数理解析研究所講究録
第 1819 巻 2012 年 171-182

Wigner-Yanase-Dyson skew information の一般化と関連する trace 不等式について (Generalization of Wigner-Yanase-Dyson skew information and related trace inequality)

柳　研二郎 (山口大学大学院理工学研究科)
Kenjiro Yanagi(Yamaguchi University)
田中　義晃 (山口大学大学院理工学研究科)
Yoshiaki Tanaka(Yamaguchi University)

1 はじめに

Wigner-Yanase skew information は [12] で次のように定義された.

$$\begin{aligned} I_{\rho}(H) &= \frac{1}{2}Tr\left[\left(i\left[\rho^{1/2}, H\right]\right)^{2}\right] \\ &= Tr[\rho H^{2}] - Tr[\rho^{1/2}H\rho^{1/2}H] \end{aligned}$$

この量はある量子状態 ρ とある観測量 H の間の非可換性をあらわすある種の degree として考えられている. ここで $[X,Y]=XY-YX$ は commutator をあらわす. またこれは Dyson によって次のように拡張され Wigner-Yanase-Dyson skew information と呼ばれている.

$$\begin{aligned} & I_{\rho,\alpha}(H) \\ = \ & \frac{1}{2}Tr[(i[\rho^{\alpha}, H])(i[\rho^{1-\alpha}, H])] \\ = \ & Tr[\rho H^{2}] - Tr[\rho^{\alpha}H\rho^{1-\alpha}H], \alpha \in [0,1]. \end{aligned}$$

ρ に関して $I_{\rho,\alpha}(H)$ は convex であることは E.H.Lieb in [9] によって証明されたことはよく知られている. 量子力学的には観測量 H は一般的には非有界作用素であるがこの論文では断らない限り $\mathbb{C}^{n}$ 上の有界線形作用素すなわち行列であると仮定する. この理由は数学的興味のためである. $\mathbb{C}^{n}$ 上のエルミート行列全体を $M_{n,sa}$, 密度行

列 (density matrices) 全体を $D_{n,1}$ とそれぞれあらわすものとする. Wigner-Yanase skew information と uncertainty relation の関係は [11] で研究されている. さらに Wigner-Yanase-Dyson skew information と uncertainty relation との関係は [7, 13] で研究されている. 我々は [13] で一般化された skew information を新たに定義し, ある種の uncertainty relation を導いた. また [14] では Luo [10] の結果の一般化を与えた. 第2章では Wigner-Yanase-Dyson skew information の様々な性質を議論する. 第3章と第4章で主として2種類の定理を述べその証明を与える.

2 Wigner-Yanase-Dyson skew information に関する不確定性関係

Wigner-Yanase skew information と uncertainty relation の間の関係を見ることにする. 量子力学の system においては量子状態 ρ における物理量 H を観測したときの期待値は $Tr[\rho H]$ であらわされる. また分散は次で定義される.

$$V_\rho(H) = Tr[\rho(H - Tr[\rho H]I)^2] = Tr[\rho H^2] - Tr[\rho H]^2.$$

ここで量子状態 ρ と2つの物理量 A, B に対して次の不等式が成り立つことが知られている.

$$V_\rho(A)V_\rho(B) \geq \frac{1}{4}|Tr[\rho[A, B]]|^2 \tag{1}$$

さらにより強い結果として Schrödinger によって次のように与えられた.

$$V_\rho(A)V_\rho(B) - |Cov_\rho(A, B)|^2 \geq \frac{1}{4}|Tr[\rho[A, B]]|^2,$$

ただし covariance は次で定義される;

$$Cov_\rho(A, B) = Tr[\rho(A - Tr[\rho A]I)(B - Tr[\rho B]I)].$$

しかし Wigner-Yanase skew information に対する次のような uncertainty relation については成り立たないことが知られている. ([11, 7, 13] を見よ)

$$I_\rho(A)I_\rho(B) \geq \frac{1}{4}|Tr[\rho[A, B]]|^2.$$

最近 S.Luo は classical mixture を排除した量子的不確定性をあらわす次のような量 $U_\rho(H)$ を導入した.

$$U_\rho(H) = \sqrt{V_\rho(H)^2 - (V_\rho(H) - I_\rho(H))^2}, \tag{2}$$

このとき　S.Luo は [10] において $U_\rho(H)$ に関する次のような uncertainty relation を得た.

$$U_\rho(A)U_\rho(B) \geq \frac{1}{4}|Tr[\rho[A,B]]|^2. \tag{3}$$

ここで次の関係に注意する.

$$0 \leq I_\rho(H) \leq U_\rho(H) \leq V_\rho(H). \tag{4}$$

不等式 (3) は (4) の意味で不等式 (1) の精密化である. この章では不等式 (3) に対する one-parameter 拡張を考える.

