数理解析研究所講究録
第 1820 巻 2012 年 130-137

Monotone 又は anti-monotone pair skew information に関連した不確定性関係の一般化について (Generalized uncertainty relation associated with a monotone or an anti-monotone pair skew information)

柳　研二郎 (山口大学大学院理工学研究科)
Kenjiro Yanagi(Yamaguchi University)
梶原　聡 (山口大学大学院理工学研究科)
Satoshi Kajihara(Yamaguchi University)

1 はじめに

Wigner-Yanase skew information は [4] で次のように定義された.

$$I_{\rho}(H)=\frac{1}{2}Tr\left[\left(i\left[\rho^{1/2},H\right]\right)^{2}\right]=Tr[\rho H^{2}]-Tr[\rho^{1/2}H\rho^{1/2}H]$$

この量はある量子状態 ρ とある観測量 H の間の非可換性をあらわすある種の degree として考えられている. ここで $[X,Y]=XY-YX$ は commutator をあらわす. またこれは Dyson によって次のように拡張され Wigner-Yanase-Dyson skew information と呼ばれている.

$$I_{\rho,\alpha}(H)=\frac{1}{2}Tr[(i[\rho^{\alpha},H])(i[\rho^{1-\alpha},H])]=Tr[\rho H^{2}]-Tr[\rho^{\alpha}H\rho^{1-\alpha}H],\alpha\in[0,1].$$

量子力学的には観測量 H は一般的には非有界作用素であるがこの論文では断らない限り $\mathbb{C}^{n}$ 上の有界線形作用素すなわち行列であると仮定する. 我々は [5] で一般化された skew information を新たに定義し, ある種の uncertainty relation を導いた. また [6] では Luo [2] の結果の一般化を与えた. 第 2 章では Wigner-Yanase-Dyson skew information の様々な性質を議論する. 第 3 章で主として 2 種類の一般化定理を述べる. 最後に第 4 章でこれらのすべての定理を包括する定理を述べる.

2 Wigner-Yanase-Dyson skew information に関する不確定性関係

Wigner-Yanase skew information と uncertainty relation の間の関係を見ることにする. 量子力学の system においては量子状態 ρ における物理量 H を観測したときの期待値は $Tr[\rho H]$ であらわされる. また分散は次で定義される.

$$V_\rho(H) = Tr[\rho(H - Tr[\rho H]I)^2] = Tr[\rho H^2] - Tr[\rho H]^2.$$

ここで量子状態 ρ と2つの物理量 A, B に対して次の不等式が成り立つことが知られている.

$$V_\rho(A)V_\rho(B) \geq \frac{1}{4}|Tr[\rho[A,B]]|^2 \tag{1}$$

しかし Wigner-Yanase skew information に対する次のような uncertainty relation については成り立たないことが知られている. ([3, 5] を見よ)

$$I_\rho(A)I_\rho(B) \geq \frac{1}{4}|Tr[\rho[A,B]]|^2.$$

最近 S.Luo は classical mixture を排除した量子的不確定性をあらわす次のような量 $U_\rho(H)$ を導入した.

$$U_\rho(H) = \sqrt{V_\rho(H)^2 - (V_\rho(H) - I_\rho(H))^2}, \tag{2}$$

このとき S.Luo は [2] において $U_\rho(H)$ に関する次のような uncertainty relation を得た.

$$U_\rho(A)U_\rho(B) \geq \frac{1}{4}|Tr[\rho[A,B]]|^2. \tag{3}$$

ここで次の関係に注意する.

$$0 \leq I_\rho(H) \leq U_\rho(H) \leq V_\rho(H). \tag{4}$$

不等式 (3) は (4) の意味で不等式 (1) の精密化である. この章では不等式 (3) に対する one-parameter 拡張を考える.

Definition 2.1 $0 \leq \alpha \leq 1$ と量子状態 ρ と 物理量 H に対して *Wigner-Yanase-Dyson skew information* を次のように定義する.

$$I_{\rho,\alpha}(H) = \frac{1}{2}Tr[(i[\rho^\alpha, H_0])(i[\rho^{1-\alpha}, H_0])] = Tr[\rho H_0^2] - Tr[\rho^\alpha H_0 \rho^{1-\alpha} H_0]$$

また関連して次の量も定義する.

$$J_{\rho,\alpha}(H) = \frac{1}{2}Tr[\{\rho^\alpha, H_0\}\{\rho^{1-\alpha}, H_0\}] = Tr[\rho H_0^2] + Tr[\rho^\alpha H_0 \rho^{1-\alpha} H_0],$$

ただし $H_0 = H - Tr[\rho H]I$ であり $\{X, Y\} = XY + YX$ は *anti-commutator* をあらわす.

