数理解析研究所講究録
第1819巻 2012年 111-124

菅野積分に関する最近の話題

Recent topics on Sugeno integral

桐朋学園, 東京工業大学・総理工　成川康男 (Yasuo NARUKAWA)

Toho Gakuen, Dept. Comp. Intell. & Syst. Sci., Tokyo Inst. Tech.

1 はじめに

菅野 [24] が彼の学位論文で用いて以来、非加法的測度 (ファジィ測度) と菅野積分は多くの工学的応用を持ち世界中で研究がなされてきた。菅野積分の応用に関しては [10, 25, 26] などを参照されたい。

菅野積分は非積分関数や非加法的測度の値の大小のみによって決まり、古典的な確率論の拡張になっていない。

一方、1950年代にChoquetが容量の理論 [4] の中で用い、1970年代から非加法的測度として意識されてきた [6] Choquet積分は測度が (σ) 加法性をもつ時に、古典的な積分と一致することもあり、数学的な研究が進み、その成果はDennebergのモノグラフ [7] などによって紹介されている。

菅野積分の数学的研究は2000年ごろまでは論文数も多いとはいえない状態が続いたが、最近になりスロバキアのMesiarのグループを中心にして、菅野積分で成り立つ不等式の研究がなされ、盛んにその成果が発表されている。また、ルクセンブルクのMarichalのグループが束の値をとる菅野積分に関して多くの論文を発表している。

本稿では、多くの論文からなるこれらの研究を統一した視点で整理し、今後の研究の方向性を探るための一助とすることを目的とする。

2 Preliminaries

はじめにこの章では、本論分で用いられる基本的な定義、定理を紹介する。

定義 2.1. X を全体集合とし、$\mathcal{X}$ は 2^X の部分集合とする。$(X, \mathcal{X})$ をファジィ可測空間と呼ぶことにする。また、関数 $f: X \to \mathbb{R}^+$ が $\mathcal{X}$-可測であるとは、$\{x | f(x) \geq a\} \in \mathcal{X}$ であるときをいう。

定義 2.2. [6] 2つの $\mathcal{X}$ 可測な関数 f と g が共単調 (comonotonic) であるとは, 任意の $x, y \in X$ に対して $f(x) < f(y) \Rightarrow g(x) \leq g(y)$ が成り立つことをいう。

定義 2.3. [24] $(X, \mathcal{X})$ をファジィ可測空間とする。次の性質を満たす実数値集合関数 $\mu : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ を $(X, \mathcal{X})$ 上のファジィ測度 μ という。

(1) $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(X) = k$ ここで、 $k \in (0, \infty]$

(2) $A \subset B$, $A, B \in \mathcal{X}$ のとき $\mu(A) \leq \mu(B)$

(3) $A_n \uparrow A$ であるとき、 $\mu(A_n) \uparrow \mu(A)$

μ を $(X, \mathcal{X})$ 上のファジィ測度 μ とするとき、$(X, \mathcal{X}, \mu)$ をファジィ測度空間　という。

定義 2.3(3) の性質を下からの連続性という。

次に、ファジィ測度に関する積分として、菅野積分を定義しよう。

定義 2.4. *[4, 13, 24]* $(X, \mathcal{X}, \mu)$ をファジィ測度空間とし、f を $\mathcal{X}$-可測関数とし、$\mu_f(r) = \mu(\{x | f(x) \geq r\})$ とおく。f の μ に関する菅野積分は

$$(S) \int f d\mu := \sup_{r \in [0,k]} [r \wedge \mu_f(r)]$$

で定義される。

定義 2.5. [6] 2つの $\mathcal{X}$ 可測な関数 f と g が共単調 (comonotonic) であるとは, 任意の $x, y \in X$ に対して $f(x) < f(y) \Rightarrow g(x) \leq g(y)$ が成り立つことをいう。

可測関数 f, g は共単調とする。任意の $a, b \in [0,1]$ に対して $\{x|f(x) \geq a\} \subset \{x|g(x) \geq b\}$ または $\{x|f(x) \geq a\} \supset \{x|g(x) \geq b\}$ であるので、

$$(f \oplus g)(x) := \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}$$

とかける。ここで $a_i \geq 0$ $A_1 \supset A_2 \supset \ldots A_n$,$A_i \in \mathcal{X}$ である。このことを使って、以下の定理が得られる。