Definition 2.1 $0 \leq \alpha \leq 1$ と量子状態 ρ と 物理量 H に対して *Wigner-Yanase-Dyson skew information* を次のように定義する.

$$\begin{aligned} I_{\rho,\alpha}(H) &= \frac{1}{2}Tr[(i[\rho^\alpha, H_0])(i[\rho^{1-\alpha}, H_0])] \\ &= Tr[\rho H_0^2] - Tr[\rho^\alpha H_0 \rho^{1-\alpha} H_0] \end{aligned} \tag{5}$$

また関連して次の量も定義する.

$$\begin{aligned} J_{\rho,\alpha}(H) &= \frac{1}{2}Tr[\{\rho^\alpha, H_0\}\{\rho^{1-\alpha}, H_0\}] \\ &= Tr[\rho H_0^2] + Tr[\rho^\alpha H_0 \rho^{1-\alpha} H_0], \end{aligned} \tag{6}$$

ただし $H_0 = H - Tr[\rho H]I$ であり $\{X, Y\} = XY + YX$ は *anti-commutator* をあらわす.

次の関係が成り立つことは明らかである.

$$\frac{1}{2}Tr[(i[\rho^\alpha, H_0])(i[\rho^{1-\alpha}, H_0])] = \frac{1}{2}Tr[(i[\rho^\alpha, H])(i[\rho^{1-\alpha}, H])].$$

ところが次の関係に注意する.

$$\frac{1}{2}Tr[\{\rho^\alpha, H_0\}\{\rho^{1-\alpha}, H_0\}] \neq \frac{1}{2}Tr[\{\rho^\alpha, H\}\{\rho^{1-\alpha}, H\}].$$

このとき次の関係が成り立つ.

$$I_{\rho,\alpha}(H) \leq I_\rho(H) \leq J_\rho(H) \leq J_{\rho,\alpha}(H). \tag{7}$$

なぜなら

$$Tr[\rho^{1/2} H \rho^{1/2} H] \leq Tr[\rho^\alpha H \rho^{1-\alpha} H]$$

が成り立つからである. (例えば [1, 2] を見よ)
(2) の直接の一般化として次を定義する.

$$U_{\rho,\alpha}(H) = \sqrt{V_\rho(H)^2 - (V_\rho(H) - I_{\rho,\alpha}(H))^2}, \tag{8}$$

このとき (7) の最初の不等式より次が成り立つ.

$$0 \leq I_{\rho,\alpha}(H) \leq U_{\rho,\alpha}(H) \leq U_\rho(H). \tag{9}$$

また次を定義する.

$$U_{\rho,\alpha}(H) = \sqrt{I_{\rho,\alpha}(H) J_{\rho,\alpha}(H)}.$$

このとき不等式 (4),(8),(9) より次の関係が成り立つことがわかる.

$$0 \leq I_{\rho,\alpha}(H) \leq I_\rho(H) \leq U_\rho(H)$$

かつ

$$0 \leq I_{\rho,\alpha}(H) \leq U_{\rho,\alpha}(H) \leq U_\rho(H).$$

我々の関心は不等式 (3) の直接の一般化である. そこで次の結果を得た.

