数理解析研究所講究録
第 1817 巻 2012 年 64-70

四元数ケーラー多様体のツイスター埋め込み

明治大学理工学部　長友康行 (Yasuyuki Nagatomo)
Department of Mathematics, Meiji University

ABSTRACT. コンパクト四元数ケーラー多様体上の特別な接続を許容するベクトル束において定義されるツイスター方程式をみたす切断をツイスター切断という。ツイスター切断を用いてグラスマン多様体への写像を構成する。このとき、この写像が (半) バランス条件を満たすならば、調和写像であることを示す。定義域がコンパクト四元数対称空間であり、ベクトル束が既約等質束である場合にツイスター切断を許容するベクトル束を用いて調和写像の例を与える。バランス条件の考え方の一端として、複素射影空間から複素射影空間への調和写像に関する結果にも言及する。

1. 序

本稿では、はじめに四元数ケーラー多様体上のベクトル束の接続に関するある条件の下、ツイスター方程式をみたす切断 (ツイスター切断) を利用して複素グラスマン多様体への写像を構成する。そして、この写像がある条件を満たすならば、それは調和写像であることを示す。

定理 1.1. (cf.[7], [8]) V を四元数ケーラー多様体 M 上の (局所的に定義された) *ASD*ベクトル束であるとする。ベクトル束 $V \otimes \mathbb{H} \to M$ がツイスター方程式の解空間 W により、大域的に生成されるとする。

このとき、W にバランス積が存在すれば、$(V \otimes \mathbb{H} \to M, W)$ による誘導写像 (ツイスター写像) $f : M \to Gr_p(W)$ はエネルギー密度が一定な調和写像となる。ただし、グラスマン多様体 $Gr_p(W)$ は W 上のバランス積により誘導されるリーマン計量をもつものとする。

定理内の用語は次節以降で説明していく。また、定理 1.1 に対する具体例を、第 3 節において挙げることにする。これは単なる具体例ではなく、Penrose 変換と Bott-Borel-Weil の定理を用いれば分類結果を与えるものである。

定理の証明では、一般化された高橋の定理とツイスター方程式をみたす切断がラプラス作用素の固有切断になるという事実を使う。そのためにまず、四元数ケーラー多様体上で定義される様々な幾何構造を紹介した後に、リーマン多様体からグラスマン多様体への調和写像に関して話を進めることにする。

上の定理においてバランス積なる用語が使用されているが、これは [3] において定義された用語を踏襲している。しかし、本来の意味と若干異なり、弱い条件になっているので、半バランス積と呼ぶべきかもしれない。

バランス積の考え方の一端として、複素射影空間から複素射影空間への調和写像に関する結果にも言及する。これらは板東-大仁田の結果や Calabi の結果の別証明となっている。

2. 準備

2.1. 四元数ケーラー多様体上の幾何学. $V \to M$ をエルミート計量をもつ四元数ケーラー多様体、もしくは超ケーラー多様体上の複素ベクトル束とする。I, J, K をその四元数構造とする。超ケーラー多様体上では I, J, K は大域的に定義されるが、四元数ケーラー多様体上では、局所的に定義される対象であることに注意する。しかし、以下の定義では I, J, K が局所的に定義されていれば十分である。

定義 2.1. (cf. Mamone Capria-Salamon[5]) ベクトル束 $V \to M$ 上の接続 ∇ に対して、その曲率形式 R^{∇} が

$$R^{\nabla}(IX, IY) = R^{\nabla}(JX, JY) = R^{\nabla}(KX, KY) = R^{\nabla}(X, Y).$$

をみたすときに、接続 ∇ を **ASD 接続**という。また、このとき $V \to M$ を **ASD（ベクトル）束**、もしくはインスタントン（束）という。

