数理解析研究所講究録
第1821巻 2013年 181-188

ヒルベルト空間における新しい非線形写像での不動点定理と平均エルゴード定理

慶応義塾大学・経済学研究科 八尾　政行 (Masayuki YAO)
Graduate School of Economics,
Keio University

1. 序論

本稿では, 新しく導入した写像のもとで不動点定理, 平均エルゴード定理, 弱収束定理について, Maruyama, Takahashi and Yao[13] で得られた結果の概説を行う.

H をヒルベルト空間, C を H の非空閉凸部分集合とする. 写像 $T : C \to C$ が nonexpansive であるとは, 任意の $x, y \in C$ について $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ となるときをいう. T の不動点の集合を $F(T)$ とあらわす. Baillon[2] は次のヒルベルト空間における非線形平均エルゴード定理を証明した.

定理 1.1. H をヒルベルト空間とし, C を H の非空閉凸集合とする. $T : C \to C$ を nonexpansive とする. $F(T) \neq \emptyset$ ならば, 任意の $x \in C$ について

$$S_n x = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k x$$

は $z \in F(T)$ に弱収束する.

ヒルベルト空間における nonexpansive 写像の重要な例や, その均衡問題との関係については, [3, 4, 5, 6] などにおいて言及されている. これら nonexpansive 写像をめぐる研究から, Kohsaka and Takahashi[11] は写像 $T : C \to C$ が任意の $x, y \in C$ について

$$2\|Tx - Ty\|^2 \leq \|Tx - y\|^2 + \|x - Ty\|^2$$

なる nonspreading 写像を, Takahashi[17] は写像 $T : C \to C$ が任意の $x, y \in C$ について

$$3\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + \|Tx - y\|^2 + \|x - Ty\|^2$$

なる hybrid 写像を導入しそれらの写像についての不動点定理も証明した (Kohsaka and Takahashi[10], Iemoto and Takahashi[7] についても参照するとよい). また, Takahashi and Yao[19] ではこれら nonspreading, hybrid 写像に加え, 任意の $x, y \in C$ について

$$2\|Tx - Ty\|^2 \leq \|x - y\|^2 + \|Tx - y\|^2 \tag{1}$$

なる写像 $T : C \to C$ を導入し, それらの非線形エルゴード定理を証明している.

これらの研究の下で, Aoyama, Iemoto and Takahashi[1] では nonexpansive, nonspreading, hybrid 写像を含んだ λ-hybrid 写像を導入した. さらに Kocourek, Takahashi and Yao[9] は λ-hybrid 写像よりも広いクラスである generalized hybrid 写像を導入した. 写像 $T : C \to C$ が generalized hybrid であるとは, 任意の $x, y \in C$ について

$$\alpha\|Tx - Ty\|^2 + (1-\alpha)\|x - Ty\|^2 \leq \beta\|Tx - y\|^2 + (1-\beta)\|x - y\|^2$$

なる $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ が存在するときをいう.

本稿では, まず次節で記号の定義などの準備を行う. 第 3 節において新たに写像を導入しその不動点定理について述べ, 既存のいくつかの不動点定理と比較する. 第 4 節では, Baillon 型 [2] の平均エルゴード定理を, 第 5 節では Mann 型 [12] の弱収束定理を述べる.

2. 準備

$\mathbb{N}$ を自然数の集合, $\mathbb{R}$ を実数の集合をあらわす. H を実 Hilbert 空間とし, その内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ノルムを $\| \cdot \|$ であらわす. C を H の非空閉凸集合とし, T を C からそれ自身への写像とする. 写像 T の不動点の集合を $F(T)$ であらわす. $\{x_n\}$ から $x \in H$ への強収束と弱収束をそれぞれ $x_n \to x$ と $x_n \rightharpoonup x$ であらわす. $F(T) \neq \emptyset$ である写像 $T : C \to C$ が任意の $x \in F(T)$ と $y \in C$ について $\|x - Ty\| \leq \|x - y\|$ となるとき quasi-nonexpansive という. quasi-nonexpansive 写像 T の不動点の集合 $F(T)$ は閉かつ凸である (Ito and Takahashi[8] を参照せよ).