Theorem 2.1 ([14]) 任意の量子状態 ρ と任意の物理量 A, B と任意の $0 \leq \alpha \leq 1$ に対して次が成り立つ.

$$U_{\rho,\alpha}(A) U_{\rho,\alpha}(B) \geq \alpha(1-\alpha) |Tr[\rho[A,B]]|^2. \tag{10}$$

Theorem 2.1 を証明するためには次の３つの Lemma を用いればよい. スペクトル分解より ρ の eigenvectors からなる orthonormal basis を $\{\phi_1, \phi_2, \dots \phi_n\}$ とする. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ を対応する eigenvalues とする. ただし $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ で $\lambda_i \geq 0$ である. したがって ρ は次の表現をもつ.

$$\rho = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|. \tag{11}$$

Lemma 2.1

$$I_{\rho,\alpha}(H) = \sum_{i<j} (\lambda_i + \lambda_j - \lambda_i^\alpha \lambda_j^{1-\alpha} - \lambda_i^{1-\alpha}\lambda_j^\alpha) |\langle\phi_i|H_0|\phi_j\rangle|^2.$$

Lemma 2.2

$$J_{\rho,\alpha}(H) \geq \sum_{i<j}(\lambda_i + \lambda_j + \lambda_i^{\alpha}\lambda_j^{1-\alpha} + \lambda_i^{1-\alpha}\lambda_j^{\alpha})|\langle\phi_i|H_0|\phi_j\rangle|^2.$$

Lemma 2.3 任意の $t > 0$ と任意の $0 \leq \alpha \leq 1$ に対して次の不等式が成り立つ;

$$(1-2\alpha)^2(t-1)^2 - (t^{\alpha} - t^{1-\alpha})^2 \geq 0. \tag{12}$$

Remark 2.1 *(10)* において $\alpha = 1/2$ とおくことにより *(3)* が得られる．したがって *Theorem 2.1* は *Luo [10]* の結果の一般化であることがわかる．

3 一般化(その1)

この section では Theorem 2.1 の一般化の 1 つとして次の不等式を与える．つまり (3) の two-parameter extension (1) である．

Definition 3.1 $\alpha, \beta \geq 0$ と量子状態 ρ と 物理量 H に対して一般化された *Wigner-Yanase-Dyson skew information* を次のように定義する．

$$\begin{aligned} I_{\rho,\alpha,\beta}(H) &= \frac{1}{2}Tr[(i[\rho^{\alpha}, H_0])(i[\rho^{\beta}, H_0])\rho^{1-\alpha-\beta}] \\ &= \frac{1}{2}\{Tr[\rho H_0^2] + Tr[\rho^{\alpha+\beta}H_0\rho^{1-\alpha-\beta}H_0]\} \\ &\quad -\frac{1}{2}\{Tr[\rho^{\alpha}H_0\rho^{1-\alpha}H_0] + Tr[\rho^{\beta}H_0\rho^{1-\beta}H_0]\} \end{aligned}$$

また関連して次の量も定義する．

$$\begin{aligned} J_{\rho,\alpha,\beta}(H) &= \frac{1}{2}Tr[\{\rho^{\alpha}, H_0\}\{\rho^{\beta}, H_0\}\rho^{1-\alpha-\beta}] \\ &= \frac{1}{2}\{Tr[\rho H_0^2] + Tr[\rho^{\alpha+\beta}H_0\rho^{1-\alpha-\beta}H_0]\} \\ &\quad +\frac{1}{2}\{Tr[\rho^{\alpha}H_0\rho^{1-\alpha}H_0] + Tr[\rho^{\beta}H_0\rho^{1-\beta}H_0]\}, \end{aligned}$$

ただし $H_0 = H - Tr[\rho H]I$ であり $\{X, Y\} = XY + YX$ は *anti-commutator* をあらわす．$\alpha + \beta = 1$ のときは $I_{\rho,\alpha}(H) = I_{\rho,\alpha,1-\alpha}(H)$, $J_{\rho,\alpha}(H) = J_{\rho,\alpha,1-\alpha}(H)$ であることに注意する．また

$$U_{\rho,\alpha,\beta}(H) = \sqrt{I_{\rho,\alpha,\beta}(H)J_{\rho,\alpha,\beta}(H)}.$$

と定義する．

Theorem 3.1 ρ が *invertible* のとき, $\alpha, \beta \geq 0$ が $\alpha+\beta \geq 1$ または $\alpha+\beta \leq \frac{1}{2}$ を満たすとき次の不等式が成り立つ.

$$U_{\rho,\alpha,\beta}(A)U_{\rho,\alpha,\beta}(B) \geq \alpha\beta|Tr[\rho[A,B]]|^2. \tag{13}$$

Theorem 3.1 の証明に必要な Lemma を述べよう. $f_\alpha(i,j) = \lambda_i^\alpha\lambda_j^{1-\alpha} + \lambda_i^{1-\alpha}\lambda_j^\alpha$ とおく. また $h_{ij} = \langle\phi_i|H_0|\phi_j\rangle, a_{ij} = \langle\phi_i|A_0|\phi_j\rangle, b_{ij} = \langle\phi_i|B_0|\phi_j\rangle$ とおく.

