数理解析研究所講究録
第1821巻 2013年 257-262

分離可能凸関数における二者択一の定理

島根大学大学院総合理工学研究科 山本俊輔 (Shunsuke Yamamoto)
Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering, Shimane University
島根大学総合理工学部 鈴木　聡 (Satoshi Suzuki)
Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University
島根大学総合理工学部 黒岩大史 (Daishi Kuroiwa)
Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering, Shimane University

概 要

Farkas の補題をはじめとして，二者択一の定理は数理計画問題において双対性を示すために重要である。本論文では，[5] において示した分離可能凸関数における二者択一の定理を 2 つ紹介し，これまでの二者択一の定理との関係を考察する。

1 はじめに

本論文では以下の形式で表される二者択一の定理について考える。$f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, m$ とすると次のうちどちらか一方のみ成立する：

(i) $f_0(x) < 0, f_1(x) \leq 0, \ldots, f_m(x) \leq 0$ となる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在する

(ii) $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ が存在して，任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \geq 0$

1902 年に Farkas [1] は f_i, $i = 0, 1, \ldots, m$ が線形関数の場合の二者択一の定理を示した。この二者択一の定理は Farkas の補題としてよく知られており，数理計画問題において双対性を示すための重要な補題であるため，さまざまな拡張がなされてきた。2009 年，Jeyakumer と Li [2] は f_0 が劣線形関数，f_i, $i = 1, \ldots, m$ が分離可能劣線形関数の場合の二者択一の定理を証明した。

一方で，分離可能な凸関数についての最適化に関する研究が進められている。2009 年に Tseng [3] は分離可能凸計画問題における Lagrange の双対性定理を証明した。2010 年，Jeyakumer と Li [4] は分離可能凸計画問題について Lagrange の強双対性定理を示した。

本論文では，分離可能凸関数に関する二つの二者択一の定理について述べていく。一つは [2] で述べられた二者択一の定理の拡張であり，[4] の強双対性を用いる

ことによって証明が与えられる。もう一つはFarkasの補題の拡張であり，[2]が発想の元になっている。

本論文の構成を以下に述べる。まず第2章では準備として，凸解析に関する基本的な概念と，過去の結果について述べる。第3章では[4]の強双対性を用いることで，[2]の二者択一の定理を拡張する。第4章では，ある制限下で成立する二者択一の定理について述べ，得られた二者択一の定理とこれまでの結果について比較を行う。

2 準備

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ とする。f が劣線形関数であるとは，任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \mu \geq 0$ に対して，

$$f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda f(x) + \mu f(y)$$

となるときをいう。f が凸関数であるとは，任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in (0,1)$ に対して，

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

となるときをいう。また，f が分離可能関数であるとは，$f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$ が存在して，任意の $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して，

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) + f_2(x_2) + \cdots + f_n(x_n)$$

と表せるときをいう。次に f を凸関数とし，f の共役関数 $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ は以下のように定義される。

$$f^*(u) = \sup\{\langle u, x\rangle - f(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$$

なお $\langle u, x\rangle$ は二つのベクトル u と x の内積である。

$$\mathrm{epi} f = \{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq r\}$$

を f のエピグラフという。f に対して $x \in \mathbb{R}^n$ における方向 $d \in \mathbb{R}^n$ に関する方向微分係数は以下のように定義される。

$$f_i'(x; d) = \lim_{t \to +0} \frac{f_i(x + td) - f_i(x)}{t}$$

集合 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ に対して

$$\delta_A(x) = \begin{cases} 0 & (x \in A) \\ +\infty & (x \notin A) \end{cases}$$

で定義される関数 $\delta_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を A の標示関数という。

最初に，分離可能劣線形関数の場合の二者択一の定理を紹介する。

定理 2.1. ([2]) $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を劣線形関数, $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$ を分離可能劣線形関数とする。このとき次の (i), (ii) のどちらか一方のみが成立する：

(i) $f_0(x) < 0$, $f_1(x) \leq 0, \ldots, f_m(x) \leq 0$ となる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在する。

(ii) $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ が存在して，任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \geq 0$

