数理解析研究所講究録
第 1819 巻 2012 年 1-8

擬非拡大写像列の共通不動点問題に関する収束定理
Convergence theorems for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces

千葉大学・法経学部 青山 耕治 (Koji AOYAMA)
Faculty of Law and Economics
Chiba University

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H09, 47J20, 47J25.
Keywords and phrases. 擬非拡大写像, 不動点, 射影, 均衡問題.

1 序論

本稿では, 文献 [4] で示した擬非拡大型 ((r) 型) 写像列の共通不動点問題に関する収束定理 (定理 3.1 および 3.2) を紹介し, それらと文献 [28, 29] の結果の関係を説明する。

3 節で紹介する定理 3.1 および 3.2 では共に, 与えられた写像列と射影の列から点列を構成し, その点列が共通不動点に収束することを証明している。定理 3.1 の点列構成方法, いわゆるハイブリッド法の先行研究として [9, 13, 17, 19–22, 24] が重要である。また, 定理 3.2 で採用した点列構成方法は, [27] で導入されたものである。この他に, 極大単調作用素のリゾルベントなどの擬非拡大型写像の先行研究としては [14–16, 18, 23] がある。これらの先行研究の結果を, 特に射影を用いた収束定理の部分を包括的に議論しようとする試みからまとめたものが, ここで紹介する文献 [4] である。

2 準備

本稿では, $\mathbb{N}$ を正の整数全体の集合, E を実 Banach 空間, E^* を E の共役空間とし, E および E^* のノルムを $\|\cdot\|$ で, $x \in E$ における $x^* \in E^*$ の値を $\langle x, x^* \rangle$ で表す。また, E の点列 $\{x_n\}$ が x へ強収束することを $x_n \to x$, 弱収束することを $x_n \rightharpoonup x$ と表す。E 上の双対写像を J で表す。つまり, 各 $x \in E$ に対して $Jx = \left\{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\right\}$ である。

以下, 特に断らない限り, E を滑らか (smooth), 狭義凸 (strictly convex) かつ回帰的 (reflexive) な Banach 空間とする。このとき, 双対写像 J は E から E^* への 1 価写像で全単射である。E の凸性, 滑らかさの定義および J の諸性質について詳しくは, 文献 [25, 26]

を参照するとよい。

関数 $\phi\colon E\times E\to\mathbb{R}$ を, $x,y\in E$ に対して

$$\phi(x,y)=\|x\|^2-2\langle x,Jy\rangle+\|y\|^2$$

で定義する [1]。C が閉凸集合のとき, 各 $x\in E$ に対して, $\phi(z,x)=\min\{\phi(y,x):y\in C\}$ を満たす $z\in C$ がただ一つ存在する。その点 z を $Q_C(x)$ と表し, Q_C を E から C の上への一般化射影 (generalized projection) と呼ぶ [1, 13]。E が Hilbert 空間のとき, $\phi(x,y)=\|x-y\|^2$ であるから, 一般化射影は Hilbert 空間における距離射影 (metric projection) の自然な拡張の一つである。

写像 $T\colon C\to E$ の不動点の集合を $F(T)$ で表す。$T\colon C\to E$ が (r) 型であるとは

- $F(T)\neq\emptyset$ であり,
- すべて $x\in C$ および $p\in F(T)$ に対して $\phi(p,Tx)\le\phi(p,x)$

が成り立つときをいう。E が Hilbert 空間のとき, (r) 型写像は, 擬非拡大 (quasinonexpansive) 写像と呼ばれる。C が閉凸であり, $T\colon C\to E$ が (r) 型ならば, $F(T)$ は閉凸であることが知られている [20, Proposition 2.4]。

写像 $T\colon C\to E$ の漸近的不動点 (asymptotic fixed point) の集合を $\hat{F}(T)$ で表す。ここで, 点 $p\in C$ が写像 T の漸近的不動点であるとは, $x_n\rightharpoonup p$ かつ $x_n-Tx_n\to 0$ が成り立つ C の点列 $\{x_n\}$ が存在するときをいう [23]。定義より明らかに, $F(T)\subset\hat{F}(T)$ である。写像 $T\colon C\to E$ が (r) 型で, $F(T)=\hat{F}(T)$ が成り立つとき, T は [18, 20] の意味で relatively nonexpansive であるという。

$\{T_n\}$ を C から E への写像列とし, $\{T_n\}$ は共通不動点を持つ, つまり, $\bigcap_{n=1}^{\infty}F(T_n)$ は空ではないとする。E の点列 $\{x_n\}$ の弱収束部分列の極限 (weak cluster point または weak subsequential limit) の全体の集合を $\omega_{\mathrm{w}}(\{x_n\})$ で表す。つまり

$$\omega_{\mathrm{w}}(\{x_n\})=\{z\in E:\{x_n\}\text{ の部分列 }\{x_{n_i}\}\text{ が存在して }x_{n_i}\rightharpoonup z\}$$