ℓ^∞ を一様ノルムを持つ有界点列のバナッハ空間であるとする. μ を ℓ^∞ 上の Banach limit であるとする (詳細は [15] を参照せよ). $\mu(f)$ で $f = (x_1, x_2, \cdots) \in \ell^\infty$ における μ の値をあらわす. また $\mu_n(x_n)$ として $\mu(f)$ の値をあらわすこともある. Takahashi and Yao[19] は Banach limit を用いて次の定理を示した.

定理 2.1. H をヒルベルト空間とし, C を H の非空閉凸集合とする. T を C からそれ自身への写像とする. $\{T^n x\}$ が有界であるような要素 $x \in C$ が存在し, ある Banach limit μ で

$$\mu_n \|T^n x - Ty\|^2 \leq \mu_n \|T^n x - y\|^2,\ y \in C$$

とすると, T は C に不動点を持つ.

C を H の非空閉凸集合とし, $x \in H$ とする. このとき $\|x - z\| \leq \inf_{y \in C} \|x - y\|$ となる一意の点 $z \in C$ が存在することが知られており, そのような対応を $z = P_C z$ とあらわし, P_C を H から C への距離射影という. 距離射影 P_C は nonexpansive であることが知られている (詳細については, [16] を参照せよ). Takahashi and Toyoda[18] によって, ヒルベルト空間の距離射影に関する次の結果が知られている.

補題 2.2. D をヒルベルト空間 H の非空閉凸集合とする. P を H から D への距離射影とし, $\{x_n\}$ を H の点列とする. 任意の $u \in D$ と $n \in \mathbb{N}$ で $\|x_{n+1} - u\| \leq \|x_n - u\|$ ならば, $\{Px_n\}$ は強収束する.

3. 不動点定理

この節では, まず generalized hybrid 写像よりも広いクラスの写像を導入する. H をヒルベルト空間とし, C を H の非空閉凸集合とする. 写像 $T : C \to C$ が 2-generalized hybrid(以下, 2-g.h. と表記する) であるとは, 任意の $x, y \in C$ について

$$\begin{aligned} \alpha_1 \|T^2 x - Ty\|^2 + \alpha_2 \|Tx - Ty\|^2 + (1 - \alpha_1 - \alpha_2) \|x - Ty\|^2 \\ \leq \beta_1 \|T^2 x - y\|^2 + \beta_2 \|Tx - y\|^2 + (1 - \beta_1 - \beta_2) \|x - y\|^2 \end{aligned}$$

となるような $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ が存在するときをいう. 2-g.h. 写像は Maruyama, Takahashi and Yao[13] で導入された写像であり, nonexpansive, nonspreading, hybrid, generalized hybrid 写像を含んだ写像である. また 2-g.h. 写像は $x = Tx$ ならば, 任意の $y \in C$ について quasi-nonexpansive 写像である.

次にヒルベルト空間における 2-g.h. 写像の不動点定理を述べる.

定理 3.1. H をヒルベルト空間とし, C を H の非空閉凸集合とする. $T : C \to C$ を 2-g.h. 写像とする. このとき, T が C に不動点を持つということと, ある $z \in C$ で $\{T^n z\}$

が有界であるということが同値である.

定理 3.1. の証明には定理 2.1. が重要な役割を果たしている. この定理 3.1. から以下の結果が導かれる.

定理 3.2. H をヒルベルト空間とし, C を H の非空閉凸有界集合とする. $T : C \to C$ を 2-g.h. 写像とする. このとき, T が C に不動点を持つ.

また定理 3.1. を用いることにより以下に述べる既知の不動点定理を導出することができる. 次の定理はヒルベルト空間における nonexpansive 写像の不動点定理である.

定理 3.3. H をヒルベルト空間とし, C を H の非空閉凸集合とする. $T : C \to C$ を nonexpansive 写像とする. $\{T^n x\}$ が有界となるような要素 $x \in C$ が存在するとき, T は C に不動点を持つ.