定理 2.6. $(X, \mathcal{X}, m)$ をファジィ測度空間とし、可測関数 f, g は共単調とするとき,

$$(S) \int (f \vee g) dm = (S) \int f dm \vee (S) \int g dm$$

が成り立つ。

上の性質を菅野積分の共単調 maxitivity という。

3 菅野積分の不等式

菅野積分に関して様々な不等式の研究は Roman-Flores [18, 19, 20, 8] らの研究から盛んになり始め、最近 Mesiar,Ouyang[1, 2, 12, 14, 15, 16, 17] らのグループが活発に論文を発表している。ここでは、その研究の概要を紹介する。

ここで、$(X, \mathcal{X}, \mu)$ をファジィ測度空間とし、f を $\mathcal{X}$-可測関数とし、$A \in \mathcal{X}$ とする。ここで、$F_r(f) = \{x|f(x) > r\}$ $F_{\bar{r}}(f) = \{x|f(x) \geq r\}$

とおく。菅野積分は、菅野の博士論文 [24] では前章の $k = 1$, すなわち $\mu(X) = 1$, $f : X \to [0,1]$ を仮定されていた。

これを、$(S_1) \int_A f d\mu$ とかく。

すなわち

$$(S_1)\int_A f d\mu = \sup_{r\in[0,1]}[r \wedge \mu(F_r(f)\cap A)]$$

である。

また、後に Ralescu [22] らはこれを、$\mu(X)=\infty$, $f: X \to [0,\infty)$ に拡張した。

これを、$(S_\infty)\int_A f d\mu$ とかく。

すなわち

$$(S_\infty)\int_A f d\mu := \sup_{r\in[0,\infty]}[r \wedge \mu(F_r(f)\cap A)]$$

である。

Roman-Flores ら [20] は以下の Jensen 型の不等式を証明した。

定理 3.1. $(S_\infty)\int f d\mu = p$ とおく。

$\varphi : [0,\infty] \to [0,\infty]$ は狭義単調増加で $\varphi(x) \le x$ *for* $x \in [0,p]$ とする。このとき

$$\varphi((S_\infty)\int_A f d\mu) \le (S_\infty)\int_A \varphi(f) d\mu.$$

[20] ではこの逆のタイプも位相空間上で考察されている。

Caballero ら [3] は、確率・統計におけるチェビシェフの不等式に類似のものが成り立つことを示した。

定理 3.2. $\mu : \mathcal{X} \to [0,1]$, $0 < c \le 1$, $f : X \to [0,\infty)$ とするとき、

$$\mu(x \in A | f(x) \ge c) \le \frac{1}{c^2}(S_\infty)\int_A f^2 d\mu.$$

また、$g : [0,\infty) \to [0,1], g(x) \ne 0$ とするとき、

$$\mu(x \in A | f(x) \ge c) \le \frac{1}{g(c)}(S_\infty)\int_A g \circ f d\mu.$$

for $A \in \mathcal{X}$.

f, g が共単調であるとき以下の定理が成り立つ。

定理 3.3. $\mu : \mathcal{X} \to [0,1]$, $0 < c \leq 1$, $f, g : X \to [0, \infty)$ *comonotonic* とするとき、

$$\mu(x \in A | f(x) \wedge g(x) \geq c) \leq \frac{1}{c^2} \max\{(S_\infty) \int_A f d\mu, (S_\infty) \int_A g d\mu\}.$$

$$\mu(x \in A | f(x) + g(x) \geq c) \leq \frac{2}{c^2} \max\{(S_\infty) \int_A f d\mu, (S_\infty) \int_A g d\mu\}.$$

A. Flores-FranuliČ[9] らは以下の Markov 型の不等式を示した。

定理 3.4.