注意. Galicki-Poon[4] により、ASD 接続の曲率形式 R^{∇} は、$*R^{\nabla} = \frac{-1}{(2n-1)!} R^{\nabla} \wedge \Omega^{n-1}$ をみたすことが知られている。ここで Ω は M の基本 4 形式である。したがって、ASD 接続は Tian[11] の意味での一般化された反自己双対インスタントンの例になっている。特に向きづけられた 4 次元リーマン多様体上の反自己双対接続も上の意味の ASD 接続である。また、Verbitsky[13] は超ケーラー多様体上の ASD 束を tri-holomorphic ベクトル束と呼んでいる。

次にツイスター作用素を定義する。簡単のため、四元数ケーラー多様体上でその定義を与えるが、超ケーラー多様体上でも同様に定義される。

定義により、四元数ケーラー多様体 M の正規直交枠よりなる主束と Levi-Civita 接続は、構造群が $\mathrm{Sp}(1) \cdot \mathrm{Sp}(n)$ である主束 $P \to M$ に還元される。

$\mathbb{C}^2$ を $\mathrm{Sp}(1)$ の標準表現とする。このとき、局所的に定義される随伴ベクトル束を $\mathbb{H} \to M$ と表すことにする。同様にして、$\mathrm{Sp}(n)$ の標準表現 $\mathbb{C}^{2n}$ に対して局所的に定義される随伴ベクトル束を $\mathbb{E} \to M$ と表すことにする。

$S^m\mathbb{H} \to M$ を $\mathbb{H} \to M$ の m 次対称積束、$\wedge^i\mathbb{E} \to M$ を $\mathbb{E} \to M$ の i 次歪対称積束であるとする。Clebsch-Gordan の定理 $S^m\mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \cong S^{m-1}\mathbb{H} \oplus S^{m+1}\mathbb{H}$ から得られる射影 $q : S^m\mathbb{H} \otimes \wedge^i\mathbb{E} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{E} \to S^{m+1}\mathbb{H} \otimes \wedge^{i+1}\mathbb{E}$ を使って、微分作用素を定義する。

定義 2.2. (Salamon[9, 10]) **ツイスター作用素** $\mathcal{D}$ と呼ばれる微分作用素が接続と射影 q の合成として定義される。

$$\mathcal{D}_m = q\nabla : \Gamma(S^m\mathbb{H} \otimes \wedge^i\mathbb{E}) \to \Gamma(S^{m+1}\mathbb{H} \otimes \wedge^{i+1}\mathbb{E}).$$

注意. $n = 1$, すなわち 4 次元の場合にはツイスター作用素 $\mathcal{D}$ は通常のツイスター作用素と一致し、一種の Dirac 作用素となる。

ベクトル束 $V \to M$ に接続が存在するならば、その接続と $S^m\mathbb{H} \otimes \wedge^i\mathbb{E} \to M$ の接続を利用して、一般化されたツイスター作用素

$$\mathcal{D}_m = q\nabla : \Gamma(V \otimes S^m\mathbb{H} \otimes \wedge^i\mathbb{E}) \to \Gamma(V \otimes S^{m+1}\mathbb{H} \otimes \wedge^{i+1}\mathbb{E})$$

が定義される。この拡張されたツイスター作用素も単にツイスター作用素ということにする。

2.2. **誘導写像.** (M,g) をリーマン多様体として、$E \to M$ を M 上の階数が q の実または複素ベクトル束とする。また、W を $\Gamma(E)$ の有限次元部分空間とする。すると、

$$ev : \underline{W} := M \times W \to E,$$
$$(x,t) \mapsto t(x)$$

なるベクトル束の準同型を得る。

定義 2.3. ベクトル束の準同型 $ev : \underline{W} := M \times W \to E$ が全射準同型であるとき、ベクトル束 $E \to M$ は W によって**大域的に生成される**という。

