数理解析研究所講究録
第 1821 巻 2013 年 48-54

Hadamard 空間における集合列と距離射影列の収束について

東邦大学・理学部
木村泰紀 (Yasunori Kimura)
Department of Information Science
Toho University

1 はじめに

集合列の収束と, それに対応する距離射影の収束との関係については多くの研究があるが, 狭義凸な回帰的 Banach 空間における次の定理は, 関連する研究の中でも先駆的かつ重要な結果の一つである.

定理 1 (Tsukada [7]). 狭義凸で回帰的な実 Banach 空間 E が Kadec-Klee 条件をみたすと仮定する. E の空でない閉凸部分集合列 $\{C_n\}$ が空でない閉凸部分集合 C_0 に Mosco 収束するとき, 任意の $x \in E$ に対して点列 $\{P_{C_n}x\}$ は $P_{C_0}x$ に強収束する. ここで $P_K : E \to K$ は E の空でない閉凸部分集合 K に対する距離射影である.

この定理に対し, Ibaraki-Kimura-Takahashi [4] は距離射影とは別の非線形性をもった射影に対して同様の結果を証明し, その後の研究ではさらに一般的な形へと拡張されている. これらの結果は, 当然実 Hilbert 空間でも成り立つ命題であるが, Banach 空間とは異なる方向への Hilbert 空間の拡張である Hadamard 空間においても次に示す結果がある. Hadamard 空間は凸構造をもった完備距離空間の一種である. 距離空間の凸構造については [6] で定義されて以来, その空間上のさまざまな写像に関する研究が活発にが進められている.

定理 2 (Kimura [5]). X を Hadamard 空間とする. X の空でない閉凸部分集合列 $\{C_n\}$ が空でない閉凸部分集合 C_0 に Δ-Mosco 収束するとき, 任意の $x \in X$ に対して点列 $\{P_{C_n}x\}$ は $P_{C_0}x$ に強収束する. ここで $P_K : X \to K$ は X の空でない閉凸部分集合 K

に対する距離射影である.

本稿は [5] で述べられているいくつかの事実において, 詳細が省かれている部分について補足し, また, 主定理の応用として証明されている非拡大写像族の不動点近似定理について若干の拡張を試みることを目的とする. 多くの部分は Hilbert 空間での議論とほぼ同様の手法によって得られるものであるが, 集合列の収束に関する新しい定義等が導入されている部分もあるので, 完全を期するために詳細にわたって示すこととする.

(X,d) を距離空間とする. X の 2 点 x,y と $l \geq 0$ に対し, $c:[0,l] \to X$ が x,y を端点とする測地線であるとは, $c(0)=x$ および $c(l)=y$ であり, さらに

$$d(c(s),c(t)) = |s-t|$$

が任意の $s,t \in [0,l]$ で成り立つことをいう. 任意の $x,y \in X$ に対してそれらを端点とする測地線が存在するとき, X を測地距離空間という. 一般に, 測地距離空間において 2 点間を結ぶ測地線は一意とは限らないが, 本稿で扱う Hadamard 空間においては, その条件から測地線の一意性がつねに成り立つ. したがって, 簡単のため以下では測地線の一意性を仮定するものとする.

測地距離空間 X の 2 点 $x,y \in X$ に対し, これらを端点とする測地線 $c:[0,l] \to X$ の像 を $[x,y]$ であらわす. また, $x,y,z \in X$ に対して, これらを頂点とする三角形を $\triangle(x,y,z) = [x,y] \cup [y,z] \cup [z,x]$ で定義する. 2 次元 Euclid 空間の点 $\overline{x},\overline{y},\overline{z} \in \mathbb{E}^2$ が

$$d(x,y) = \|\overline{x}-\overline{y}\|_{\mathbb{E}^2}\ ,\ d(y,z) = \|\overline{y}-\overline{z}\|_{\mathbb{E}^2}\ ,\ d(z,x) = \|\overline{z}-\overline{x}\|_{\mathbb{E}^2}$$

をみたすとき, $\triangle(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) \subset \mathbb{E}^2$ を $\triangle(x,y,z) \subset X$ の $\mathbb{E}^2$ における比較三角形という.