このとき次の関係が成り立つ.

$$I_{\rho,\alpha}(H) \leq I_\rho(H) \leq J_\rho(H) \leq J_{\rho,\alpha}(H). \tag{5}$$

(2) の直接の一般化として次を定義する.

$$U_{\rho,\alpha}(H) = \sqrt{V_\rho(H)^2 - (V_\rho(H) - I_{\rho,\alpha}(H))^2},$$

このとき (5) の最初の不等式より次が成り立つ.

$$0 \leq I_{\rho,\alpha}(H) \leq U_{\rho,\alpha}(H) \leq U_\rho(H).$$

我々の関心は不等式 (3) の直接の一般化である. そこで次の結果を得た.

Theorem 2.1 ([6]) 任意の量子状態 ρ と任意の物理量 A, B と任意の $0 \leq \alpha \leq 1$ に対して次が成り立つ.

$$U_{\rho,\alpha}(A)U_{\rho,\alpha}(B) \geq \alpha(1-\alpha)|Tr[\rho[A,B]]|^2. \tag{6}$$

Remark 2.1 *(6)* において $\alpha = 1/2$ とおくことにより *(3)* が得られる. したがって *Theorem 2.1* は *Luo [2]* の結果の一般化であることがわかる.

3 一般化(その1)

Definition 3.1 $\alpha, \beta \geq 0$ と量子状態 ρ と 物理量 H に対して一般化された *Wigner-Yanase-Dyson skew information* と関連する量を次のように定義する.

$$\begin{aligned}
I_{\rho,\alpha,\beta}(H) &= \frac{1}{2}Tr[(i[\rho^\alpha, H_0])(i[\rho^\beta, H_0])\rho^{1-\alpha-\beta}] \\
&= \frac{1}{2}\{Tr[\rho H_0^2] + Tr[\rho^{\alpha+\beta}H_0\rho^{1-\alpha-\beta}H_0]\} - \frac{1}{2}\{Tr[\rho^\alpha H_0\rho^{1-\alpha}H_0] + Tr[\rho^\beta H_0\rho^{1-\beta}H_0]\}. \\
J_{\rho,\alpha,\beta}(H) &= \frac{1}{2}Tr[\{\rho^\alpha, H_0\}\{\rho^\beta, H_0\}\rho^{1-\alpha-\beta}] \\
&= \frac{1}{2}\{Tr[\rho H_0^2] + Tr[\rho^{\alpha+\beta}H_0\rho^{1-\alpha-\beta}H_0]\} + \frac{1}{2}\{Tr[\rho^\alpha H_0\rho^{1-\alpha}H_0] + Tr[\rho^\beta H_0\rho^{1-\beta}H_0]\}.
\end{aligned}$$

また次のように定義する.

$$U_{\rho,\alpha,\beta}(H) = \sqrt{I_{\rho,\alpha,\beta}(H)J_{\rho,\alpha,\beta}(H)}.$$

Theorem 3.1 ρ が *invertible* のとき, $\alpha, \beta \geq 0$ が $\alpha+\beta \geq 1$ または $\alpha+\beta \leq \frac{1}{2}$ を満たすとき次の不等式が成り立つ.

$$U_{\rho,\alpha,\beta}(A)U_{\rho,\alpha,\beta}(B) \geq \alpha\beta|Tr[\rho[A,B]]|^2. \tag{7}$$

Definition 3.2 $\alpha, \beta \geq 0$ と量子状態 ρ と 物理量 H に対して一般化された *Wigner-Yanase-Dyson skew information (2)* と関連する量を次のように定義する.

$$\tilde{I}_{\rho,\alpha,\beta}(H) = \frac{1}{2}Tr[(i[\rho^\alpha, H_0])(i[\rho^\beta, H_0])] = Tr[\rho^{\alpha+\beta}H_0^2] - Tr[\rho^\alpha H_0 \rho^\beta H_0]$$

$$\tilde{J}_{\rho,\alpha,\beta}(H) = \frac{1}{2}Tr[\{\rho^\alpha, H_0\}\{\rho^\beta, H_0\}] = Tr[\rho^{\alpha+\beta}H_0^2] + Tr[\rho^\alpha H_0 \rho^\beta H_0]$$

また次のように定義する.

$$\tilde{U}_{\rho,\alpha,\beta}(H) = \sqrt{\tilde{I}_{\rho,\alpha,\beta}(H)\tilde{J}_{\rho,\alpha,\beta}(H)}.$$

Theorem 3.2 ρ が *invertible* のとき, $\alpha, \beta \geq 0$ に対して次の不等式が成り立つ.

$$\tilde{U}_{\rho,\alpha,\beta}(A)\tilde{U}_{\rho,\alpha,\beta}(B) \geq \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}|Tr[\rho^{\alpha+\beta}[A,B]]|^2. \tag{8}$$

Remark 3.1 *(7)* と *(8)* において $\alpha+\beta=1$ とおくことにより *(6)* が得られる. したがって *Theorem 3.1* と *Theorem 3.2* は *Theorem 2.1* の結果の一般化であることがわかる. したがってこれは *Luo [2]* のさらなる拡張である.