(1) $\mu : \mathcal{X} \to [0, \infty]$, $0 < c$, $f : X \to [0, \infty)$ とするとき、

$$c \wedge \mu(x \in A | f(x) \geq c) \leq (S_\infty) \int_A f d\mu.$$

(2) $\mu : \mathcal{X} \to [0,1]$, $0 < c \leq 1$, $f : X \to [0, \infty)$ とするとき、

$$\mu(x \in A | f(x) \geq c) \leq \frac{1}{c} (S_\infty) \int_A f d\mu.$$

Roman-Flores ら [18] は $X = R^n$, $\mathcal{X}$ はボレル集合とした空間でいくつかの不等式を示している。

$A, B \subset R^n$ と $\lambda > 0$ に対して $A + B := \{a + b | a \in A, b \in B\}$, $\lambda A = \{\lambda a | a \in A, b \in B\}$ とする。

ここで、$\mathcal{X}$ 上の非加法的測度 μ が concave であるとは

$K, L \in \mathcal{X}$ convex, $(1-\lambda)K + \lambda L \in \mathcal{X}$, $0 < \lambda < 1$ とするとき、

$$\mu((1-\lambda)K + \lambda L) \geq (1-\lambda)\mu(K) + \lambda\mu(L)$$

が成り立つときをいう。

μ が quasi concave であるとは

$$\mu((1-\lambda)K + \lambda L) \geq \mu(K) \wedge \mu(L)$$

が成り立つことをいう。

定理 3.5. $0 < \lambda < 1$ f, g, h $h((1-\lambda)x + \lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda}$ $F_{\bar{r}}(f), F_{\bar{r}}(g), F_{\bar{r}}(h)$ が凸集合

(1) *(Prekopa-Leindler inequality)* μ が *concave* であるとき

$$(S_\infty)\int hd\mu \geq (S_\infty)\int fd\mu \wedge (S_\infty)\int gd\mu.$$

(2) f, g, h *integrable* で μ *quasiconcave* のとき、

$$(S_\infty)\int hd\mu \geq (S_\infty)\int fd\mu \wedge (S_\infty)\int gd\mu.$$

f と g が共単調であるときに限定しているものでもっとも一般的なものは Wu[21] らによるものである。

ここで、$\star : [0,\infty]^2 \to [0,\infty]$ を 2 項演算で連続、両側で非減少、下から最大値まで有界であるとする。

定理 3.6. $\varphi_i : [0,\infty] \to [0,\infty], i = 1, 2, 3,$ は連続で狭義単調増加で $\varphi_1 \geq \varphi_i$ を満たすものとする。また f と g は共単調とする。

このとき、

$$\varphi_1^{-1}((S_\infty)\int_A \varphi_1(f \star g)d\mu) \leq \varphi_2^{-1}((S_\infty)\int_A \varphi_2(f)d\mu) \star \varphi_3^{-1}((S_\infty)\int_A \varphi_3(g)d\mu)$$

この定理の系として、Hölder 型の不等式が得られる。

系 3.7. *[21]* $f :$ と g は共単調のとき、

$$(S_1)\int_A (f \star g)d\mu \leq ((S_1)\int_A f^p d\mu)^{1/p} \star (S_1)\int_A g^p d\mu)^{1/q}$$

ここで $p, q \geq 1$.

これにおいて $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$ としたものが Agahi ら [2] の結果である。

系 3.8. $f :$ と g は共単調のとき、

$$\varphi^{-1}((S_\infty)\int_A \varphi(f \star g)d\mu) \leq \varphi^{-1}((S_\infty)\int_A \varphi(f)d\mu) \star \varphi^{-1}((S_\infty)\int_A \varphi(g)d\mu)$$

さらに $\varphi(x) = x^s$ としたものが Agahi ら [1] の結果である Minkowski 型の不等式である。

系 3.9. f : と g は共単調のとき、

$$((S_\infty)\int_A \varphi(f \star g)^s d\mu)^{1/s} \leq ((S_\infty)\int_A (f)^s d\mu)^{1/s} \star ((S_\infty)\int_A (g)^s d\mu)^{1/s}$$

$\varphi(x) = x$ としたものが Mesiar[12] の結果である Chebishev 型の不等式である。

系 3.10. f : と g は共単調のとき、

$$((S_\infty)\int_A \varphi(f \star g) d\mu) \leq ((S_\infty)\int_A (f)^s d\mu) \star ((S_\infty)\int_A (g)^s d\mu)$$

拡張された菅野積分についての不等式の研究もなされている。[15] においては、菅野積分の乗法の部分を T-ノルムの拡張である Seminorm としたときのチェビシェフ型の不等式を扱っている。