測地的空間の三角形 $\triangle(x,y,z) \subset X$ とその比較三角形 $\triangle(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) \subset \mathbb{E}^2$ を考える. 点 $p \in \triangle(x,y,z)$ に対しては自然な意味で $\triangle(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$ 上に対応する点 $\overline{p}$ がある. すなわち, 例えば $p \in [x,y]$ のときは, $d(x,p) = \|\overline{x}-\overline{p}\|_{\mathbb{E}^2}$, $d(y,p) = \|\overline{y}-\overline{p}\|_{\mathbb{E}^2}$ をみたす唯一の点 $\overline{p} \in [\overline{x},\overline{y}]$ が存在する. 測地的空間 X 上に任意の三角形 $\triangle(x,y,z) \subset X$ とその比較三角形 $\triangle(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) \subset \mathbb{E}^2$ をとったとき, $p,q \in \triangle(x,y,z)$ とそれぞれに対応する点 $\overline{p},\overline{q} \in \triangle(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) \subset \mathbb{E}^2$ に対して不等式

$$d(p,q) \leq \|\overline{p}-\overline{q}\|_{\mathbb{E}^2}$$

がつねに成り立つならば, X は CAT(0) 空間と呼ばれる. とくに, 完備な CAT(0) 空間を Hadamard 空間という.

Hadamard 空間においては, 任意の $x,y \in X$ と $t \in [0,1]$ に対して $d(x,z) = (1-t)d(x,y)$ および $d(y,z) = td(x,y)$ をみたす $[x,y]$ 上の点 z がただ一つ存在する. この点

を $tx \oplus (1-t)y$ とあらわし, x と y との凸結合という. X の部分集合 C が凸であるとは, 任意の $x, y \in C$ に対して $[x, y] \subset C$ が成り立つことである. X の部分集合 A に対し, A を含む凸集合全体の共通部分, すなわち A の凸包を $\operatorname{co} A$ であらわす.

Hadamard 空間上の 3 点 x, y, z と $t \in [0,1]$ に対して成り立つ次の不等式は重要である.

$$d(tx \oplus (1-t)y, z)^2 \leq td(x,z)^2 + (1-t)d(y,z)^2 - t(1-t)d(x,y)^2.$$

Hadamard 空間に関する詳細は [1, 3] 等を参照せよ.

2 集合列の極限に関する包含関係

Hadamard 空間 X 上の有界点列 $\{x_n\}$ を考える. 写像 $g : X \to \mathbb{R}$ を $u \in X$ に対して $g(u) = \limsup_{n\to\infty} d(x_n, u)$ で定義すると, g を最小にする点が唯一存在することがわかる. この点を $\{x_n\}$ の漸近的中心という. $\{x_n\}$ を Hadamard 空間の閉凸集合 C からとるとき, その漸近的中心は C に属することが知られている. 詳しくは [2] を参照せよ.

$\{C_n\}$ を Hadamard 空間 X の空でない閉凸集合の列とする. このとき, X の部分集合 $d\text{-}\mathrm{Li}_n C_n$ および $\Delta\text{-}\mathrm{Ls}_n C_n$ を次のように定義する: $x \in d\text{-}\mathrm{Li}_n C_n$ であるとは, x に収束する X の点列 $\{x_n\}$ で, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \in C_n$ をみたすものが存在することである. 一方, $y \in \Delta\text{-}\mathrm{Ls}_n C_n$ であるとは, y がある有界点列 $\{y_i\} \subset X$ の漸近的中心になっており, かつ $\{C_n\}$ のある部分列 $\{C_{n_i}\}$ に対して $y_i \in C_{n_i}$ をすべての $i \in \mathbb{N}$ に対してみたしていることをいう. さらに $\{C_n\}$ が X の空でない閉凸集合 C_0 に Δ-Mosco 収束するとは

$$d\text{-}\mathop{\mathrm{Li}}_n C_n = C_0 = \Delta\text{-}\mathop{\mathrm{Ls}}_n C_n$$

が成り立つことをいう.

ここで, 一般に

$$\operatorname{cl}\operatorname{co} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} C_n \subset d\text{-}\mathop{\mathrm{Li}}_n C_n \subset \Delta\text{-}\mathop{\mathrm{Ls}}_n C_n \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} \operatorname{cl}\operatorname{co} \bigcup_{n=m}^{\infty} C_n$$

が成り立つ. これは [5, Example 3.4] で述べられていることより若干強い命題であるが, 本稿ではこれを示すことにする.