4 一般化(その2)

Definition 4.1 $f(x), g(x)$ を $[0,1]$. 上の非負連続関数とする. このとき $f(x), g(x)$ が次の2条件

(1) 任意の $x, y \in [0,1]$ に対して $(f(x)-f(y))(g(x)-g(y)) \geq 0$ が成り立つ

(2) $f(x), g(x)$ は $(0,1)$ 上で微分可能で $F(x) = \log f(x), G(x) = \log g(x)$ とおくと

$$0 \leq \inf_{0<x<1} \frac{G'(x)}{F'(x)} \leq \sup_{0<x<1} \frac{G'(x)}{F'(x)} < \infty$$

が成り立つ

を満たすとき, 対 (f,g) を *compatible in log-increase, monotone pair* (略して *CLI monotone pair*) という.

同様にして

Definition 4.2 $f(x),g(x)$ を $[0,1]$. 上の非負連続関数とする. このとき $f(x),g(x)$ が次の２条件

(1) 任意の $x,y\in[0,1]$ に対して $(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\leq 0$ が成り立つ

(2) $f(x),g(x)$ は $(0,1)$ 上で微分可能で $F(x)=\log f(x), G(x)=\log g(x)$ とおくと

$$0\leq \inf_{0<x<1}\frac{G'(x)}{F'(x)}\leq \sup_{0<x<1}\frac{G'(x)}{F'(x)}<\infty$$

が成り立つ

を満たすとき, 対 (f,g) を *compatible in log-increase, anti-monotone pair* (略して *CLI anti-monotone pair*) という.

Definition 4.3 $\alpha,\beta\geq 0$ と量子状態 ρ と 物理量 H に対して一般化された *skew information* と関連する量 $I_{\rho,(f,g,h)}(H)$ と関係した量 $J_{\rho,(f,g,h)}(H)$ および $U_{\rho,(f,g,h)}(H)$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned}
I_{\rho,(f,g,h)}(H) &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[(\imath[f(\rho),H_0])(\imath[g(\rho),H_0])h(\rho)] \\
&= \frac{1}{2}\{\mathrm{Tr}[f(\rho)g(\rho)g(\rho)H_0^2]+\mathrm{Tr}[f(\rho)g(\rho)H_0h(\rho)H_0] \\
&\quad -\mathrm{Tr}[f(\rho)H_0g(\rho)h(\rho)H_0]-\mathrm{Tr}[f(\rho)h(\rho)H_0g(\rho)H_0]\} \\
J_{\rho,(f,g,h)}(H) &= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\{f(\rho),H_0\}\{g(\rho),H_0\}h(\rho)] \\
&= \frac{1}{2}\{\mathrm{Tr}[f(\rho)g(\rho)g(\rho)H_0^2]+\mathrm{Tr}[f(\rho)g(\rho)H_0h(\rho)H_0] \\
&\quad +\mathrm{Tr}[f(\rho)H_0g(\rho)h(\rho)H_0]+\mathrm{Tr}[f(\rho)h(\rho)H_0g(\rho)H_0]\} \\
U_{\rho,(f,g,h)}(H) &= \sqrt{I_{\rho,(f,g,h)}(H)J_{\rho,(f,g,h)}(H)}
\end{aligned}$$

この論文の主定理を得るために次の記号を導入する.

Definition 4.4 $f(x),g(x),h(x)$ および $F(x)=\log f(x), G(x)=\log g(x), H(x)=\log h(x)$ に対して

$$m=\inf_{0<x<1}\frac{G'(x)}{F'(x)},\quad M=\sup_{0<x<1}\frac{G'(x)}{F'(x)}$$

$$n=\inf_{0<x<1}\frac{H'(x)}{F'(x)},\qquad N=\sup_{0<x<1}\frac{H'(x)}{F'(x)}$$

とおくとき $\beta(f,g,h)$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned}\beta(f,g,h) \quad &= \quad \min\left\{\frac{m}{(1+m+n)^2},\frac{m}{(1+m+N)^2},\right.\\ &\qquad\qquad \left.\frac{M}{(1+M+n)^2},\frac{M}{(1+M+N)^2}\right\}\end{aligned}$$

さらに次の2つの仮定を設ける.

