への右作用を

$$(Z_1, Z_2)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (Z_1 a + Z_2 c, Z_1 b + Z_2 d)$$

とする．この時$Sp(n,\mathbf{C})$ はω に関して holomorphic symplectic transformation となる． この作用は $Sp(n.\mathbf{C})$ は complex Lagrangian subspace を complex Lagrangian subspace に写すので Lag^C, tautological vector bundle に作用する．更に Φ は $Sp(n,\mathbf{C})$-equivariant である．S^2_C, $S^2_C \times \mathbf{C}^n$ への作用とみると

$$\tau\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+\tau c)^{-1}(b+\tau d),$$

$$(\tau, K)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ((a+\tau c)^{-1}(b+\tau d), K(a+\tau c))$$

となる．実際
$(Z, Z\tau)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (Z(a+\tau C), Z(b+\tau d))$ なので $W = Z(a+\tau C)$ とおけば $(Z, Z\tau)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (W, W(a+\tau c)^{-1}(b+\tau d))$ となる．tautological vector bundle から $\mathbf{C}^{2n}$ への写像 Φ は $S^2_C \times \mathbf{C}^n$ に制限すると

$$\Phi(\tau, K) = (K, K\tau)$$

となる．$\Phi^*\omega$ は tautological vector bundle 上の $Sp(n,\mathbf{C})$-invariant closed 2-form となる．$\Phi(\tau,K) = (K, K\tau)$ を使って ω を引き戻すと

$$\Phi^*\omega = ((dK)\tau + Kd\tau)\wedge {}^t dK = Kd\tau \wedge {}^t dK =$$

$$\mathrm{tr}(d\tau \wedge^t KdK) = -\frac{1}{2}\mathrm{dtr}(d\tau\,{}^t KK).$$

そこで Ξ を S^2_C 上 $\Xi = \mathrm{tr}(d\tau\,{}^t KK)$ で定める．$Sp(n,\mathbf{C})$-invariant であることを使って Lag^C 上の $Sp(n,\mathbf{C})$-invariant holomorphic 1-form であることを示すことができる．定理の前半はcone となることを除いて成立し，さらに $\Xi = 0$ の集合は C^*-invariant であるので cone を与える．

系 2.1(complex generating function). M を S_C^2 の complex submanifold とし $V|_M$ を考える. 各 $K \in \mathbf{C}^n$ に対して $\mathrm{tr}\tau{}^tKK$ は M 上の holomorphic function であり K を変化させてできる critical point 全体を $S_C^2 \times \mathbf{C}^n$ の集合と見ることができる. その Φ による image は complex isotropic cone となる. さらに f を M 上の holomorphic function とすれば $\mathrm{tr}\tau{}^tKK + f$ の critical point 全体の image は complex isotropic submanifold となる.

注意. real generating function を構成する事もできる [Ej1]

3. 定理 1.1 の後半の証明.

すべての complex isotropic submanifold, complex isotropic cone がこの構成方法でできるかどうかは興味ある. Φ は $\mathbf{C}^n$ の原点を除いて reguler value である. 原点を通らない complex isotropic submanifold の $S_C^2 \times \mathbf{C}^n$ に制限した Φ による逆像は $S_C^2 \times \mathbf{C}^n$ の complex submanifold と見なされる. projection $S_C^2 \times \mathbf{C}^n \longrightarrow S_C^2$ をこの submanifold に制限し maximum rank を持つ点の近傍は次の holomorphic map ϕ of $U \times V$ into $S_C^2 \times K_{n,\gamma}$

$$\phi(z_1, ..., z_p, k_1, ..., k_q) = (\tau(z_1, ..., z_p), K(z_1, ..., z_p, k_1, ..., k_q))$$

で表される. ここで $(z^1, ..., z^p)$ を the canonical coordinate system of $\mathbf{C}^p$ とし $(k^1, ..., k^q)$ を the canonical coordinate system of $\mathbf{C}^q$ とする. U を $0 \in \mathbf{C}^p$ の近傍 V を $0 \in \mathbf{C}^q$ の近傍とする.