ベクトル束 $E \to M$ が N 次元空間 W によって大域的に生成されているとする。$p = N - q$ とおく。このとき、写像 $f : M \to Gr_p(W)$ が以下のようにして構成される。

$$f(x) := \mathrm{Ker}\, ev_x = \{t \in W \mid t(x) = 0\}$$

とおけば、f は M からグラスマン多様体 $Gr_p(W)$ への写像となる。こうして得られた写像 f を $(E \to M, W)$ から得られた**誘導写像**という。なお、ベクトル束 $E \to M$ が明らかな場合には、単に W による誘導写像ともいう。このとき、$Q \to Gr_p(W)$ をグラスマン多様体上の普遍商束とすれば、その引き戻し束 $f^*Q \to M$ と $E \to M$ とはベクトル束として同型となる。

したがって、逆に写像 $f : M \to Gr_p(W)$ が与えられたときには、f は $(f^*Q \to M, W)$ による誘導写像とみなすことができる。

例. $L \to M$ を射影的代数多様体上の十分豊富な正則直線束とする。W を $L \to M$ の正則切断全体のなす $N+1$ 次元線形空間とする。このとき、W による誘導写像は小平埋め込み $M \to Gr_N(W) = \mathbb{C}P^N$ である。

定義 2.4. 多様体 M からグラスマン多様体 $Gr_p(W)$ への写像 $f : M \to Gr_p(W)$ に対して、W から普遍商束の引き戻し束 $f^*Q \to M$ の切断全体のなす空間 $\Gamma(f^*Q)$ への線形写像 $W \to \Gamma(f^*Q)$ を考える。この線形写像が単射であるときに、$f : M \to Gr_p(W)$ は**充満な**写像であるといわれる。

最後に、**バランス積**を定義する。

定義 2.5. $E \to M$ をファイバー計量と計量を保つ接続をもつベクトル束とする。$W \subset \Gamma(E)$ が $E \to M$ を大域的に生成するときに、$(E \to M, W)$ による誘導写像 $f : M \to Gr_p(W)$ を考える。ここで、$W \subset \Gamma(E)$ にエルミート積を与える。すると W にエルミート計量を導入したことから、$Q \to Gr_p(W)$ には計量と計量を保つ接続が定義されることに注意する。このとき、引き戻し束 $f^*Q \to M$ にも計量と接続が定義されるが、これらが、$E \to M$ に与えられた計量と接続にゲージ同値であるときに W に与えられたエルミート積を**バランス積**という。

なお、リーマン多様体 (M,g) からリーマン多様体 (N,h) への写像 $f : M \to N$ の**エネルギー密度**とは $|df|^2$ である。

3. 主定理の証明と具体例

この節では、主定理の略証を紹介する。

（略証） 定理の仮定から、$s \in W \subset \Gamma(V \otimes \mathbb{H})$ は一階の線型方程式であるツイスター方程式

$$\mathcal{D}s = 0$$

をみたす。すると、s はラプラス作用素の固有切断となることが示される。

定理 3.1. [7] (M, g) を $4n$ 次元四元数ケーラー多様体とし、$V \to M$ を（局所的に定義された）ASD ベクトル束とする。このとき、ツイスター方程式を満たす任意の切断 $t \in \Gamma(V \otimes \mathbb{H})$ はラプラス作用素に対する固有切断となる。

$$\Delta t = (2ncs)t,$$

ここで、c は四元数ケーラー多様体の次元のみによる正の定数であり、s はスカラー曲率を表す。

ツイスター切断のなす空間 W がベクトル束 $V \otimes \mathbb{H} \to M$ を大域的に生成することが仮定されているので、誘導写像 $f : M \to Gr_p(W)$ が存在する。そこで、以下の一般化された高橋の定理 [8] を適用することにより、定理が成り立つことが示される。

定理 3.2. [8] (M, g) をリーマン多様体とし、写像 $f : (M, g) \to Gr_p(W)$ が与えられたとする。

W にスカラー積を導入したときに、$f : M \to Gr_p(W)$ に対する次の２条件は互いに同値である。

(1) $f : M \to Gr_p(W)$ は調和写像である。
(2) あるベクトル束 $f^*Q \to M$ の自己準同型 A が存在して、W に属する任意の切断 $t \in \Gamma(f^*Q)$ に対して、

$$\Delta t = -At$$

が成り立つ。

この条件の下、$|df|^2 = -\mathrm{trace}\, A$ が成り立つ。

したがって、エネルギー密度は固有値とベクトル束の階数を使って記述できる。

注意. 上の証明において、自然な同型 $V \otimes \mathbb{H} \cong f^*Q$ の下、ツイスター切断を定義する接続と誘導接続がゲージ同値である理由はない。そこで、バランス積の概念を必要としたのであった。