4 Latticeの値をとる菅野積分

菅野積分は順序だけで定義されているため、束の上に自然に拡張できる、ここでは Rico[23] Marichal ら [5, 11] の成果を中心に束上の菅野積分とその表現について紹介する。

はじめに L を束として 0 をその最小元, 1 をその最大元とする。

L が Distributive であるとは $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

L が Complemented であるとは任意の $a \in L$ に対して $a' \in L$ が存在し $a \wedge a' = 0, a \vee a' = 1$ が成り立つことをいう。

ここで Boolean Lattice とは Distributive で Complemented であるものをいう。

定義 4.1. *Boolkean Lattice* L に対して $p \in L$ が $\vee$*−irreducible* であるとは $p \neq 0, p = x \vee y \Rightarrow p = x$ *or* $p = y$ が成り立つことをいう。

$N \subset L, a \in L$ として、$a = \bigvee_{p \in N} p$ が *irredundant* であるとは、任意の $p_0 \in N$ に対して $\bigvee_{p \in N \setminus p_0} p < a$ が成り立つことをいう。

もし、$\bigvee_{p\in N\setminus p_0} p = a$ のとき、p_0 は *superfluous* という。

$a \in L$ が *atom* とは $a \neq 0, e \leq a \Rightarrow e = 0$ *or* $e = a$ であることをいう。

有限ブール代数 L に対してはある有限集合 X が存在し L と $\mathcal{P}(X)$ は同型である。

$X := \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ を有限集合とし $\mathcal{F} := \{f | f : X \to L\}$ とおく。ここで $A \subset X$ として定義関数を $1_A(x) = 1$ if $x \in A$, $1_A(x) = 0$ if $x \notin A$, とする。

L 値非加法的測度は下のように定義される。

定義 4.2. $\mu : \mathcal{P}(X) \to L$ が L 値非加法的測度とは $\mu(\emptyset) = 0, \mu(X) = 1,\ A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ を満たすものをいう。

L 値非加法的測度 μ に関する菅野積分 S_μ は以下のように定義される。

定義 4.3. 関数 $f : X \to L$ に対して L 値菅野積分 $S_\mu(f)$ を

$$S_\mu(f) = \bigvee_{r\in L} (r \wedge \mu(f \geq r))$$

定義する。

この定義から

$$S_\mu(f) = \bigvee_{J\subset L} ((\bigwedge_{x_i\in J} f(x_i)) \wedge \mu(J))$$

と表されることは明らかである。この Marichal らのグループはこちらを菅野積分の定義としている [5, 11] 。

共単調性に該当するのが下の co-include という概念である。

定義 4.4. $f, g \in \mathcal{F}$ が *co-include* であるとは任意の α に対して $\{f \geq \alpha\} \subset \{g \geq \alpha\}$, $\{g \geq \alpha\} \subset \{f \geq \alpha\}$ のどちらかが必ず成り立つことである。

このとき下の命題が成り立つ。

命題 4.5. f, g が *co-include* とすると,

$$S_\mu(f \vee g) = S_\mu(f) \vee S_\mu(g)$$

$$S_\mu(f \wedge g) = S_\mu(f) \wedge S_\mu(g)$$

が成り立つ。

これにより、以下の汎関数の表現定理が成り立つ。

定理 4.6. $I : \mathcal{F} \to L$ について、次の条件がすべて満たされるときある L 値非加法的測度 μ が存在し $I(f) = S_\mu(f)$.

(1) $I(\alpha \wedge 1_X) = \alpha$

(2) $I(\alpha \wedge f) = \alpha \wedge I(f)$

(3) f, g が *co-included* であるとき $I(f \vee g) = I(f) \vee I(g)$.

Marichal らは Lattice Polynomial Function を考察し、これが菅野積分であるための必要十分条件についての結果を得ている。

ここでは、$X := [n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ $\mathcal{F} := L^n := \{f : [n] \to L\}$ とおき Lattice Polynomial の集合 $LP = \{I : L^n \to L\}$ を, 以下のように定義する。

(1) 射影 $pr_i(f) = f(x_i)$for all $i = 1, 2, \ldots n$ と定数 $c(f) = c$ は LP の要素, すなわち $pr_i, c \in LP$ for all i.

(2) $f, g \in LP \Rightarrow f \vee g, f \wedge g \in LP$.