次の定理はヒルベルト空間における nonspreading 写像の不動点定理である.

定理 3.4.([11]) H をヒルベルト空間とし, C を H の非空閉凸集合とする. $T : C \to C$ を nonspreading 写像とする. $\{T^n x\}$ が有界となるような要素 $x \in C$ が存在するとき, T は C に不動点を持つ.

次の定理は Takahashi[17] によって導入されたヒルベルト空間における hybrid 写像の不動点定理である.

定理 3.5.([17]) H をヒルベルト空間とし, C を H の非空閉凸集合とする. $T : C \to C$ を hybrid 写像とする. $\{T^n x\}$ が有界となるような要素 $x \in C$ が存在するとき, T は C に不動点を持つ.

次の定理は (1) 式からなる写像についての不動点定理である.

定理 3.6. H をヒルベルト空間とし, C を H の非空閉凸集合とする. $T : C \to C$ を任意の $x, y \in C$ について (1) 式からなる写像とする. $\{T^n x\}$ が有界となるような要素 $x \in C$ が存在するとき, T は C に不動点を持つ.

次の定理は 2-g.h. 写像において $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = (1/3, 1/3, 0, 0)$ とした写像についての不動点定理である.

定理 3.7. H をヒルベルト空間とし, C を H の非空閉凸集合とする. $T : C \to C$ を任意の $x, y \in C$ について

$$\|T^2x - Ty\|^2 + \|Tx - Ty\|^2 + \|x - Ty\|^2 \leq 3\|x - y\|^2$$

なる写像とする. $\{T^n x\}$ が有界となるような要素 $x \in C$ が存在するとき, T は C に不動点を持つ.

注意 3.8. H をヒルベルト空間とし, C を H の非空閉凸集合とする. $n \in \mathbb{N}$ とする. 写像 $T : C \to C$ が n-generalized hybrid(以下, n-g.h. と表記する) であるとは, 任意の $x, y \in C$ について

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \|T^{n+1-k}x - Ty\|^2 + (1 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k)\|x - Ty\|^2$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} \beta_k \|T^{n+1-k}x - y\|^2 + (1 - \sum_{k=1}^{n} \beta_k)\|x - y\|^2$$

となるような $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n \in \mathbb{R}$ が存在するときをいう. これは 2-g.h. 写像を含んだより広いクラスの写像であり, 定理 3.1. と同様の証明を用いることでヒルベルト空間における n-g.h. 写像の不動点定理を示すことができる.

4. 非線形エルゴード定理

この節では, ヒルベルト空間における 2-g.h. 写像について Baillon 型 [2] の非線形エルゴード定理を扱う. その証明には Takahashi[14] によって作られたテクニックを用いた.

定理 4.1. H をヒルベルト空間とし, C を H の非空閉凸集合とする. T を $F(T) \neq \emptyset$ なる 2-g.h. 写像とし, P を H から $F(T)$ への距離射影とする. このとき任意の $x \in C$ について

$$S_n x = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^K x$$

は $F(T)$ の要素 p へ弱収束する．ここで $p=\lim_{n\to\infty} PT^n x$ である．

注意 4.2. 定理 4.1. の証明を用いることで, ヒルベルト空間における n-g.h. 写像について Baillon 型 [2] の非線形エルゴート定理を同様に示すことができる．

5. Mann 型の弱収束定理

この節では, ヒルベルト空間における 2-g.h. 写像について Mann 型 [12] の弱収束定理を扱う．まず以下二つの補題を述べる．

補題 5.1. H をヒルベルト空間とし, C を H の非空閉凸集合とする．$T:C\to C$ を 2-g.h. 写像とする．このとき, $x_n \rightharpoonup z, x_n - Tx_n \to 0$ かつ $x_n - T^2 x_n \to 0$ ならば $z\in F(T)$ である．

補題 5.2. H をヒルベルト空間とし, $x,y,z\in H$ とし, α,β,γ を $\alpha+\beta+\gamma=1$ なる実数とする．このとき

$$\begin{aligned}&\|\alpha x+\beta y+\gamma z\|^2\\ &\quad=\alpha\|x\|^2+\beta\|y\|^2+\gamma\|z\|^2-\alpha\beta\|x-y\|^2-\beta\gamma\|y-z\|^2-\gamma\alpha\|x-z\|^2\end{aligned}$$