具体例を与える。M としてコンパクト四元数対称空間 G/K を考え、ベクトル束としてはある ASD 束 $V \to M$ が存在して、$V \otimes \mathbb{H} \to M$ と同型となる既約等質ベクトル束 $F \to G/K$ を考える。さらに、既約等質束の標準接続と $V \otimes \mathbb{H} \to M$ の接続がゲージ同値であると仮定する。このようなベクトル束はすべて分類されている [6]。

問題点は $F \to G/K$ がツイスター切断を許容するか、許容するとすればツイスター切断のなす空間 W はいかなるものか、また W はバランス積を持つのかといったことにある。

これらの問題をツイスター空間を導入することにより解決する。Z を M のツイスター空間とする [9]。このとき、Penrose 変換といわれる切断の空間の同一視が存在する。

$$W := \{s \in \Gamma(V \otimes \mathbb{H}) | \mathcal{D}s = 0\} \cong H^0(Z, V(1)),$$
$$V(1) = V \otimes \mathcal{O}(1),$$

ここで、$\mathcal{O}(1)$ は局所的に定義された Z 上の正則直線束である [9]。

そこで、問題はツイスター空間上の正則ベクトル束の正則切断の空間を求めることに帰着する。仮定から、ツイスター空間 Z は等質ケーラー多様体となり、Penrose 変換により $F \to G/K$ に対応するベクトル束も Z 上の既約等質ベクトル束となる。そこで、Bott-Borel-Weil の定理を利用すれば、ツイスター切断の存在やそれが存在するときに、W が G 既約表現空間となることがわかる。

したがって、W のバランス積として不変エルミート積をとればよい。

定義 3.3. $V \to M$ を四元数構造をもつ ASD 束とする。すると、$\mathbb{H} \to M$ も四元数構造をもつので、$V \otimes \mathbb{H} \to M$ は実構造をもつ。このとき、$V \otimes \mathbb{H} \to M$ の切断 s が**実切断**であるとは、s が実ベクトル束 $(V \otimes \mathbb{H})^{\mathbb{R}} \to M$ の切断とみなせることである。ただし、$(V \otimes \mathbb{H})^{\mathbb{R}}$ は実構造で不変な $V \otimes \mathbb{H}$ の部分集合を表している。(以後も同様な記法を用いる。)

また、Penrose 変換により対応する正則ベクトル束 $V(1) \to Z$ の正則切断 $\tilde{s}$ が Penrose 変換の下、$V \otimes \mathbb{H} \to M$ の実切断に対応するならば、$\tilde{s}$ も**実切断**ということにする。

$V \to G/K$ を K 不変四元数構造をもつ ASD 束とする。このとき、$F \to G/K$ は K 不変実構造をもち、ツイスター切断全体のなす空間 W も G 不変実構造をもつ。また、W が $F \to G/K$ を大域的に生成するならば、$W^{\mathbb{R}}$ も $F^{\mathbb{R}} \to G/K$ を大域的に生成することがわかる。したがって、実グラスマン多様体への誘導写像 $M \to Gr_p(W^{\mathbb{R}})$ が定義される。(簡単のため'向き'については言及しない。) また、このとき $Gr_p(W^{\mathbb{R}}) \to Gr_p(W)$ は全測地的である。そこで、このような場合には誘導写像として、$M \to Gr_p(W^{\mathbb{R}})$ を与えることにする。