$\phi^*\Phi^*\omega_1$ を計算する.

$$\mathrm{tr}(\frac{\partial\tau}{\partial z^k}dz^k) \wedge {}^tK(\frac{\partial K}{\partial z^\ell}dz^\ell + \frac{\partial K}{\partial k^m}dk^m) =$$

$$\mathrm{tr}(\frac{\partial\tau}{\partial z^k}{}^tK\frac{\partial K}{\partial z^\ell})dz^k \wedge dz^\ell + \mathrm{tr}(\frac{\partial\tau}{\partial z^k}{}^tK\frac{\partial K}{\partial k^m})dz^k \wedge dk^m.$$

これより $\phi^*\Phi^*\omega_1 = 0$ である必要十分条件は $\frac{\partial}{\partial z^k}\mathrm{tr}(\frac{\partial\tau}{\partial z^\ell}{}^tKK) - \frac{\partial}{\partial z^\ell}\mathrm{tr}(\frac{\partial\tau}{\partial z^k}{}^tKK) = 0$, $\frac{\partial}{\partial k^m}\mathrm{tr}(\frac{\partial\tau}{\partial z^k}{}^tKK) = 0$ であり, Ξ が holomorphic closed 1-form on U の引き戻しであることが分かる. これは定理 1.1 の後半の証明を与えている.

4. Klein correspondence と Lie transform.

T を complex isotropic subspace $\subset \mathbf{C}^{2n}$ とする. T を含むすべての complex Lagrangian subspace は $Lag^C = U(n)\backslash Sp(n)$ における軌跡を与える. T が $E_\tau \subset \mathbf{C}^n$ 上のグラフ $T = \{(X, X\tau) \in \mathbf{C}^n | X \in E_\tau\}$ で与えられているとするここで $\tau \in S_C^2$ である. S を $\{(X, XA) \in \mathbf{C}^{2n} | X \in \mathbf{C}^n\}$ で与えられた complex

Lagrangian subspace とする，ここで $A \in S^2_C$. S が T を含む必要十分条件は $X \in E_\tau$ に対して $X(A-\tau)=0$. よって $A_1,...,A_p$ で $X \in E_\tau$ に対して $XA_k=0$ となる基底を得る．これより S^2_C における軌跡は $t_1A_1+\cdots+t_pA_p+\tau$ である．

S^2_C の affine subspace が null subspace とは affine space のすべての点 A, A' に対して $X(A-A')=0$, $X \in E_\tau$ となる subspace $E_\tau \subset \mathbf{C}^n$ が存在することである，但し maximal subspace E_τ で考える． E_τ の次元を null subspace の nullity と呼ぶこのとき null subspace から complex isotropic subspace $\{(X, X\tau) \in \mathbf{C}^{2n} | X \in E_\tau\}$ を得る，ここで τ は null subspace の点であり取り方によらない． これを null subspace と complex isotropic subspace の **Klein correspondence** と呼ぶ． *nullity* $= r$ の affine subspace は r 次元 isotropic subspace に対応する． S^2_C の点は nullity=n の affine subspace として complex Lagrangian subspace を与え，nullity=1 の null space は $\mathbf{C}^{2n}$ の原点を通る complex line を与える．これらは $Sp(n, \mathbf{C})$ 不変な概念であることに注意しよう．

N を S^2_C の complex submanifold とする．N の tangent space が nullity が r の null space であるとき N を nullity が r の null submanifold と呼ぶ．N の点 τ に対する E_τ を用いて N 上 rank r の complex vector bundle E が構成できる．fibre を $\{(X, X\tau),\ X \in E_\tau\}$ と見れば fibre $\mathbf{C}^{2n}$ の r-dimensional complex isotropic subspace として trivial bundle $N \times \mathbf{C}^{2n}$ の subbundle となる．これより E から $\mathbf{C}^{2n}$ への写像

$$(\tau, (X, X\tau)), X \in E_\tau, \longrightarrow (X, X\tau)$$

が得られる．$(z_1, ..., z_p)$ を N の coordinate system とし $\xi_1, ..., \xi_r$ を local cross section として写像は

$$(k_1\xi_1+\cdots+k_r\xi_r, (k_1\xi_1+\cdots+k_r\xi_r)\tau)$$

で与えられる．したがって null submanifold の仮定より

$$(k_1\xi_1+\cdots+k_r\xi_r)\frac{\partial\tau}{\partial z_i}=0$$

であることに注意すると

$$(\frac{\partial(k_1\xi_1+\cdots+k_r\xi_r)}{\partial z_i}, (\frac{\partial(k_1\xi_1+\cdots+k_r\xi_r)}{\partial z_i}\tau)),\ 1 \le i \le p$$