(3) 上の 2 つの方法で得られるものだけが LP の要素である。

表現定理のためにいくつかの概念を定義する。

定義 4.7. $I \in LP$ とする。

(1) $S \subset L$ *convex if for every* $a, b \in S$ *every* $c \in L$ *such that* $a \leq c \leq b$, *wehave* $c \in S$.

(2) $I : L^n \to L$, $n > 1$ *has a componentwise convex range if, for every* $a \in L^n$ *and every* $k \in [n]$, *the unary function* $I_k^a : L \to L$, *given by* $I_k^a(x) := f(a_k^x)$*has a convex range.*

(3) $S \subset L$ として I が *S-idempotent* であるとは $I(c, c, \ldots, c) = c$ *for all* $c \in S$ であることをいう。

(4) I が *idempotent* であるとは I が *L-idempotent* であるときをいう。

(5) I が *strongly idempotent* であるとは $I(x_1, \ldots, x_{k-1}, I(x), x_{k+1} \ldots, x_n) = I(x)$ が *L-idempotent* であるときをいう。

(6) I が $P_{\wedge S}$ *homogeneous* であるとは $I(c \wedge x) = c \wedge I(x)$ *for* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in L^n, c \in S, c \wedge x := (c \wedge x_1, \ldots c \wedge x_n)$

(7) I が $\vee S$ *homogeneous* であるとは $I(c \vee x) = c \vee I(x)$ *for* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in L^n, c \in S, c \vee x := (c \vee x_1, \ldots c \vee x_n)$

(8) $x = (x_1, \ldots, x_n) \in L^n$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $c \in L$ に対して $x_k^c := (x_1, \ldots x_{k-1}, c, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ とおく。

(9) $x_1, x_2, x_3 \in L$ に対して $med(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_3)$ と定義する。

(10) $I \in LP$ が *median decomposable* とは $I(x) = med(I(x_k^0), x_k, I(x_k^1))$ *for all* $k = 1, 2, \ldots, n.$ が成り立つことである。

(11) 性質 $P_{\wedge S}$ (Iが *componentwise* $\wedge$*homomorphism*)

$I(x_k^{a \wedge b}) = I(x_k^a) \wedge I(x_k^b)$

(12) 性質 $P_\vee$ 　(Iが *componentwise* $\vee$*homomorphism)*

$I(x_k^{a\vee b}) = I(x_k^a) \vee I(x_k^b)$

(13) $I \in LP$ が *horizontally* $\wedge_S$*-decomposable if, for every* $x \in L^n$ *every* $c \in S$,

$$f(x) = f(x \vee c) \wedge f([x]^c),$$

ここで $[x]_c$ は *the n-tuple* で i番目の *component* が $xi \geq c$ のとき 1, その他のとき xi であるようなものである。

(14) $I \in LP$ が *horizontally* $\vee_S$*-decomposable* であるとは、全ての $x \in L^n$ と全ての $c \in S$ について,

$$f(x) = f(x \wedge c) \vee f([x]_c)$$

が成り立つことをいう。ここで $[x]_c$ は *the n-tuple* で i番目の *component* が $xi < c$ のとき *0*, その他のとき xi であるようなものである。

これにより、LP が菅野積分であるための必要十分条件が得られる。

定理 4.8. *[5, 11] Let* $I \in LP$. 次の条件は同値。

(1) I は菅野積分

(2) I は $\{0,1\}$*-idempotent* で *median decomposable.*

(3) I は $P_\wedge$ と $P_\vee$ を満たし, *strongly idempotent* で *range* L 　が *a componentwise convex range.*

(4) I は *non decreasing,* $\wedge_L$ *-homogeneous* 　で $\vee_L$*-homogeneous.*

(5) I は $P_\vee$ を満たし, *1-idempotent,* $\wedge L$ *-homogeneous* で *horizontally* $\vee L$ *-decomposable.*

(6) I は $P_\vee$ を満たし, *0-idempotent, horizontally* $\wedge L$ *-decomposable* で $\vee L$ *-homogeneous.*

(7) I は $P_\wedge$ と $P_\vee$ を満たし *L-idempotent, horizontally* $\wedge$ *L -decomposable* で *horizontally* $\vee$ *L -decomposable.*

References

[1] H.Agahi, R.Mesiar, Y.Ouyang, General Minkowski type inequalities for Sugeno integrals, Fuzzy Sets and Systems 161 (2010) 708-715.