である。$\{T_n\}$ が条件 (Z) を満たすとは, $x_n-T_nx_n\to 0$ となる C の有界点列 $\{x_n\}$ に対して, $\omega_{\mathrm{w}}(\{x_n\})\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}F(T_n)$ が成り立つときをいう。条件 (Z) を満たす写像列の例については, [2, 4–6, 8, 9] を参照するとよい。

3 (r) 型写像列の共通不動点問題に関する収束定理

本節では, E を滑らかで一様凸 (uniformly convex) な Banach 空間, C を E の空でない閉凸部分集合, $\{T_n\}$ を C から E への (r) 型写像の列とし, $\{T_n\}$ の共通不動点問題, つ

まり, 点 $u \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ を求める問題に関する二つの結果 (共通不動点への収束定理) を述べる。

一つ目は, ハイブリッド法 (hybrid method) による収束定理で, [19, Theorem 3.1] の一つの拡張である。

定理 3.1 ([4, Theorem 4.2] および [2, Proposition 6]). $\{T_n\}$ の共通不動点の集合 $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ は空ではなく, $\{T_n\}$ は条件 (Z) を満たすとする。x を E の任意の点とし, C の点列 $\{x_n\}$ を, $x_1 = Q_C(x)$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} H_n = \{z \in C : \phi(z, T_n x_n) \leq \phi(z, x_n)\}; \\ W_n = \{z \in C : \langle x_n - z, Jx - Jx_n \rangle \geq 0\}; \\ x_{n+1} = Q_{H_n \cap W_n}(x) \end{cases}$$

で定義する。このとき, $\{x_n\}$ は $Q_F(x)$ に強収束する。

二つ目は, [27] で導入された縮小射影法 (shrinking projection method) による収束定理である。

定理 3.2 ([4, Theorem 4.4] および [2, Proposition 6]). $\{T_n\}$ の共通不動点の集合 $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ は空ではなく, $\{T_n\}$ は条件 (Z) を満たすとする。x を E の任意の点とし, C の点列 $\{x_n\}$ を, $C_1 = C$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} x_n = Q_{C_n}(x); \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \phi(z, T_n x_n) \leq \phi(z, x_n)\} \end{cases}$$

で定義する。このとき, $\{x_n\}$ は $Q_F(x)$ へ強収束する。

定理 3.1 と定理 3.2 では点列構成方法は異なるが, 証明のほとんどを共通化することができる。実際, 両定理の証明の後半は, 次の補助定理によって完了する。

補助定理 3.3 ([4, Lemma 4.1]). F を E の空でない閉凸部分集合, $\{M_n\}$ と $\{N_n\}$ を E の空でない閉凸部分集合列とし, $F \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ を仮定する。さらに, x を E の任意の点, $\{x_n\}$ を E の点列とし, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $x_n = Q_{N_n}(x)$, $x_{n+1} \in N_n$ および $x_{n+1} = Q_{M_n}(x)$ と仮定する。このとき, 次が成り立つ。

- $\{x_n\}$ は有界である。
- $\phi(x_{n+1}, x_n) \to 0$ である。
- $\omega_{\mathrm{w}}(\{x_n\}) \subset F$ ならば, $x_n \to Q_F(x)$ である。

この補助定理は, [6, Lemma 3.1] の一般化である。また, この補助定理の一般化射影を距離射影に置き換えても同様な結論が得られる [8, Lemma 3.1]。

4 均衡問題と不動点問題

本節では, 前節の定理 3.1, 3.2 と文献 [28, 29] の結果の関係を説明する。以下, E を一様に滑らか (uniformly smooth) で一様凸な Banach 空間, C を E の空でない閉凸部分集合とする。

文献 [28, 29] では関数 $f\colon C \times C \to \mathbb{R}$ に関する均衡問題と (r) 型写像 $S\colon C \to E$ の不動点問題の共通解を求める問題, つまり

$$\text{すべての } y \in C \text{ に対して } f(z, y) \geq 0 \text{ かつ } z = Sz$$

となる $z \in C$ を求める問題を扱っている。f に関する均衡問題の解の集合を

$$\mathrm{EP}(f) = \{z \in C : f(z, y) \geq 0,\ \forall y \in C\}$$

と表せば, この問題の解の集合は $\mathrm{EP}(f) \cap F(S)$ である。

以下, 関数 $f\colon C \times C \to \mathbb{R}$ に対して, 次の条件を仮定する。これらの仮定を満たす f の例については [10] とその参考文献を参照するとよい。