最初に $d\text{-}\mathrm{Li}_n C_n$ が閉凸集合であることを示す. $z \in X$ に収束する点列 $\{z_k\} \subset d\text{-}\mathrm{Li}_n C_n$ が存在するとき, 任意の $\epsilon > 0$ に対してある $k_0 \in \mathbb{N}$ が存在し $d(z, z_{k_0}) < \epsilon/2$ が成り立つ. $z_{k_0} \in d\text{-}\mathrm{Li}_n C_n$ であるから, z_{k_0} に収束する点列 $\{w_n\}$ で, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $w_n \in C_n$ が成り立つものをとれる. このとき, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq n_0$ なら

ば $d(z_{k_0}, w_n) < \epsilon/2$ が成り立つ．よって

$$d(z, C_n) = \inf_{w \in C_n} d(z, w) \leq d(z, w_n) \leq d(z, z_{k_0}) + d(z_{k_0}, w_n) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

が $n \geq n_0$ で成り立つ．したがって $\lim_{n\to\infty} d(z, C_n) = 0$ である．よって点列 $\{P_{C_n} z\}$ を考えると $z \in d\text{-}\mathrm{Li}_n\, C_n$ が成り立つことがわかり，$d\text{-}\mathrm{Li}_n\, C_n$ は閉集合であることが示された．次に凸性を示す．$y, z \in d\text{-}\mathrm{Li}_n\, C_n$ とし $t \in [0,1]$ とするとき，$w = ty \oplus (1-t)z$ とすると，y, z にそれぞれ収束する点列 $\{y_n\}, \{z_n\}$ が存在して，$y_n, z_n \in C_n$ を任意の $n \in \mathbb{N}$ でみたす．ここで各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $w_n = ty_n \oplus (1-t)z_n \in C_n$ と定義する．三角形 $\triangle(y_n, y, z)$ とその比較三角形 $\triangle(\overline{y_n}, \overline{y}, \overline{z}) \subset \mathbb{E}^2$ を考えることにより

$$\begin{aligned} d(w, ty_n \oplus (1-t)z) &\leq \|\overline{w} - (t\overline{y_n} + (1-t)\overline{z})\|_{\mathbb{E}^2} \\ &= \|(t\overline{y} + (1-t)\overline{z}) - (t\overline{y_n} + (1-t)\overline{z})\|_{\mathbb{E}^2} \\ &= t\,\|\overline{y} - \overline{y_n}\|_{\mathbb{E}^2} \end{aligned}$$

が得られ，同様に $\triangle(y_n, z_n, z)$ とその比較三角形 $\triangle(\overline{y_n}, \overline{z_n}, \overline{z}) \subset \mathbb{E}^2$ を考えることにより

$$\begin{aligned} d(ty_n \oplus (1-t)z, w_n) &\leq \|(t\overline{y_n} + (1-t)\overline{z}) - \overline{w_n}\|_{\mathbb{E}^2} \\ &= \|(t\overline{y_n} + (1-t)\overline{z}) - (t\overline{y_n} + (1-t)\overline{z_n})\|_{\mathbb{E}^2} \\ &= (1-t)\,\|\overline{z} - \overline{z_n}\|_{\mathbb{E}^2} \end{aligned}$$

が得られる．よって，

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} d(w, w_n) \leq \lim_{n\to\infty} (t\,\|\overline{y} - \overline{y_n}\|_{\mathbb{E}^2} + (1-t)\,\|\overline{z} - \overline{z_n}\|_{\mathbb{E}^2}) = 0.$$

したがって $w \in d\text{-}\mathrm{Li}_n\, C_n$ となり，凸であることも示された．

$x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} C_n$ とすると，ある $m_0 \in \mathbb{N}$ が存在して，任意の $n \geq m_0$ に対して $x \in C_n$ が成り立つ．このとき，$x_1 \in C_1, \ldots, x_{m_0-1} \in C_{m_0-1}$ を任意にとり，$n \geq m_0$ に対しては $x_n = x$ とすると明らかに $\{x_n\}$ は x に収束するので $x \in d\text{-}\mathrm{Li}_n\, C_n$ が成り立つ．$d\text{-}\mathrm{Li}_n\, C_n$ が閉凸集合であることを用いると $\mathrm{cl}\,\mathrm{co} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} C_n \subset d\text{-}\mathrm{Li}_n\, C_n$ であることがわかる．

次に $x \in d\text{-}\mathrm{Li}_n\, C_n$ を仮定すると，x に収束する点列 $\{x_n\}$ で $x_n \in C_n$ が各 $n \in \mathbb{N}$ で成り立つものが存在することがわかる．このとき $\limsup_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ であるから，明らかに x は $\{x_n\}$ の漸近的中心である．したがって，定義より $x \in \Delta\text{-}\mathrm{Ls}_n\, C_n$ が得られ，$d\text{-}\mathrm{Li}_n\, C_n \subset \Delta\text{-}\mathrm{Ls}_n\, C_n$ が示された．

