

逆凸制約下における数理計画問題とその応用

島根大学大学院 総合理工学研究科 佐伯 雄介 (Yusuke Saeki)

Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering, Shimane
University

島根大学 総合理工学部 黒岩 大史 (Daishi Kuroiwa)

Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University

概要

本論文では、逆凸制約下における数理計画問題の議論を中心にさまざまな問題を考える。微分可能な凸関数のレベル集合の接錐について考察し、逆凸制約付き DC 計画問題のための局所的な最適性条件を紹介する。また、DC 制約付き DC 計画問題、弱凸制約付き弱凸計画問題、分数制約付き分数計画問題のための局所的な最適性条件を紹介する。

1 導入

本論文では、次のような逆凸制約付き DC 計画問題を考える。

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x) - g(x) \\ \text{条件} & h_i(x) \geq 0, i \in I \end{array}$$

ただし、 $I = \{1, 2, \dots, m\}$, $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は凸関数、 $h_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in I$) は微分可能な凸関数である。DC 計画問題の研究では、Hiriart-Urruty [6] は制約なし DC 計画問題のための局所的な最適性条件と大域的な最適性条件を特徴付けた。また、Jeyakumar と Glover [7] は凸不等式制約付き DC 計画問題のための大域的な最適性条件を与えた。さらに、彼らはこの結果を弱凸計画問題や分数計画問題に応用した。その他にも、[2, 3, 4, 5] のように、DC 計画問題や分数計画問題は盛んに研究されている。一方、逆凸計画問題の研究では、Tuy と Thuong [9] は連続な凸関数族で定義された逆凸制約付き数理計画問題のための大域的な最適性条件を与えた。また、Strekalovsky [8] は下半連続な真凸関数族で定義された逆凸制約を含む数理計画問題のための大域的な最適性条件を与えた。しかしながら、これらの逆凸計画問題の研究では、最適性条件が KKT 型の条件としては得られていなかった。

本論文の目的は、逆凸制約下における数理計画問題のための最適性条件を KKT 型の条件として与えることである。まず、Bazaraa, Goode と Nashed [1] の研究をもとに、微分可能な凸関数のレベル集合の接錐を考察する。次に、集合制約付き DC 計画問題のための局所的な最適性条件と逆凸制約付き DC 計画問題のための局所的な最適性条件を紹介する。最後に、応用として、DC 制約付き DC 計画問題、弱凸制約付き弱凸計画問題、分数制約付き分数計画問題のための局所的な最適性条件を紹介する。

2 レベル集合の接錐

この章では、微分可能な凸関数のレベル集合の接錐を考察する。空でない集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して、 A の $\bar{x} \in A$ における接錐を次のように定義する。

$$T_A(\bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid \exists t_k \downarrow 0, d_k \rightarrow d \text{ s.t. } \bar{x} + t_k d_k \in A\}$$

また、関数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、 \mathbb{R} 上の二項関係 \diamond に関する f のレベル集合を次のように定義する。

$$L(f, \diamond, \alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \diamond \alpha\}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

まず、Bazaraa, Goode と Nashed [1] によって証明された次の定理を紹介する。

定理 2.1 ([1]). $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ で微分可能な関数とする。さらに、 $\nabla h(\bar{x}) \neq 0$ と仮定する。このとき、次は成立する。

$$T_{L(h, \leq, h(\bar{x}))}(\bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla h(\bar{x}), d \rangle \leq 0\}$$

$$T_{L(h, \geq, h(\bar{x}))}(\bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla h(\bar{x}), d \rangle \geq 0\}$$

定理 2.2. $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は微分可能な凸関数、 $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ とする。このとき、次は成立する。

$$T_{L(h, \geq, h(\bar{x}))}(\bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla h(\bar{x}), d \rangle \geq 0\}$$

この定理は微分可能な凸関数であれば、勾配に関する条件を仮定せずに、レベル集合 $L(h, \geq, h(\bar{x}))$ の接錐を勾配を用いて特徴付けられることを示している。