Lemma 3.1

$$I_{\rho,\alpha,\beta}(H) = \frac{1}{2}\sum_{i<j}\{\lambda_i + \lambda_j + f_{\alpha+\beta}(i,j) - f_\alpha(i,j) - f_\beta(i,j)\}|h_{ij}|^2.$$

Lemma 3.2

$$J_{\rho,\alpha,\beta} \geq \frac{1}{2}\sum_{i<j}\{\lambda_i + \lambda_j + f_{\alpha+\beta}(i,j) + f_\alpha(i,j) + f_\beta(i,j)\}|h_{ij}|^2.$$

Lemma 3.3 $t > 0$ とする. $\alpha, \beta \geq 0$ が $\alpha+\beta \geq 1$ または $\alpha+\beta \leq \frac{1}{2}$ を満たすとき次の不等式が成り立つ.

$$(t^{1-\alpha-\beta}+1)(t^{2\alpha}-1)(t^{2\beta}-1) \geq 16\alpha\beta(t-1)^2.$$

Proof of Theorem 3.1.

$(t^{1-\alpha-\beta}+1)^2(t^{2\alpha}-1)(t^{2\beta}-1) = (t+1+t^{\alpha+\beta}+t^{1-\alpha-\beta})^2 - (t^\alpha+t^{1-\alpha}+t^\beta+t^{1-\beta})^2$,

だから $t = \lambda_i/\lambda_j$ を代入すると次を得る.

$$\left\{\frac{\lambda_i}{\lambda_j} + 1 + \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^{\alpha+\beta} + \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^{1-\alpha-\beta}\right\}^2$$

$$-\left\{\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^{\alpha} + \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^{1-\alpha} + \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^{\beta} + \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^{1-\beta}\right\}^2$$

$$\geq 16\alpha\beta\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}-1\right)^2.$$

したがって

$$\begin{aligned}
&\{\lambda_i+\lambda_j+f_{\alpha+\beta}(i,j)-f_\alpha(i,j)-f_\beta(i,j)\}\{\lambda_i+\lambda_j+f_{\alpha+\beta}(i,j)+f_\alpha(i,j)+f_\beta(i,j)\}\\
=\ &(\lambda_i+\lambda_j+f_{\alpha+\beta}(i,j))^2-(f_\alpha(i,j)+f_\beta(i,j))^2\\
\geq\ &16\alpha\beta(\lambda_i-\lambda_j)^2. \qquad (14)
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
Tr[\rho[A,B]] &= Tr[\rho[A_0,B_0]]\\
&= 2i\mathrm{Im}Tr[\rho A_0B_0]\\
&= 2i\mathrm{Im}\sum_{i<j}(\lambda_i-\lambda_j)a_{ij}b_{ji}\\
&= 2i\sum_{i<j}(\lambda_i-\lambda_j)\mathrm{Im}a_{ij}b_{ji}
\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}
|Tr[\rho[A,B]]| &= 2|\sum_{i<j}(\lambda_i-\lambda_j)\mathrm{Im}a_{ij}b_{ji}|\\
&\leq 2\sum_{i<j}|\lambda_i-\lambda_j||\mathrm{Im}a_{ij}b_{ji}|
\end{aligned}$$

を得る．したがって

$$|Tr[\rho[A,B]]|^2\leq 4\left\{\sum_{i<j}|\lambda_i-\lambda_j||\mathrm{Im}a_{ij}b_{ji}|\right\}^2.$$