と

$$(\xi_j, \xi_j\tau),\ 1 \le j \le r$$

で tangent space が張られる．従って τ に関する complex Lagrangian subspace の complex isotropic subspace を張っていることを示している．これは complex isotropic cone を与える．特に ξ_i, $1 \le i \le p$ とその微分が $\mathbf{C}^n$ を張っていれば complex Lagrangian cone となりその Gauss image が null submanifold N となる．この correspondence を **Lie transform** と呼ぶことにする．

5. $n=2$ の場合

complex Lagrangian cone in $\mathbf{H}^2 = \mathbf{C}^4$ を考える．$\mu(z,k) = k(F_1(z), F_2(z))$, $k, z \in \mathbf{C}$, ここで F_1, F_2 は $\mathbf{C}^2$ に値をもつ holomorphic function, で与えられているとする．μ が complex Lagrangian cone を与える必要十分条件は $F_1{}^tF_2' - F_2{}^tF_1' = 0$. $F_1 = (f_1, f_2), F_2 = (f_3, f_4)$ とすれば $f_1f_3' + f_2f_4' - f_3f_1' - f_4f_2' = 0$ である．k の parameter change で $(f_1, f_2) = (1, g)$ とできる．したがって $f_3' + gf_4' - f_4g' = 0$. $f = f_3 + gf_4$ とおけば，$f_3 = f - \frac{gf'}{2g'}, f_4 = \frac{f'}{2g'}$. これが Bryant の表現公式である [Br2](実際は $(g, (1,g)H(z))$ である). われわれは次のように表す．

$$k((1,g),(1,g)H(z)), \quad H(z) = \begin{pmatrix} f & -\frac{f'}{2g'} \\ -\frac{f'}{2g'} & \frac{f'}{gg'} \end{pmatrix}.$$

その Gauss map $\hat{H}(z)$ を求めると次で与えられる．

$$\hat{H}(z) = \begin{pmatrix} f - \frac{gf'}{g'} + \frac{g^2(f''g'-f'g'')}{2g'^3} & \frac{f'}{2g'} - \frac{g(f''g'-f'g'')}{2g'^3} \\ \frac{f'}{2g'} - \frac{g(f''g'-f'g'')}{2g'^3} & \frac{f''g'-f'g''}{2g'^3} \end{pmatrix}.$$

$\hat{H}(z)$ は $\mathbf{C}^3$ の null curve (下の Example 1 を見てください) であり Darboux の表現公式 [Da] を与えている．

complex Lagrangian graph $(z^1, z^2, \frac{\partial\phi}{\partial z^1}, \frac{\partial\phi}{\partial z^2})$ を考える．complex Lagrangian graph が cone である必要十分条件は $t^2\phi(z^1,z^2) = \phi(tz^1, tz^2)$ である．$\psi(w) = \phi(1,w)$ とおくなら $\phi(z^1,z^2) = (z^1)^2\psi(\frac{z^2}{z^1})$ である．その Gauss map は $\tau(w) =$ Hessian ϕ で与えられる．ここで

$$\tau(w) = \begin{pmatrix} 2\psi(w) - 2w\psi'(w) + w^2\psi''(w) & \psi'(w) - w\psi''(w) \\ \psi'(w) - w\psi''(w) & \psi''(w) \end{pmatrix},$$

であり S_C^2 の null curve, $\gamma = 2$ と null vector $(1. w)$ が得られる.

これは $\hat{H}(z)$ において $g = z$, $f = \psi$ として得られる.

Example 1: ξ を Riemann surface M から $\mathbf{R}^3$ への minimal branched immersion とする. M が algebraic minimal surface とは M から $\mathbf{C}^3$ への holomorphic null map $F = (F_1, F_2, F_3)$ で $\xi = \mathrm{Re}F$ が成り立つことである. ここで holomorphic null map は $(F_1')^2 + (F_2')^2 + (F_2')^2 = 0$ を意味している. Simply connected minimal surface は algebraic であることに注意.

$$\hat{\tau} = \begin{pmatrix} F_1 - iF_2 & iF_3 \\ iF_3 & F_1 + iF_2 \end{pmatrix}$$

とおくと $S_C^2 \subset Q^3$ の null curve である.