最後に $x \in \Delta\text{-}\mathrm{Ls}_n\, C_n$ を仮定し，$x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathrm{cl}\,\mathrm{co} \bigcup_{n=m}^{\infty} C_n$ を示す．定義より，x はある有界点列 $\{x_i\} \subset X$ の漸近的中心であり，かつ $\{C_n\}$ のある部分列 $\{C_{n_i}\}$ に対して

$x_i \in C_{n_i}$ をすべての $i \in \mathbb{N}$ に対してみたしている．ここで $m \in \mathbb{N}$ を任意に一つ固定すると，ある $i_0 \in \mathbb{N}$ に対して $n_{i_0} \geq m$ が成り立つ．ここで x は $\{x_{n_{i+i_0}}\}$ の漸近的中心でもあることを用いると，

$$x \in \operatorname{cl}\operatorname{co}\{x_{n_{i+i_0}} : i \in \mathbb{N}\} \subset \operatorname{cl}\operatorname{co} \bigcup_{n=n_{i_0}}^{\infty} C_n \subset \operatorname{cl}\operatorname{co} \bigcup_{n=m}^{\infty} C_n$$

が成り立つことがわかる．ここで，$m \in \mathbb{N}$ は任意だったので，$x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \operatorname{cl}\operatorname{co} \bigcup_{n=m}^{\infty} C_n$ が得られる．以上で上記の包含関係がすべて成り立つことがわかった．

3 不動点近似列の生成

距離空間 X 上の写像 $T : X \to X$ は，任意の $x, y \in X$ に対して $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ をみたすとき非拡大であるという．また，$T : X \to X$ が空でない不動点集合 $F(T) = \{z \in X : z = Tz\}$ をもち，かつ任意の $x \in X$, $z \in F(T)$ に対して $d(Tx, z) \leq d(x, z)$ をみたすとき，T を擬非拡大という．[5] では主定理である本稿の定理 2 を用いて，実 Hilbert 球上で定義された非拡大写像族の共通不動点近似に関する次の結果を得ている．

定理 3 (Kimura [5])**.** (B, ρ) を実 Hilbert 球とし，$\{T_i : i \in I\}$ を非拡大写像の族とする．F を $\{T_i\}$ の共通不動点の集合とし，F は空でないと仮定する．閉区間 $[0, 1]$ 上の実数の族 $\{a_n(i) : n \in \mathbb{N}, i \in I\}$ は，任意の $i \in I$ に対して $\liminf_{n\to\infty} a_n(i) < 1$ をみたすとする．$x \in B$ に対し，点列 $\{x_n\}$ と閉凸集合族 $\{C_n\}$ を次のように生成する: $x_1 = x$, $C_0 = B$ とし，さらに $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
&y_n(i) = a_n(i)x_n \oplus (1 - a_n(i))T_i x_n \quad (i \in I), \\
&C_n = \left\{ z \in B : \sup_{i \in I} \rho(y_n(i), z) \leq \rho(x_n, z) \right\} \cap C_{n-1}, \\
&x_{n+1} = P_{C_n} x
\end{aligned}$$

とする．このとき $\{x_n\}$ は $P_F x \in F$ に収束する．

この定理は次のような形へ一般化できる．

定理 4. X を，任意の $u, v \in X$ に対してその部分集合 $\{z \in X : d(u, z) \leq d(v, z)\}$ がつねに凸であるような Hadamard 空間とする．$\{T_i : i \in I\}$ を擬非拡大写像の族とし，各 $i \in I$ に対して次の性質が成り立つと仮定する:

$$(*) \qquad w_0 = \lim_{k\to\infty} w_k = \lim_{k\to\infty} T_i w_k \text{ ならば } w_0 \in F(T_i).$$

F を $\{T_i\}$ の共通不動点の集合とし, 空でないと仮定する. 閉区間 $[0,1]$ 上の実数の族 $\{a_n(i) : n \in \mathbb{N}, i \in I\}$ は, 任意の $i \in I$ に対して $\liminf_{n\to\infty} a_n(i) < 1$ をみたすとする. このとき $x \in X$ に対し, 定理 3 と同様に定義された点列 $\{x_n\}$ は $P_F x \in F$ に収束する.

証明の基本的な手法は [5] で用いられたものと同様であるが, 完全を期するため以下に述べる.