(14) と Schwarz の不等式を用いると次を得る．

$$\begin{aligned}
\alpha\beta|Tr[\rho[A,B]]|^2 &\leq 4\alpha\beta\left\{\sum_{i<j}|\lambda_i-\lambda_j||\mathrm{Im}a_{ij}b_{ji}\right\}^2\\
&= \frac{1}{4}\left\{\sum_{i<j}4\sqrt{\alpha\beta}|\lambda_i-\lambda_j||\mathrm{Im}a_{ij}b_{ji}|\right\}^2\\
&\leq \frac{1}{4}\left\{\sum_{i<j}4\sqrt{\alpha\beta}|\lambda_i-\lambda_j||a_{ij}b_{ji}|\right\}^2\\
&\leq \frac{1}{4}\left\{\sum_{i<j}\{K^2-L^2\}^{1/2}|a_{ij}||b_{ji}|\right\}^2\\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{i<j}(K-L)|a_{ij}|^2\times\frac{1}{2}\sum_{i<j}(K+L)|b_{ji}|^2,
\end{aligned}$$

ただし $K=\lambda_i+\lambda_j+f_{\alpha+\beta}(i,j), L=f_\alpha(i,j)+f_\beta(i,j)$ である. したがって

$$I_{\rho,\alpha,\beta}(A)J_{\rho,\alpha,\beta}(B)\geq\alpha\beta|Tr[\rho[A,B]]|^2$$

を得る. 同様にして

$$I_{\rho,\alpha,\beta}(B)J_{\rho,\alpha,\beta}(A)\geq\alpha\beta|Tr[\rho[A,B]]|^2$$

も得られるので目標の (13) が得られる. □

Remark 3.1 *(13) において $\alpha+\beta=1$ とおくことにより (10) が得られる. したがって Theorem 3.1 は Theorem 2.1 の結果の一般化であることがわかる. したがってこれは Luo [10] のさらなる拡張である.*

4 一般化(その2)

この section では Theorem 2.1 の一般化の 2 つ目として次の不等式を与える. つまり (3) の two-parameter extension (2) である.

Definition 4.1 *$\alpha,\beta\geq 0$ と量子状態 ρ と 物理量 H に対して一般化された Wigner-Yanase-Dyson skew information (2) を次のように定義する.*

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{\rho,\alpha,\beta}(H) &= \frac{1}{2}Tr[(i[\rho^\alpha,H_0])(i[\rho^\beta,H_0])]\\ &= Tr[\rho^{\alpha+\beta}H_0^2]-Tr[\rho^\alpha H_0\rho^\beta H_0]\end{aligned}$$

また関連して次の量も定義する.

$$\begin{aligned}\tilde{J}_{\rho,\alpha,\beta}(H) &= \frac{1}{2}Tr[\{\rho^\alpha,H_0\}\{\rho^\beta,H_0\}]\\ &= Tr[\rho^{\alpha+\beta}H_0^2]+Tr[\rho^\alpha H_0\rho^\beta H_0]\end{aligned}$$

ただし $H_0=H-Tr[\rho H]I$ であり $\{X,Y\}=XY+YX$ は anti-commutator をあらわす. $\alpha+\beta=1$ のときは $I_{\rho,\alpha}(H)=\tilde{I}_{\rho,\alpha,1-\alpha}(H)$, $J_{\rho,\alpha}(H)=\tilde{J}_{\rho,\alpha,1-\alpha}(H)$ であることに注意する. また

$$\tilde{U}_{\rho,\alpha,\beta}(H)=\sqrt{\tilde{I}_{\rho,\alpha,\beta}(H)\tilde{J}_{\rho,\alpha,\beta}(H)}.$$

と定義する.

Theorem 4.1 *ρ が invertible のとき, $\alpha,\beta\geq 0$ に対して次の不等式が成り立つ.*

$$\tilde{U}_{\rho,\alpha,\beta}(A)\tilde{U}_{\rho,\alpha,\beta}(B)\geq\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}|Tr[\rho^{\alpha+\beta}[A,B]]|^2. \tag{15}$$

Theorem 4.1 を証明するのに必要な Lemma を述べよう．前の section と同様に $h_{ij}=\langle\phi_i|H_0|\phi_j\rangle, a_{ij}=\langle\phi_i|A_0|\phi_j\rangle, b_{ij}=\langle\phi_i|B_0|\phi_j\rangle$ とおく．