注意 Q^3 の null curve は断面曲率-1 の 3 次元 hyperbolic space $H^3(-1)$ の constant mean curvature 1 の surface と関係し [Br5], [M-U-Y], CP^3 の horizontal holomorphic curve は断面曲率 1 の 3 次元 sphere $S^4(1)$ の superminimal surface [Br2] と $H^3(-1)$ の flat surface [G-M-M] と関係している [E-Ta].

我々は $\mathbf{C}^3$ の algebraic minimal surface の fractional linear transformation を得る.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(2, \mathbf{C})$ に対して,

$$\begin{pmatrix} F_1 - iF_2 & iF_3 \\ iF_3 & F_1 + iF_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$$

$$(a + \begin{pmatrix} F_1 - iF_2 & iF_3 \\ iF_3 & F_1 + iF_2 \end{pmatrix} c)^{-1}(b + \begin{pmatrix} F_1 - iF_2 & iF_3 \\ iF_3 & F_1 + iF_2 \end{pmatrix} d).$$

$\psi(w) = w^3$ のとき $\phi(z^1, z^2) = \frac{(z^2)^3}{z^1}$ となる. Enneper surface に伴う null curve of genus 0 が

$$\hat{\tau} = \begin{pmatrix} 2z^3 & -3z^2 \\ -3z^2 & 6z \end{pmatrix}$$

で得られる. これは Q^3 の genus 0 の immersed null curve of degree 4 であり associated horizontal holomorphic curve は immersed で degree 3 となる [Br2]. Bryant は genus 0 の immersed null curves of degree 4 を分類し, そ

の moduli space は $SO(5,\mathbf{C})/\rho_5(SL(2,\mathbf{C}))$ であることを示した．上の map は $SL(2,\mathbf{C}) = Sp(1,\mathbf{C})$-equivariant である．$Sp(2,\mathbf{C})$ は $SO(5,\mathbf{C})$ の double cover であることに注意．対応する complex Lagrangian cone は 0 を除いて regular である．null curve transverse at the infinity $Q^2 = Q^3 \setminus S_C^2$ は complete minimal surface with embedded flat ends を与えて，その Gauss map は degree 3 である [Br2], [Br4]. 具体的に計算してみよう．

$$\begin{pmatrix} 2z^3 & -3z^2 \\ -3z^2 & 6z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3z(z^3-1)} \begin{pmatrix} 6z & 3z^2 \\ 3z^2 & 2z^3 - 1/2 \end{pmatrix}.$$

対応する complete minimal surface of flat ends は

$$\mathrm{Re}\left(-\frac{2z^3+6z-1/2}{6z(z^3-1)}, -i\frac{2z^3-6z-1/2}{6z(z^3-1)}, i\frac{z}{z^3-1}\right)$$

である．

注意. Enneper surface の Gauss map の degree は 1. 理由は non-transversality [Br2] である．

Example 2: 具体的に $\Xi = 0$ の $\beta \in H^{1,0}(M)$ よる deformation を $\gamma = 2, n = 1$ と M が Q^3 の compact null curve で調べてみる．

$$\tau(z) = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{12} & \tau_{22} \end{pmatrix} \in S_C^2$$

とせよ．仮定より $\tau'_{11}\tau'_{22} - \tau'^2_{12} = 0$ であり $\beta = \alpha dz$ とおく．Then $\Xi = \beta$ は $k_1^2\tau'_{11} + 2k_1k_2\tau'_{12} + k_2^2\tau'_{22} = \alpha$ となる．τ'_{11} かあるいは τ'_{22} が 0 でない点では

$$k_1 = -\frac{k_2\tau'_{12}}{\tau'_{11}} + \frac{\sqrt{\alpha\tau'_{11}}}{\tau'_{11}}, \quad k_2 = -\frac{k_1\tau'_{12}}{\tau'_{22}} + \frac{\sqrt{\alpha\tau'_{22}}}{\tau'_{22}}$$