例. 以下は全測地的埋め込みとなる。

- $Gr_2(\mathbb{C}^{n+2}) \to Gr_4(\mathbb{R}^{2n+2})$,
- $Gr_4(\mathbb{R}^{n+4}) \to Gr_4(\mathbb{R}^{n+4})$,
- $Gr_4(\mathbb{R}^7) \to Gr_4(\mathbb{R}^8)$, $Gr_4(\mathbb{R}^8) \to Gr_4(\mathbb{R}^8)$, $Gr_4(\mathbb{R}^9) \to Gr_8(\mathbb{R}^{16})$, $Gr_4(\mathbb{R}^{10}) \to Gr_{16}(\mathbb{R}^{32})$,
- $\mathbb{H}P^n \to Gr_4(\mathbb{R}^{4n+4})$,
- $E_6/\mathrm{Sp}(1)\mathrm{SU}(6) \to Gr_{30}(\mathbb{R}^{54})$,
- $E_7/\mathrm{Sp}(1)\mathrm{Spin}(12) \to Gr_{48}(\mathbb{R}^{112})$,
- $F_4/\mathrm{Sp}(1)\mathrm{Sp}(3) \to Gr_{12}(\mathbb{R}^{26})$,
- $G_2/\mathrm{SO}(4) \to Gr_4(\mathbb{R}^7)$

例. 以下は極小埋め込みとなる。

- $\mathbb{H}P^n \to Gr_{4n}(\mathbb{R}^{2n^2+3n})$,
- $Gr_2(\mathbb{C}^{n+2}) \to Gr_{4n}(\mathbb{R}^{n^2+3n+2})$,
- $Gr_4(\mathbb{R}^{12}) \to Gr_{32}(\mathbb{R}^{64})$.

$F^{\mathbb{R}} \to M$ の階数が M の次元以下である場合は上の例で尽きていることがわかる [7]。

4. バランス積の考え方の応用

以下はすでに知られた写像の剛性に関する結果である。これらは板東-大仁田 [1] では、調和写像のツイスター構成を用いて、Calabi[2] では, diastasis なる関数を用いて証明されていた。(ただし、Calabi の定理はここで紹介するものより、はるかに一般的な結果である。)

ところが、一般化された高橋の定理 3.2 とバランス積の概念を用いれば統一的な別証明を与えることができる。その一端を紹介する。

定理 4.1. [1] $f : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^n$ をエネルギー密度が一定である充満な調和写像とする。この時、f は SU(2) 同変な写像である。

定理 4.2. [2] $f : \mathbb{C}P^m \to \mathbb{C}P^n$ をエネルギー密度が一定である充満な正則写像とする。この時、f は $\mathrm{SU}(m+1)$ 同変な写像である。

証明はほとんど平行な議論によるので、前者の略証を与えることにする。

ここでは $Q = \mathcal{O}(1) \to \mathbb{C}P^n$ とおく。($\mathbb{C}P^n$ を $Gr_n(\mathbb{C}^{n+1})$ とみなしている。) $\mathbb{C}P^1$ は複素 1 次元なので、引き戻し束 $f^*Q \to \mathbb{C}P^1$ には引き戻し接続により、正則ベクトル束の構造が誘導される。すると、$\mathbb{C}P^1$ は Fano 多様体であるので、直線束の正則構造の一意性が成り立つので、$f^*Q \to \mathbb{C}P^1$ は $\mathcal{O}(k) \to \mathbb{C}P^1$ と正則同型であることがわかる。ここで、$\mathcal{O}(k) \to \mathbb{C}P^1$ は次数が k の正則直線束である。

この同型を固定して、計量を比較すると $Q \to \mathbb{C}P^n$ は複素階数が 1 であるので、その引き戻し束の誘導計量は、$\mathcal{O}(k) \to \mathbb{C}P^1$ の標準計量とあるゲージ変換により同一視される。

一方、計量と正則性に両立する(エルミート)接続の一意性から、$f^*Q \to \mathbb{C}P^1$ と $\mathcal{O}(k) \to \mathbb{C}P^1$ は接続まで込めてゲージ同値であることがわかる。これは、$f : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^n$ を $(\mathcal{O}(k) \to \mathbb{C}P^1, \mathbb{C}^{n+1})$ による誘導写像とみなせば、$\mathbb{C}^{n+1}$ のエルミート内積が**バランス積**であることを示している。