Lemma 4.1

$$\begin{aligned}\tilde{I}_{\rho,\alpha,\beta}(H) &= \sum_{i<j}(\lambda_i^{\alpha+\beta}+\lambda_j^{\alpha+\beta}-\lambda_i^{\alpha}\lambda_j^{\beta}-\lambda_i^{\beta}\lambda_j^{\alpha})|h_{ij}|^2\\ &= \sum_{i<j}(\lambda_i^{\alpha}-\lambda_j^{\alpha})(\lambda_i^{\beta}-\lambda_j^{\beta})|h_{ij}|^2.\end{aligned}$$

Lemma 4.2

$$\begin{aligned}\tilde{J}_{\rho,\alpha,\beta}(H) &\geq \sum_{i<j}(\lambda_i^{\alpha+\beta}+\lambda_j^{\alpha+\beta}+\lambda_i^{\alpha}\lambda_j^{\beta}+\lambda_i^{\beta}\lambda_j^{\alpha})|h_{ij}|^2\\ &= \sum_{i<j}(\lambda_i^{\alpha}+\lambda_j^{\alpha})(\lambda_i^{\beta}+\lambda_j^{\beta})|h_{ij}|^2.\end{aligned}$$

Lemma 4.3 $t>0, \alpha, \beta\geq 0$ のとき次の不等式が成り立つ．

$$(t^{2\alpha}-1)(t^{2\beta}-1)\geq\frac{4\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}(t^{\alpha+\beta}-1)^2. \tag{16}$$

Proof of Theorem 4.1. (16) において $t=\lambda_i/\lambda_j$ とおくと

$$\left\{\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^{2\alpha}-1\right\}\left\{\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^{2\beta}-1\right\}\geq\frac{4\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}\left\{\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^{\alpha+\beta}-1\right\}^2.$$

したがって

$$(\lambda_i^{2\alpha}-\lambda_j^{2\alpha})(\lambda_i^{2\beta}-\lambda_j^{2\beta})\geq\frac{4\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}(\lambda_i^{\alpha+\beta}-\lambda_j^{\alpha+\beta})^2. \tag{17}$$

また

$$\begin{aligned}Tr[\rho^{\alpha+\beta}[A,B]] &= Tr[\rho^{\alpha+\beta}[A_0,B_0]]\\ &= 2i\mathrm{Im}Tr[\rho^{\alpha+\beta}A_0B_0]\\ &= 2i\mathrm{Im}\sum_{i<j}(\lambda_i^{\alpha+\beta}-\lambda_j^{\alpha+\beta})a_{ij}b_{ji}\\ &= 2i\sum_{i<j}(\lambda_i^{\alpha+\beta}-\lambda_j^{\alpha+\beta})\mathrm{Im}a_{ij}b_{ji}\end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}|Tr[\rho^{\alpha+\beta}[A,B]]| &= 2|\sum_{i<j}(\lambda_i^{\alpha+\beta}-\lambda_j^{\alpha+\beta})\mathrm{Im}a_{ij}b_{ji}| \\ &\leq 2\sum_{i<j}|\lambda_i^{\alpha+\beta}-\lambda_j^{\alpha+\beta}||\mathrm{Im}a_{ij}b_{ji}|\end{aligned}$$

を得る．したがって

$$|Tr[\rho^{\alpha+\beta}[A,B]]|^2 \leq 4\left\{\sum_{i<j}|\lambda_i^{\alpha+\beta}-\lambda_j^{\alpha+\beta}||\mathrm{Im}a_{ij}b_{ji}|\right\}^2.$$

(17) と Schwarz の不等式を用いると次を得る．

$$\begin{aligned}&\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}|Tr[\rho^{\alpha+\beta}[A,B]]|^2 \\ \leq\ & \frac{4\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}\left\{\sum_{i<j}|\lambda_i^{\alpha+\beta}-\lambda_j^{\alpha+\beta}||\mathrm{Im}a_{ij}b_{ji}|\right\}^2 \\ =\ & \left\{\sum_{i<j}\frac{2\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta}|\lambda_i^{\alpha+\beta}-\lambda_j^{\alpha+\beta}||\mathrm{Im}a_{ij}b_{ji}|\right\}^2 \\ \leq\ & \left\{\sum_{i<j}|\lambda_i^{2\alpha}-\lambda_j^{2\alpha}|^{1/2}|\lambda_i^{2\beta}-\lambda_j^{2\beta}|^{1/2}|a_{ij}b_{ji}|\right\}^2 \\ \leq\ & \sum_{i<j}|(\lambda_i^{\alpha}-\lambda_j^{\alpha})(\lambda_i^{\beta}-\lambda_j^{\beta})||a_{ij}|^2 \times \sum_{i<j}|(\lambda_i^{\alpha}+\lambda_j^{\alpha})(\lambda_i^{\beta}+\lambda_j^{\beta})||b_{ji}|^2.\end{aligned}$$