定理 2.3. $I = \{1, 2, \dots, m\}$, $h_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in I$) は微分可能な凸関数、 $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ とする。このとき、次は成立する。

$$T_{\bigcap_{i \in I} L(h_i, \geq, h_i(\bar{x}))}(\bar{x}) = \bigcap_{i \in I} T_{L(h_i, \geq, h_i(\bar{x}))}(\bar{x})$$

3 逆凸制約付き DC 計画問題

この章では、まず次のような集合制約付き DC 計画問題を考える。

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x) - g(x) \\ \text{条件} & x \in S \end{array}$$

ただし、 $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は凸関数、 $S \subset \mathbb{R}^n$ である。

定理 3.1. $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は凸関数, $S \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in S$ とする。もし \bar{x} が S での $f-g$ の局所的な最小点であるならば, 任意の閉凸錐 $A \subset T_S(\bar{x})$ に対して,

$$\partial g(\bar{x}) \subset \partial f(\bar{x}) + A^-$$

ただし, $A^- = \{x^* \in \mathbb{R}^n \mid \langle x^*, x \rangle \leq 0, \forall x \in A\}$ である。

次に, 再び次のような逆凸制約付き DC 計画問題を考える。

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x) - g(x) \\ \text{条件} & h_i(x) \geq 0, i \in I \end{array}$$

ただし, $I = \{1, 2, \dots, m\}$, $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は凸関数, $h_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in I$) は微分可能な凸関数である。

次の2つの補題は上の問題のための局所的な最適性条件を得るために重要である。

補題 3.1. $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は微分可能な凸関数, $\bar{x} \in L(h, \geq, 0)$ とする。このとき, 次は成立する。

$$T_{L(h, \geq, 0)}(\bar{x}) = \begin{cases} \{d \in \mathbb{R}^n \mid \langle \nabla h(\bar{x}), d \rangle \geq 0\} & (h(\bar{x}) = 0) \\ \mathbb{R}^n & (h(\bar{x}) > 0) \end{cases}$$

補題 3.2. $I = \{1, 2, \dots, m\}$, $h_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in I$) は微分可能な凸関数, $\bar{x} \in \bigcap_{i \in I} L(h_i, \geq, 0)$ とする。このとき, 次は成立する。

$$T_{\bigcap_{i \in I} L(h_i, \geq, 0)}(\bar{x}) = \bigcap_{i \in I} T_{L(h_i, \geq, 0)}(\bar{x})$$

定理 3.2. $I = \{1, 2, \dots, m\}$, $h_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in I$) は微分可能な凸関数, $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_i(x) \geq 0, \forall i \in I\}$, $\bar{x} \in S$ とする。このとき, 次は成立する。

$$N_S(\bar{x}) = \text{cone co } \bigcup_{i \in I(\bar{x})} \{-\nabla h_i(\bar{x})\}$$

ただし, $N_S(\bar{x}) = (T_S(\bar{x}))^-$, $I(\bar{x}) = \{i \in I \mid h_i(\bar{x}) = 0\}$ である。

この定理は, 法線錐 $N_S(\bar{x})$ が $I(\bar{x})$ に関する勾配の逆ベクトルによって生成される有限錐として特徴付けられることを示している。

定理 3.3. $I = \{1, 2, \dots, m\}$, $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は凸関数, $h_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in I$) は微分可能な凸関数, $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_i(x) \geq 0, \forall i \in I\}$, $\bar{x} \in S$ とする。もし \bar{x} が S での $f-g$ の局所的な最小点であるならば, 任意の $v \in \partial g(\bar{x})$ に対して, 次の2つの条件をみたすようなある $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \geq 0$ が存在する。

$$\begin{cases} v \in \partial f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i (-\nabla h_i(\bar{x})) \\ \lambda_i h_i(\bar{x}) = 0, \forall i \in I \end{cases}$$