証明. 各 $i \in I$ に対して T_i の不動点集合 $F(T_i)$ は閉凸集合である. 実際, 閉であることは $z_0 \in X$ に収束する点列 $\{z_n\} \in F(T_i)$ に対して $d(z_0, T_i z_0) \leq d(z_0, z_n) + d(z_n, T_i z_0) \leq 2d(z_n, z_0)$ が成り立つので, $z_0 = T_i z_0$ が得られることからわかる. 一方, $z_1, z_2 \in F(T_i)$, $t \in [0,1]$ とするとき, $w = tz_1 \oplus (1-t)z_2$ に対して

$$\begin{aligned}
d(w, T_i w)^2 &= d(tz_1 \oplus (1-t)z_2, T_i w)^2 \\
&\leq td(z_1, T_i w)^2 + (1-t)d(z_2, T_i w)^2 - t(1-t)d(z_1, z_2)^2 \\
&\leq td(z_1, w)^2 + (1-t)d(z_2, w)^2 - t(1-t)d(z_1, z_2)^2 \\
&= t(1-t)^2 d(z_1, z_2)^2 + (1-t)t^2 d(z_2, z_1)^2 - t(1-t)d(z_1, z_2)^2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

よって $w \in F(T_i)$ であり, 凸であることもわかる. したがって各 $F(T_i)$ は閉凸集合であり, したがって共通不動点集合 $F = \bigcap_{i\in I} F(T_i)$ も閉凸となる. $z \in F$ に対し

$$\begin{aligned}
d(y_n(i), z)^2 &= d(a_n(i)x_n \oplus (1 - a_n(i))T_i x_n, z)^2 \\
&\leq a_n(i)d(x_n, z)^2 + (1 - a_n(i))d(T_i x_n, z)^2 \\
&\leq d(x_n, z)^2
\end{aligned}$$

が任意の $i \in I$ で成り立つので, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\sup_{i\in I} d(y_n(i), z) \leq d(x_n, z)$ が成り立つ. よって $F \subset C_n$ となり, C_n は空でないことが示された. さらに C_n は閉集合であり, 凸であることも仮定からわかるので, C_n 上への距離射影 P_{C_n} が存在し, したがって任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して x_n が定まることがわかった. 空でない閉凸集合の列 $\{C_n\}$ は包含関係に関して減少列であり, よって前節で示した極限集合の関係を用いると $\{C_n\}$ は $C_\infty = \bigcap_{n=1}^\infty C_n$ に Δ-Mosco 収束する. よって定理 2 より $\{x_n\}$ は $x_0 = P_{C_\infty} x$ に収束することが示される.

次に x_0 は $\{T_i\}$ の共通不動点であることを示そう. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_0 \in C_n$ が成り立つことから, すべての $i \in I$ に対して $d(y_n(i), x_0) \leq d(x_n, x_0)$ であり, よって $\{y_n(i)\}$ も x_0 に収束する. $i \in I$ を任意に一つ固定し, $\{a_n(i)\}$ の部分列 $\{a_{n_k}(i)\}$ で

$0 \leq a_0(i) < 1$ となるものをとると,

$$\begin{aligned} 0 = d(x_0, x_0) &= \lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, y_{n_k}(i)) \\ &= \lim_{k\to\infty} (1 - a_{n_k}(i)) d(x_{n_k}, T_i x_{n_k}) \\ &= (1 - a_0(i)) \lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, T_i x_{n_k}) \end{aligned}$$

より $\lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, T_i x_{n_k}) = 0$, すなわち, $\{T_i x_{n_k}\}$ も x_0 に収束する. したがって, 条件 $(*)$ より $x_0 \in F(T_i)$ である. $i \in I$ は任意であったから x_0 は $\{T_i\}$ の共通不動点であることがわかった. したがって, $P_{C_\infty} x = x_0 \in F$ なので, $x_0 = P_F x$ が示された. □

条件 $(*)$ は, とくに T_i が連続であれば成立する. したがって, T_i が非拡大写像のときもこの条件をみたしていることがわかる.

参考文献

[1] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[2] S. Dhompongsa, W. A. Kirk, and B. Panyanak, *Nonexpansive set-valued mappings in metric and Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 35–45.

[3] K. Goebel and S. Reich, *Uniform convexity, hyperbolic geometry, and nonexpansive mappings*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 83, Marcel Dekker Inc., New York, 1984.

[4] T. Ibaraki, Y. Kimura, and W. Takahashi, *Convergence theorems for generalized projections and maximal monotone operators in Banach spaces*, Abstr. Appl. Anal. (2003), 621–629.

[5] Y. Kimura, *Convergence of a sequence of sets in a Hadamard space and the shrinking projection method for a real Hilbert ball*, Abstr. Appl. Anal. **2010** (2010), Article ID 582475, 11 pages.

[6] W. Takahashi, *A convexity in metric spaces and nonexpansive mappings*, Kodai Math. Sem. Rep. **22** (1970), 142–149.

[7] M. Tsukada, *Convergence of best approximations in a smooth Banach space*, J. Approx. Theory **40** (1984), 301–309.