したがって

$$\tilde{I}_{\rho,\alpha,\beta}(A)\tilde{J}_{\rho,\alpha,\beta}(B) \geq \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}|Tr[\rho^{\alpha+\beta}[A,B]]|^2$$

を得る．同様にして

$$\tilde{I}_{\rho,\alpha,\beta}(B)\tilde{J}_{\rho,\alpha,\beta}(A) \geq \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}|Tr[\rho^{\alpha+\beta}[A,B]]|^2$$

も得られるので目標の (15) が得られる． □

Remark 4.1 *(15)* において $\alpha+\beta=1$ とおくことにより *(10)* が得られる．したがって *Theorem 4.1* は *Theorem 2.1* の結果の一般化であることがわかる．したがってこれは *Luo [10]* のさらなる拡張である．

Remark 4.2 *(10)* のさらなる拡張として *Gibilisco-Imparato-Isola ([4]), Hansen ([5])* 等によって提案された *metric adjusted skew information* や *metric adjusted correlation measure* を用いて一般化された *uncertainty relation* を導くこともできるが，ここでは紙面の関係で別の機会に述べることにする．

参考文献

[1] J.C.Bourin, *Some inequalities for norms on matrices and operators*, Linear Algebra and its Applications, vol.292(1999), pp.139-154.

[2] J.I.Fujii, *A trace inequality arising from quantum information theory*, Linear Algebra and its Applications, vol.400(2005), pp.141-146.

[3] S.Furuichi, K.Yanagi and K.Kuriyama, *Trace inequalities on a generalized Wigner-Yanase skew information*, J. Math. Anal. Appl., vol.356(2009), pp.179-185.

[4] P.Gibilisco, D.Imparato and T.Isola, *Uncertainty principle and quantum Fisher information, II*, J. Math. Phys., vol.48(2007), 072109.

[5] F.Hansen, *Metric adjusted skew information*, Proc. Nat. Acad. Sci., USA., vol.105(2008), pp.9909-9916.

[6] W.Heisenberg, *Über den anschaulichen Inhat der quantummechanischen Kinematik und Mechanik*, Zeitschrift für Physik, vol.43(1927), pp.172-198.

[7] H.Kosaki, *Matrix trace inequality related to uncertainty principle*, Internatonal Journal of Mathematics, vol.16(2005), pp.629-646.

[8] D.Li, X.Li, F.Wang, H.Huang, X.Li and L.C.Kwek, *Uncertainty relation of mixed states by means of Wigner-Yanase-Dyson information*, Physical Review A, vol.79(2009), pp.052106-1-4.

[9] E.H.Lieb, *Convex trace functions and the Wigner-Yanase-Dyson conjecture*, Adv. Math., vol.11(1973), pp.267-288.

[10] S.Luo, *Heisenberg uncertainty relation for mixed states*, Phys. Rev. A, vol.72(2005), p.042110.

[11] S.Luo and Q.Zhang, *On skew information*, IEEE Trans. Information Theory, vol.50(2004), pp.1778-1782, and *Correction to "On skew information"*, IEEE Trans. Information Theory, vol.51(2005), p.4432.

[12] E.P.Wigner and M.M.Yanase, *Information content of distribution*, Proc. Nat. Acad. Sci. U,S,A., vol.49(1963), pp.910-918.

[13] K.Yanagi, S.Furuichi and K.Kuriyama, *A generalized skew information and uncertainty relation*, IEEE Trans. Information Theory, vol.51(2005), pp.4401-4404.

[14] K.Yanagi, *Uncertainty relation on Wigner-Yanase-Dyson skew information*, J. Math. Anal. Appl., vol.365(2010), pp.12-18.

[15] K.Yanagi, *Uncertainty relation on generalizaed Wigner-Yanase-Dyson skew information*, Linear Algebra and its Applications, vol.433(2010), pp.1524-1532.