(F1) すべての $x \in C$ に対して $f(x, x) = 0$ である。

(F2) すべての $x, y \in C$ に対して $f(x, y) \leq -f(y, x)$ である。

(F3) すべての $x \in C$ に対して $f(x, \cdot)\colon C \to \mathbb{R}$ は凸かつ下半連続関数である。

(F4) 各 $x, y \in C$ に対して

$$t \in [0, 1] \mapsto f\big((1-t)x + ty, y\big)$$

で定義される関数は上半連続である。

これらの仮定のもとで, [3] および [11] より, 各 $x \in E$ と $r > 0$ に対して

$$T_r(x) = \left\{ z \in C : f(z, y) + \frac{1}{r}\langle y - z, Jz - Jx \rangle \geq 0,\ \forall y \in C \right\} \tag{4.1}$$

は一点集合であることが知られている。つまり, 式 (4.1) によって E から C への 1 価写像 T_r が定義できる。さらに, T_r は (r) 型写像であり*1, $F(T_r) = \mathrm{EP}(f)$ であることが容易に確かめられるので, 解の集合 $\mathrm{EP}(f) \cap F(S)$ は閉凸集合である。

*1 T_r は [7] の意味で Q 型である。したがって, [4] の意味で (sr) 型である。

定理 3.1 と文献 [3] の結果を使うと, 次の定理を示すことができる。

定理 4.1 ([29, Theorem 3.1]). $S\colon C \to E$ を (r) 型写像, $\{r_n\}$ を正の数列, $\{\alpha_n\}$ を $[0,1]$ の数列とし, $F(S) = \hat{F}(S)$, $\inf_n r_n > 0$, $\limsup_n \alpha_n < 1$ および $\mathrm{EP}(f) \cap F(S) \neq \emptyset$ を仮定する。x を E の任意の点とし, C の点列 $\{x_n\}$ を, $x_1 = Q_C(x)$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} H_n = \{z \in C : \phi\left(z, T_{r_n} J^{-1}(\alpha_n J x_n + (1-\alpha_n) JSx_n)\right) \leq \phi(z, x_n)\}; \\ W_n = \{z \in C : \langle x_n - z, Jx - Jx_n \rangle \geq 0\}; \\ x_{n+1} = Q_{H_n \cap W_n}(x) \end{cases}$$

で定義する。ここで, T_{r_n} は (4.1) で定義される写像であり, J^{-1} は E^* の双対写像である。このとき, $\{x_n\}$ は $Q_{\mathrm{EP}(f)\cap F(S)}(x)$ に強収束する。

証明. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $V_n\colon C \to E$ を $V_n = J^{-1}(\alpha_n J + (1-\alpha_n)JS)$ で定義する。[4, Lemma 3.2] より

$$F(T_{r_n} V_n) = F(T_{r_n}) \cap F(V_n) = \mathrm{EP}(f) \cap F(V_n) \supset \mathrm{EP}(f) \cap F(S) \neq \emptyset$$

であり, $T_{r_n} V_n$ は (r) 型であることがわかる。また, $\limsup_n \alpha_n < 1$ より

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_{r_n} V_n) = \mathrm{EP}(f) \cap F(S)$$

である。ここで, E から E^* への作用素 (多価写像)A_f を

$$A_f(v) = \begin{cases} \{v^* \in E^* : f(v,y) \geq \langle y - v, v^* \rangle, \forall y \in C\} & (v \in C); \\ \emptyset & (v \notin C) \end{cases}$$

で定義すると [3, Theorem 3.5] により, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $(J + r_n A_f)^{-1} J = T_{r_n}$ が成り立つ[*2]。ゆえに, [2, Proposition 6] および [2, Example 7] から, $\{T_{r_n} V_n\}$ は条件 (Z) を満たすことがわかる。したがって, 定理 3.1 より結論を得る。 □

同様にして, 定理 3.2 および文献 [2–4] の結果を使うと, 次の定理が得られる。

定理 4.2 ([28, Theorem 3.1]). S, $\{r_n\}$, $\{\alpha_n\}$, T_{r_n} および J^{-1} は, 定理 3.1 と同じとし, $F(S) = \hat{F}(S)$, $\inf_n r_n > 0$, $\limsup_n \alpha_n < 1$ および $\mathrm{EP}(f) \cap F(S) \neq \emptyset$ を仮定する。x

[*2] 実はこのとき, A_f は極大単調作用素であり, $(A_f)^{-1} 0 = \{z \in E : 0 \in A_f z\} = \mathrm{EP}(f)$ である。$(J + r_n A_f)^{-1} J$ は A_f のリゾルベント (resolvent) と呼ばれる。

を E の任意の点とし, C の点列 $\{x_n\}$ を, $C_1 = C$ および各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} x_n = Q_{C_n}(x); \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \phi\left(z, T_{r_n}J^{-1}(\alpha_n Jx_n + (1-\alpha_n)JSx_n)\right) \leq \phi(z, x_n)\} \end{cases}$$

で定義する。このとき, $\{x_n\}$ は $Q_{\mathrm{EP}(f)\cap F(S)}(x)$ に強収束する。

参考文献

[1] Y. I. Alber, *Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications*, Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 178, Dekker, New York, 1996, pp. 15–50.