4 応用

この章では、逆凸制約付き DC 計画問題の結果を用いて、DC 制約付き DC 計画問題、弱凸制約付き弱凸計画問題、分数制約付き分数計画問題のための局所的な最適性条件を考える。

4.1 DC 制約付き DC 計画問題

関数 p が多面凸関数であるとは、ある有限集合 J , $a_j^* \in \mathbb{R}^n$ ($j \in J$) と $b_j \in \mathbb{R}$ ($j \in J$) で $p = \max_{j \in J} (\langle a_j^*, \cdot \rangle + b_j)$ と表せるときをいう。次のような DC 制約付き DC 計画問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{最小化} && f(x) - g(x) \\ & \text{条件} && f_i(x) - g_i(x) \leq 0, \quad i \in I \end{aligned}$$

ただし、 $I = \{1, 2, \dots, m\}$, $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は凸関数、 $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in I$) は多面凸関数、 $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in I$) は微分可能な凸関数である。

定理 4.1. $I = \{1, 2, \dots, m\}$, $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は凸関数、 $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in I$) は多面凸関数 ($f_i = \max_{j \in J_i} (\langle a_j^*, \cdot \rangle + b_j)$), $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in I$) は微分可能な凸関数、 $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) - g_i(x) \leq 0, \forall i \in I\}$, $\bar{x} \in S$ とする。もし \bar{x} が S での $f - g$ の局所的な最小点であるならば、任意の $v \in \partial g(\bar{x})$ に対して、次の 2 つの条件をみたすようなある $\lambda_{(i,j)} \geq 0$ ($(i,j) \in T$) が存在する。

$$\begin{cases} v \in \partial f(\bar{x}) + \sum_{(i,j) \in T} \lambda_{(i,j)} (a_j^* - \nabla g_i(\bar{x})) \\ \lambda_{(i,j)} (\langle a_j^*, \bar{x} \rangle + b_j - g_i(\bar{x})) = 0, \quad \forall (i,j) \in T \end{cases}$$

ただし、 $T = \{(i,j) \mid i \in I, j \in J_i\}$ である。

4.2 弱凸制約付き弱凸計画問題

関数 p が弱凸関数であるとは、ある凸関数 q と $\rho \geq 0$ で $p = q - \frac{\rho}{2} \|\cdot\|^2$ と表せるときをいう。次のような弱凸制約付き弱凸計画問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{最小化} && f(x) - \frac{\rho}{2} \|x\|^2 \\ & \text{条件} && f_i(x) - \frac{\rho_i}{2} \|x\|^2 \leq 0, \quad i \in I \end{aligned}$$

ただし、 $I = \{1, 2, \dots, m\}$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は凸関数、 $\rho \geq 0$, $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in I$) は多面凸関数、 $\rho_i \geq 0$ ($i \in I$) である。

定理 4.2. $I = \{1, 2, \dots, m\}$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は凸関数, $\rho \geq 0$, $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in I$) は多面凸関数 ($f_i = \max_{j \in J_i} (\langle a_j^*, \cdot \rangle + b_j)$), $\rho_i \geq 0$ ($i \in I$), $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) - \frac{\rho_i}{2} \|x\|^2 \leq 0, \forall i \in I\}$, $\bar{x} \in S$ とする。もし \bar{x} が S での $f - \frac{\rho}{2} \|\cdot\|^2$ の局所的最小点であるならば, 次の2つの条件をみたすようなある $\lambda_{(i,j)} \geq 0$ ($(i,j) \in T$) が存在する。

$$\begin{cases} \rho \bar{x} \in \partial f(\bar{x}) + \sum_{(i,j) \in T} \lambda_{(i,j)} (a_j^* - \rho_i \bar{x}) \\ \lambda_{(i,j)} (\langle a_j^*, \bar{x} \rangle + b_j - \frac{\rho_i}{2} \|\bar{x}\|^2) = 0, \forall (i,j) \in T \end{cases}$$