となる．$\sqrt{\ }$ のとり方は 2 つあることに注意．対応する complex Lagrangian submanifold はふたつの表現を持つ．

$$C_1(k_1, z) =$$

$$k_1\left(1, -\frac{\tau'_{12}}{\tau'_{22}}, \tau_{11} - \frac{\tau'_{12}}{\tau'_{22}}\tau_{12}, \tau_{12} - \frac{\tau'_{12}}{\tau'_{22}}\tau_{22}\right) + \left(0, \frac{\sqrt{\alpha\tau'_{22}}}{\tau'_{22}}, \frac{\sqrt{\alpha\tau'_{22}}}{\tau'_{22}}\tau_{12}, \frac{\sqrt{\alpha\tau'_{22}}}{\tau'_{22}}\tau_{22}\right),$$

$$C_2(k_2, z) =$$

$$k_2(-\frac{\tau'_{12}}{\tau'_{11}}, 1, \tau_{12} - \frac{\tau'_{12}}{\tau'_{11}}\tau_{11}, \tau_{22} - \frac{\tau'_{12}}{\tau'_{11}}\tau_{12}) + (\frac{\sqrt{\alpha\tau'_{11}}}{\tau'_{11}}, 0, \frac{\sqrt{\alpha\tau'_{11}}}{\tau'_{11}}\tau_{11}, \frac{\sqrt{\alpha\tau'_{11}}}{\tau'_{11}}\tau_{12}).$$

各表現の最初の部分は complex Lagrangian cone を表し, 最後の部分は perturbation を表している. $V|_M$ の $\Xi = \beta$ の集合は β の零点を除いたところでは M の fibre 上母線に平行な 2 つの affine line の集まりであり, 零点上では母線と一致する. Harvey and Lawson [H-L], Bryant [Br3], Joyce [Jo2] は $\mathbf{C}^3$ の ruled special Lagrangian 3-fold を調べている. 上の例は $\mathbf{C}^4$ の 2-dimensional ruled complex Lagrangian submanifold である. 特異点が生じる可能性もある. 更に irreducible component が 1 と 2 の可能性があり今後の課題である

M は immersed であると仮定する. そのとき τ'_{11} と τ'_{22} は同時に 0 でない. $C_1(k_1, z)$ and $C_2(k_2, z)$ のひとつが使える.

$$\frac{\partial C_1(k_1, z)}{\partial z} = k_1(-\frac{\tau'_{12}}{\tau'_{22}})'(0, 1, \tau_{12}, \tau_{22}) + (\frac{\sqrt{\alpha\tau'_{22}}}{\tau'_{22}})'(0, 1. \tau_{12}, \tau_{22}) +$$

$$(\frac{\sqrt{\alpha\tau'_{22}}}{\tau'_{22}})(0, 0, \tau'_{12}, \tau'_{22}).$$

だから α が zero point を持たなければ, ruled submanifold は regular となる.

定理 5.1. M を Q^3 の immersed null curve of genus 1 とする. irreducible component の数が 2 であれば, $\Xi = 0$ in $\mathbf{C}^4$ が与える complex Lagrangian cone の 2 つの ruled, asymptotical conical complex Lagrangian submanifolds with rate 0 がある. 1 であれば 1 つの asymptotical conical complex Lagrangian submanifold with rate 0 となる.

genus 0 の null curve からは ruled, asymptotical conical complex Lagrangian submanifolds with rate 0 への変形は存在しないと思われる. 上の例は Joyce の構成した $\mathbf{C}^3$ の ruled special Lagrangian 3-fold と似ている. Bryant [Br2] は immersed null curve of genus 1 の Lie transform である holomorphic horizontal curve は 特異点 (原点以外) を持つことを示している. だから定理 5.1 の complex Lagrangian cone も特異点を持つ. M が branched null curve of genus 1 であれば branched point 上の fibre では $\Xi = \beta$ の点は存在しないので asymptotical conical complex Lagrangian submanifolds with rate 0 ではないことがわかるが上の議論より得られる ruled submanifold は regular であ

る. Bryant[Br2], Small[Sm], Pirola[Pi] は branched null curve of genus 1 の構成をしている.

系 2.1 を使うと次のことがわかる.