[2] H.Agahi, R.Mesiar, Y.Ouyang, New general extensions of Chebyshev type inequalities for Sugeno integrals, International Journal of Approximate Reasoning 51 (2009) 135-140.

[3] J. Caballero, K. Sadarangani, Chebyshev inequality for Sugeno integrals, Fuzzy Sets and Systems, 161, (2010), 1480-1487.

[4] G.Choquet, Theory of capacities, Ann. Inst. Fourier, 5, (1953/54) 131-295.

[5] M.Couceiro, J.-L. Marichal, Characterizations of discrete Sugeno integrals as polynomial functions over distributive lattices, Fuzzy Sets and Systems, 161, (2010), 694-707.

[6] C. Dellacherie, Quelques commentaires sur les prolongements de capacités, Séminaire de Probabilités 1969/1970, Strasbourg, Lecture Notes in Mathematics, 191, (1971) 77-81.

[7] D. Denneberg, *Non Additive Measure and Integral,* Dordorecht:Kluwer Academic Publishers. (1994)

[8] A.Flores-Franulič, H.Roman-Flores, A Chebyshev type inequality for fuzzy integrals, Applied Mathematics and Computation 190 (2007) 1178-1184.

[9] A. Flores-Franulič, H. Roman-Flores, Y. Chalco-Cano, Markov type inequalities for fuzzy integrals Original Research Article Applied Mathematics and Computation, Volume 207, Issue 1, 1 January 2009, Pages 242-247

[10] M.Grabisch, T. Murofushi, M. Sugeno, (eds.) Fuzzy Measures and Integrals: Theory and Applications, Physica-Verlag (2000).

[11] J.-L. Marichal, Weighted lattice polynomials, Discrete Mathematics, 309, (2009), 814-820.

[12] R.Mesiar, Y.Ouyang, General Chebyshev type inequalities for Sugeno integrals, Fuzzy Sets and Systems, 160(2009)58-64.

[13] T. Murofushi, M. Sugeno, An interpretation of fuzzy measures and the Choquet integral as an integral with respect to a fuzzy measure, Fuzzy Sets and Systems, 29, (1989), 201-227.

[14] Y.Ouyang, J.Fang, L.Wang, Fuzzy Chebyshev type inequality, International Journal of Approximate Reasoning 48(2008)829-835.

[15] Y.Ouyang, R.Mesiar, On the Chebyshev type inequality for seminormed fuzzy integral, Applied Mathematics Letters 22(2009)1810-1815.

[16] Y.Ouyang, R.Mesiar, H.Agahi, An inequality related to Minkowski type for Sugeno integrals, Information Sciences 180 (2010) 2793-2801.

[17] Y.Ouyang, R.Mesiar, J.Li, On the comonotonic-$\star$-property for Sugeno integral, Applied Mathematics and Computation, 211 (2009) 450-458.

[18] H. Roman-Flores, Y. Chalco-Cano, Sugeno integral and geometric inequalities, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems. 15 (2007) 1-11

[19] .H. Roman-Flores, A. Flores-Franulič, Y. Chalco-Cano, The fuzzy integral for monotone functions, Applied Mathematics and Computation 185 (2007) 492-498.

[20] H. Roman-Flores, A. Flores-Franulič, Y. Chalco-Cano, A Jensen type inequality for fuzzy integrals, Information Sciences 177 (2007) 3192-3201.

[21] L. Wu, J. Sun, X. Ye, L. Zhu, Hölder type inequality for Sugeno integral, Fuzzy Sets and Systems, 161, (2010), 2337-2347

[22] D. Ralescu, G. Adams, The fuzzy integral, Journal of Mathematical Analysis and Applications 75 (1980) 562-570

[23] A.Rico, Sugeno integral in a finite Boolean algebra, Fuzzy Sets and Systems, 159, (2008), 1709-1718

[24] M.Sugeno, Theory of fuzzy integrals and its applications, Ph. D. Dissertation, Tokyo Institute of Technology, Tokyo, Japan, 1974.

[25] V.Torra, Y. Narukawa, Modeling decisions: information fusion and aggregation operators, Springer, 2007.

[26] Z. Wang, G. J. Klir, *Fuzzy Measure Theory*, New York: Plenum, 1992.