[2] K. Aoyama, *Asymptotic fixed points of sequences of quasi-nonexpansive type mappings*, Proceedings of the 3rd International Symposium on Banach and Function Spaces, to appear.

[3] K. Aoyama, Y. Kimura, and W. Takahashi, *Maximal monotone operators and maximal monotone functions for equilibrium problems*, J. Convex Anal. **15** (2008), 395–409.

[4] K. Aoyama, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Strong convergence theorems by shrinking and hybrid projection methods for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Nonlinear analysis and convex analysis, Yokohama Publ., Yokohama, 2009, pp. 7–26.

[5] ———, *Strongly relatively nonexpansive sequences in Banach spaces and applications*, Journal of Fixed Point Theory and Applications **5** (2009), 201–225.

[6] ———, *Shrinking projection methods for firmly nonexpansive mappings*, Nonlinear Anal. **71** (2009), e1626–e1632.

[7] ———, *Three generalizations of firmly nonexpansive mappings: their relations and continuity properties*, J. Nonlinear Convex Anal. **10** (2009), 131–147.

[8] ———, *Strong convergence theorems for a family of mappings of type (P) and applications*, Nonlinear Analysis and Optimization, Yokohama Publ., Yokohama, 2009, pp. 1–17.

[9] K. Aoyama and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for a family of rel-*

atively nonexpansive mappings in Banach spaces, Fixed Point Theory **8** (2007), 143–160.

[10] 青山耕治, 高橋渉, 『不動点問題と均衡問題の共通解への収束定理』, 非線形解析学と凸解析学の研究, 京都大学数理解析研究所講究録 **1544** (2007), 40–48.

[11] E. Blum and W. Oettli, *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, Math. Student **63** (1994), 123–145.

[12] D. Butnariu, S. Reich, and A. J. Zaslavski, *Asymptotic behavior of relatively nonexpansive operators in Banach spaces*, J. Appl. Anal. **7** (2001), 151–174.

[13] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945 (electronic) (2003).

[14] S. Kamimura, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for maximal monotone operators in a Banach space*, Set-Valued Anal. **12** (2004), 417–429.

[15] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Strong convergence of an iterative sequence for maximal monotone operators in a Banach space*, Abstr. Appl. Anal. (2004), 239–249.

[16] ———, *Block iterative methods for a finite family of relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2007), Art. ID 21972, 18.

[17] ———, *Approximating common fixed points of countable families of strongly nonexpansive mappings*, Nonlinear Stud. **14** (2007), 219–234.

[18] S. Matsushita and W. Takahashi, *Weak and strong convergence theorems for relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Fixed Point Theory Appl. (2004), 37–47.

[19] ———, *An iterative algorithm for relatively nonexpansive mappings by a hybrid method and applications*, Nonlinear analysis and convex analysis, Yokohama Publ., Yokohama, 2004, pp. 305–313.

[20] ———, *A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Approx. Theory **134** (2005), 257–266.

[21] K. Nakajo and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups*, J. Math. Anal. Appl. **279** (2003), 372–379.

[22] S. Ohsawa and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for resolvents of max-*

imal monotone operators in Banach spaces, Arch. Math. (Basel) **81** (2003), 439–445.

[23] S. Reich, *A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distances*, Theory and applications of nonlinear operators of accretive and monotone type, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 178, Dekker, New York, 1996, pp. 313–318.

[24] M. V. Solodov and B. F. Svaiter, *Forcing strong convergence of proximal point iterations in a Hilbert space*, Math. Program. **87** (2000), 189–202.

[25] W. Takahashi, *Nonlinear functional analysis*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[26] ______, *Convex Analysis and Approximation of Fixed Points*, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000 (Japanese).

[27] W. Takahashi, Y. Takeuchi, and R. Kubota, *Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), 276–286.

[28] W. Takahashi and K. Zembayashi, *Strong convergence theorem by a new hybrid method for equilibrium problems and relatively nonexpansive mappings*, Fixed Point Theory Appl. (2008), Art. ID 528476, 11.

[29] ______, *Strong and weak convergence theorems for equilibrium problems and relatively nonexpansive mappings in Banach spaces*, Nonlinear Anal. **70** (2009), 45–57.

[30] C. Zălinescu, *On uniformly convex functions*, J. Math. Anal. Appl. **95** (1983), 344–374.