4.3 分数制約付き分数計画問題

次のような分数制約付き分数計画問題を考える。

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x)/g(x) \\ \text{条件} & f_i(x)/g_i(x) \leq c_i, i \in I \end{array}$$

ただし, $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は凸関数, $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in I$) は多面凸関数, $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in I$) は微分可能な凸関数, $g_i > 0$ ($i \in I$), $c_i \geq 0$ ($i \in I$) である。また, 制約集合上での f の値は非負, g の値は正である。

定理 4.3. $I = \{1, 2, \dots, m\}$, $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は凸関数, $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in I$) は多面凸関数 ($f_i = \max_{j \in J_i} (\langle a_j^*, \cdot \rangle + b_j)$), $g_i > 0$ をみたすような $g_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i \in I$) は微分可能な凸関数, $c_i \geq 0$ ($i \in I$), $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x)/g_i(x) \leq c_i, \forall i \in I\}$, $\bar{x} \in S$ とする。さらに, $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$, $\forall x \in S$ とする。もし \bar{x} が S での f/g の局所的最小点であるならば, ある $\lambda_0 \geq 0$ が存在して, 任意の $v \in \lambda_0 \partial g(\bar{x})$ に対して, 次の2つの条件をみたすようなある $\lambda_{(i,j)} \geq 0$ ($(i,j) \in T$) が存在する。

$$\begin{cases} v \in \partial f(\bar{x}) + \sum_{(i,j) \in T} \lambda_{(i,j)} (a_j^* - c_i \nabla g_i(\bar{x})) \\ \lambda_{(i,j)} (\langle a_j^*, \bar{x} \rangle + b_j - c_i g_i(\bar{x})) = 0, \forall (i,j) \in T \end{cases}$$

参考文献

- [1] M. S. BAZARAA, J. J. GOODE AND M. Z. NASHED, *On the cones of tangents with applications to mathematical programming*, J. Optim. Theory Appl., 13 (1974), pp. 389–426.
- [2] R. I. BOŢ, I. B. HODREA AND G. WANKA, *Farkas-type results for fractional programming problems*, Nonlinear Anal., 67 (2007), pp. 1690–1703.
- [3] R. I. BOŢ, I. B. HODREA AND G. WANKA, *Some new Farkas-type results for inequality systems with DC functions*, J. Global Optim., 39 (2007), pp. 595–608.

- [4] N. DINH, T. T. A. NGHIA AND G. VALLET, *A closedness condition and its applications to DC programs with convex constraints*, Optimization., 59 (2010), pp. 541–560.
- [5] N. DINH, B. MORDUKHOVICH AND T. T. A. NGHIA, *Subdifferentials of value functions and optimality conditions for DC and bilevel infinite and semi-infinite programs*, Math. Program., 123 (2010), pp. 101–138.
- [6] J. -B. HIRIART-URRUTY, *From convex optimization to nonconvex optimization. Necessary and sufficient conditions for global optimality*, in Nonsmooth Optimization and Related Topics, F. H. Clarke, V. F. Dem'yanov and F. Giannessi, eds., Plenum Press, New York, 1988, pp. 219–235.
- [7] V. JEYAKUMAR AND B. M. GLOVER, *Characterizing global optimality for DC optimization problems under convex inequality constraints*, J. Global Optim., 8 (1996), pp. 171–187.
- [8] A. S. STREKALOVSKY, *Extremal problems on complements of convex sets*, Cybernet. Systems Anal., 29 (1993), pp. 88–100.
- [9] H. TUY AND N. V. THUONG, *On the global minimization of a convex function under general nonconvex constraints*, Appl. Math. Optim., 18 (1988), pp. 119–142.
- [10] Y. SAEKI AND D. KUROIWA, *An observation of mathematical programming problems under reverse convex constraints*, preprint.