となる．

これら二つの補題と補題 2.2. を用いて, 以下のヒルベルト空間における 2-g.h. 写像についての弱収束定理を示した．

定理 5.3. H をヒルベルト空間とし, C を H の非空閉凸集合とする．$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in\mathbb{R}$ とし, T を $F(T)\neq\emptyset$ なる 2-g.h. 写像とする．P を H から $F(T)$ への距離射影とし, 任意の $n\in\mathbb{N}$ について $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ を $0<a\leq\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}\leq b<1$ かつ $a_n+b_n+c_n=1$ なる実数列とする．$\{x_n\}$ を $x_1=x\in C$ と

$$x_{n+1}=a_n x+b_n Tx+c_n T^2 x,\ n\in\mathbb{N}$$

から生成される点列であるとする．このとき点列 $\{x_n\}$ は $F(T)$ の要素 v へ弱収束する．ここで $v=\lim_{n\to\infty} Px_n$ である．

参考文献

[1] K. Aoyama, S. Iemoto, F. Kohsaka and W. Takahashi, *Fixed point and ergodic theorems for , λ-hybrid mappings in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **11** (2010), 336 – 343.

[2] J.-B. Baillon. *Un theoreme de type ergodique pour les contractions non lineaires dans un espace de Hilbert*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B **280** (1975), 1511–1514.

[3] E. Blum and W. Oettli, *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, Math. Student **63** (1994), 123–145.

[4] F.E. Browder, *Convergence theorems for sequences of nonlinear operators in Banach spaces*, Math. Z. **100** (1967), 201–225.

[5] P.L. Combettes and A. Hirstoaga, *Equilibrium problems in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **6** (2005), 117–136.

[6] K. Goebel and W.A. Kirk, *Topics in Metric Fixed Point Theory, Cambridge University Press*, Cambridge, 1990.

[7] S. Iemoto and W. Takahashi, *Approximating fixed points of nonexpansive mappings and nonspreading mappings in a Hilbert space*, Nonlinear Anal. **71** (2009), 2082–2089.

[8] S. Itoh and W. Takahashi, *The common fixed point theory of single-valued mappings and multi-valued mappings*, Pacific J. Math. **79** (1978), 493–508.

[9] P. Kocourek, W. Takahashi and J.-C. Yao, *Fixed point theorems and weak convergence theorems for generalized hybrid mappings in Hilbert spaces*, Taiwanese J. Math. **14** (2010), 2497–2511.

[10] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Existence and approximation of fixed points of firmly nonexpansive-type mappings in Banach spaces*, SIAM. J. Optim. **19** (2008), 824–835.

[11] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Fixed point theorems for a class of nonlinear mappings related to maximal monotone operators in Banach spaces*, Arch. Math. **91** (2008), 166–177.

[12] W.R. Mann, *Mean value methods in iteration*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 506–510.

[13] T. Maruyama, W. Takahashi and M. Yao, *Fixed point and mean ergodic theorems*

for new nonlinear mappings in Hilbert spaces, J. Nonlinear Convex Anal. **12** (2011), 185–197.

[14] W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), 253–256.

[15] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis*, Yokohoma Publishers, Yokohoma, 2000.

[16] W. Takahashi, *Introduction to Nonlinear and Convex Analysis*, Yokohoma Publishers, Yokohoma, 2009.

[17] W. Takahashi, *Fixed point theorems for new nonlinear mappings in a Hilbert space*, J. Nonlinear Convex Anal. **11** (2010), 79–88.

[18] W. Takahashi and M. Toyoda, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings*, J. Optim. Theory Appl. **118** (2003), 417–428.

[19] W. Takahashi and J.-C. Yao, *Fixed point theorems and ergodic theorems for nonlinear mappings in Hilbert spaces*, Taiwanese J. Math. **15**, (2011), 457–472.