系 5.2. compact でない $M \subset S^2_C$ と M 上の holomorphic function では, $(1-t)\mathrm{tr}\tau^t KK + tf$, $0 \le t \le 1$ は complex Lagrangian cone から ruled complex Lagrangian submanifold をたどり f の critical point に対応するいくつかの原点を通る complex Lagrangian subspace への変形を与える.

References

[Br1] R. L. Bryant, Surfaces in conformal geometry, Proceedings od Symposia in Pure Mathematics 48(1988), 227-240.

[Br2] R. L. Bryant, Conformal and minimal immersions of compact surfaces into the 4-sphere, J. Diff. Geometry 17(1982), 455-473.

[Br3] R. L. Bryant, Second order families of special Lagrangian 3-folds, Inv. Apostlov, A. Dancer, N. J. Hitchin, and M. Wang, editors, Perspective in Riemannian geometry, CRM Proceedings and Lecture Notes, vol 40, 63-98 A. M. S Providence, RI, 2006. math. DG/0007128.

[Br4] R. L. Bryant, A duality theorem for Willmore surfaces, J. Diff. Geom. 20(1984), 23-53.

[Br5] R. L. Bryant, Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space, Astérisque 154-155(1987), 321-347.

[Da] G. Darboux, Lecons sur la Theéorie générale des Surfaces, Livre III, Grauthier-Villars, Paris, (1894).

[B-G-P] L. Bedulli, A. Gori and F. Podesta, Maximally totally complex submanifold of $\mathbf{HP}^n$: homogeneity and holonomy, Bull. London Math. Soc. 41(2009), 1029-1040.

[Ej1] N. Ejiri, A generating functin of a complex Lagrangian cone in $\mathbf{H}^n$, preprint.

[Ej2] N. Ejiri, Calabi lifting and surface geometry in S^4, Tokyo J. Math. 9(1986), 297-324.

[E-Ta] N. Ejiri and M. Takahashi, The Lie transform between null curves in $SL(2, \mathbf{C})$ and contact curves in $PSL(2, \mathbf{C})$. Riemann surfaces, harmonic maps and visualization, 265-277, OCAMI Stud., 3 Osaka Munic. Univ Press, Osaka, 2010.

[E-T1] N. Ejiri and K. Tsukada, Another Natural Lift of a Kaehler Submanifolds of a Quaternionic Kaehler Manifolds to the twistor Space, Tokyo J. Math. 28(2005), 71-78.

[E-T2] N. Ejiri and K. Tsukada, A remark on complex Lagrangian cones in $\mathbf{H}^n$, Recent Progress in Differential Geometry and its Related Fields. Proceeding of 2nd Int'l Colloquium on Differential Geometry and its Related Field, Veliko Tarnovo, Bulgaria, Adachi, T. et al (Ed.) World Scientific 2011.

[G-M-M] J. A. Gálvez, A. Martínez and F. Milán, Flat surfaces in hyperbolic 3-space, Math. Ann. 316(2000), 419-435.

[Hi] N. J. Hitchin, The moduli space of complex Lagrangian submanifolds, Asian J. Math. 3(1999), 77-91.

[H-L] R. Harvey and J. B. Lawson, Calibrated geometries, Acta Math. 148(1982), 47-157.

[Jo1] D. D. Joyce, Riemannian holonomy groups and calibrated geometry, Oxford University Press, 2007.

[Jo2] D. D. Joyce, Ruled Special Lagrangian 3-Folds in $\mathbf{C}^3$, Proc. London Math. Soc. 85(2002), 233-256.

[M-U-Y] F. Martin, M. Umehara and K. Yamada, Complete bounded null curves immersed in $\mathbf{C}^3$ and $SL(2, \mathbf{C})$, Calc. Var. Partial Differential Equations 36(2009), 119-139.

[Pi] G. P. Pirola, Algebraic curves and non rigid minimal surfaces in the Euclidean space, Pacific J. Math. 183(1998), 333-357.

[Sm] A. Small, On algebraic minimal surfaces in $\mathbf{R}^3$ deriving from charge 2 Monopole spectral curves, Inter. J. Math. 16(2005), 173-180.

[Ts] K. Tsukada, Parallel submanifolds in quaternion projective space, Osaka J. Math. 22(1985), 187-241.