一般化された do Carmo-Wallach の定理 [8] から、$f : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^n$ は SU(2) 同変な写像の線形写像による変形として得られることがわかる。しかし、そのような変形は存在しないことが表現論より結論できるので、上の定理が成り立つことがわかる。

Toth は $\mathbb{C}P^m$ から $\mathbb{C}P^n$ への多項式調和写像という概念を与えた [12]。これは Hopf 写像 $S^{2m+1} \to \mathbb{C}P^m$ を考え、S^{2m+1} から S^{2n+1} への多項式写像から誘導されるエネルギー密度が一定な調和写像の特別なクラスであり、特に、写像に対して「水平性」を要求するものであった。この水平性という条件は、我々の言葉を用いれば、問題の写像を誘導写像とみなしたときに、$\mathbb{C}^{n+1}$ にバランス積が存在することと同値である。

ところが、一般化された高橋の定理 3.2 を使えば、Hopf 写像や球面間の多項式写像を経ることなく、Toth の意味での多項式写像という概念が得られることがわかる。

定理 4.3. $f : \mathbb{C}P^m \to \mathbb{C}P^n$ $(m \geqq 2)$ をエネルギー密度が一定な調和写像とする。また、f を誘導写像とみなしたときに、$\mathbb{C}P^n$ に *Fubini-Study* 計量を誘導する $\mathbb{C}^{n+1}$ のエルミート積がバランス積であるとする。このとき、f は *Toth* の意味での多項式調和写像である。

そこで、Tothの結果を使えば、上の写像のモジュライ空間が得られることになる。ただし、これは一般化されたdo Carmo-Wallachの結果に含まれる。さらに、Tothは次元公式を用いて、モジュライ空間の次元の評価を与えている。

References

[1] S.Bando and Y.Ohnita, *Minimal 2-spheres with constant curvature in $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$*, J. Math. Soc. Japan **39** (1987), 477–487

[2] E.Calabi, *Isometric Imbedding of Complex Manifolds*, Ann. of Math. **58** (1953), 1–23

[3] S. K. Donaldson, *Scalar curvature and projective embeddings I*, J.Diff.Geom. **59** (2001), 479–522

[4] K.Galicki and Y.S.Poon, *Duality and Yang-Mills fields on quaternionic Kähler manifold*, J.Math.phys. **32** (1991), 1263–1268

[5] M.Mamone Capria and S.M.Salamon, *Yang-Mills fields on quaternionic spaces*, Nonlinearity **1** (1988), 517–530

[6] Y.Nagatomo, *Representation theory and ADHM-construction on quaternion symmetric spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 4333–4355

[7] Y.Nagatomo, *Twistor sections on the Wolf spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **360**, (2008), 4497-4517

[8] Y.Nagatomo, *Harmonic maps into Grassmannian manifolds*, a preprint

[9] S.M.Salamon, *Quaternionic Kähler Manifolds*, Invent.Math. **67** (1982), 143–171

[10] S.M.Salamon, *Differential geometry of quaternionic manifolds*, Ann. SC. Ec. Norm. Sup. **19** (1986), 31–55

[11] G.Tian, *Gauge Theory and calibrated geometry, I*, Ann. of Math. **151** (2000), 193–268

[12] G.Toth, *Moduli Spaces of Polynomial Minimal Immersions between Complex Projective Spaces*, Michigan Math.J. **37** (1990), 385–396

[13] M.Verbitsky, *Hyperholomorphic bundles over a hyperKähler manifold*, J.Alg.Geom. **5** (1996), 633–669

Department of Mathematics, MEIJI UNIVERSITY, Higashi-Mita, Tama-ku, Kawasaki-shi, Kanagawa 214-8571, JAPAN

E-mail address: yasunaga@meiji.ac.jp