(I) $(f,g),(f,h)$ は次を満たす CLI monotone pair である.

$$1+\frac{G(y)-G(x)}{F(y)-F(x)}\leq\frac{H(y)-H(x)}{F(y)-F(x)}\quad (x<y).$$

(II) $(f,g),(f,h)$ は次を満たす CLI monotone pair と CLI anti-monotone pair である.

$$1+\frac{G(y)-G(x)}{F(y)-F(x)}+\frac{H(y)-H(x)}{F(y)-F(x)}>0\quad (x<y).$$

次の定理が得られる.

Theorem 4.1 仮定 *(I)* 又は *(II)* の下で次の *trace inequality* が成り立つ. 任意の $A,B\in M_{n,sa}(\mathbb{C})$ に対して

$$U_{\rho,(f,g,h)}(A)U_{\rho,(f,g,h)}(B)\geq\beta(f,g,h)|\mathrm{Tr}[f(\rho)g(\rho)h(\rho)[A,B]]|^2.$$

$h(x)=1$ のとき Ko-Yoo [1] の結果が得られる.

Corollary 4.1 (f,g) が *CLI monotone pair* のとき, 任意の $A,B\in M_{n,sa}(\mathbb{C})$ に対して

$$U_{\rho,(f,g)}(A)U_{\rho,(f,g)}(B)\geq\beta(f,g)|Tr[f(\rho)g(\rho)[A,B]]|^2.$$

$f(x)=x^\alpha$ $(\alpha\geq 0)$, $g(x)=x^\beta$ $(\beta\geq 0)$, $h(x)=x^\gamma$ $(\gamma\geq 0$ 又は$\gamma\leq 0)$ のとき次の Corollary が得られる.

Corollary 4.2 次の *(1), (2)* が成り立つ.

(1) $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ が $0 < \alpha + \beta \leq \gamma$ を満たすとき

$$\beta(f, g, h) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta + \gamma)^2}.$$

(2) $\alpha, \beta, \geq 0,\ \gamma \leq 0$ が $\alpha + \beta + \gamma > 0$ を満たすとき

$$\beta(f, g, h) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta + \gamma)^2}.$$

Remark 4.1 $\alpha, \beta \geq 0,\ \gamma < 0$ が $\alpha + \beta + \gamma > 0$ を満たすとき

$$\lim_{x \to +0} h(x) = +\infty$$

となるので $h(x)$ は $[0, 1]$ で連続ではない. このときには ρ の最小固有値より小さい $\epsilon > 0$ をとると $h(x)$ は $[\epsilon, 1]$ で連続になるので, この区間で *Theorem 4.1* を適用すれば *Corollary 4.2* を得る.

Remark 4.2 *Corollary 4.2* の *(2)* で $\gamma = 0$ とすると *[8]* の *Theorem 2.3* が得られる. また *Corollary 4.2* で $\alpha + \beta + \gamma = 1$ とすると *[7]* の *Theorem 2.2* が得られる. つまり *(1)* から $\alpha, \beta \geq 0,\ \alpha + \beta \leq \frac{1}{2}$ となり, また *(2)* から $\alpha, \beta \geq 0,\ \alpha + \beta \geq 1$ となる.

参考文献

[1] C.K.Ko and H.J.Yoo, *Uncertainty relation associated with amonotone pair skew information*, J.Math.Anal.Appl., vol.383(2011), pp.208-214.

[2] S.Luo, *Heisenberg uncertainty relation for mixed states*, Phys. Rev. A, vol.72(2005), p.042110.

[3] S.Luo and Q.Zhang, *On skew information*, IEEE Trans. Information Theory, vol.50(2004), pp.1778-1782, and *Correction to "On skew information"*, IEEE Trans. Information Theory, vol.51(2005), p.4432.

[4] E.P.Wigner and M.M.Yanase, *Information content of distribution*, Proc. Nat. Acad. Sci. U,S,A., vol.49(1963), pp.910-918.

[5] K.Yanagi, S.Furuichi and K.Kuriyama, *A generalized skew information and uncertainty relation*, IEEE Trans. Information Theory, vol.51(2005), pp.4401-4404.

[6] K.Yanagi, *Uncertainty relation on Wigner-Yanase-Dyson skew information*, J. Math. Anal. Appl., vol.365(2010), pp.12-18.

[7] K.Yanagi, *Uncertainty relation on generalizaed Wigner-Yanase-Dyson skew information*, Linear Algebra and its Applications, vol.433(2010), pp.1524-1532.

[8] K.Yanagi, *Trace inequality related to generalized Wigner-Yanase-Dyson skew information*, preprint.

[9] K.Yanagi and S.Kajihara, *Generalized uncertainty relation associated with a monotone or an anti-monotone pair skew information*, preprint.