この定理は Farkas の補題の拡張であり，これらの二者択一の定理は数理計画問題の双対性定理に深く関係している。

一方，分離可能凸関数についての最適化に関する研究が進められてきた。Tseng は，制約想定なしで次の Lagrange の双対性を示した。

定理 2.2. ([3]) $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, m$ を分離可能凸関数とする。このとき

$$\inf \{f_0(x) \mid f_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m\} = \sup_{\lambda_i \geq 0} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \right\}$$

が成立する。

また，Jeyakumar と Li は，以下の Lagurange の強双対性に関する結果を示した。

定理 2.3. ([4]) $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, を分離可能凸関数とする。このとき次の 3 つは同値：

(i) $\mathrm{epi} \inf_{\lambda_i \geq 0} \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i \right)^* = \bigcup_{\lambda_i \geq 0} \mathrm{epi} \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i \right)^*$

(ii) 任意の線形関数 $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対して，

$$\inf \{f_0(x) \mid f_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m\} = \max_{\lambda_i \geq 0} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \right\}$$

(iii) 任意の凸関数 $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対して，

$$\inf \{f_0(x) \mid f_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m\} = \max_{\lambda_i \geq 0} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \right\}$$

本論文では，これらの結果を元にして，分離可能凸関数の二者択一の定理を考察する。

3 分離可能凸関数の二者択一の定理の必要十分条件

まず，分離可能凸関数の二者択一の定理の必要十分条件を与える。

定理 3.1. ([5]) $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を分離可能凸関数とすると，次の3つは同値：

(A) $\operatorname{epi} \inf_{\lambda_i \geq 0} \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i \right)^* = \bigcup_{\lambda_i \geq 0} \operatorname{epi} \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i \right)^*$

(B) 任意の凸関数 $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対して，次のうちどちらか一方のみ成立する：

(i) $f_0(x) < 0, f_1(x) \leq 0, \ldots, f_m(x) \leq 0$ となる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在する。

(ii) $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ が存在して，任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \geq 0$

この定理は，定理2.1の拡張であるだけでなく，(B) を成立させる条件で (A) より弱いものはないという意味で，これ以上定理2.1を拡張することはできない。しかしながら，関数 f を制限することで二者択一が成り立つ場合がある。それを以下の例でみていく。

例 3.1. 関数 $f_{11}, f_{12} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が

$$f_{11}(x_1) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x_1+1)^2 & (x_1 < -1) \\ 0 & (-1 \leq x_1 \leq 1) \\ \frac{1}{2}(x_1-1)^2 & (x_1 > 1) \end{cases}$$

$$f_{12}(x_2) = |x_2|$$

で与えられる分離可能凸関数 $f_1(x_1, x_2) = f_{11}(x_1) + f_{12}(x_2)$ について考える。このとき，

$$f_1^*(y_1, y_2) = \frac{1}{2}y_1^2 + |y_1| + \delta_{[-1,1]}(y_2)$$

であり，

$$(\lambda_1 f_1)^*(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{y_1^2}{\lambda_1} + |y_1| + \delta_{[-\lambda_1,\lambda_1]}(y_2) & (\lambda_1 > 0) \\ \delta_{(0,0)}(y_1, y_2) & (\lambda_1 = 0) \end{cases}$$

が得られる。よって，

$$\operatorname{epi} \inf_{\lambda_1 \geq 0} (\lambda_1 f_1)^* = \{(x_1, x_2, \alpha) \mid |x_1| \leq \alpha\}$$

となるが，しかし，

$$\bigcup_{\lambda_1 \geq 0} \operatorname{epi}(\lambda_1 f_1)^* = \{(x_1, x_2, \alpha) \mid |x_1| < \alpha\} \cup \{(0,0,0)\}$$

であるから，(A) は不成立である。

今，線形関数 $f_0(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$ $(a, b \in \mathbb{R})$ を考える。この場合，次のうちどちらか一方のみ成立する：

(i) $f_0(x) \leq 0$, $f_1(x) < 0$ となるような $x \in \mathbb{R}^2$ が存在する。

(ii) $\lambda \geq 0$ が存在して，任意の $x \in \mathbb{R}^2$ に対して，$f_0(x) + \lambda f_1(x) \geq 0$

実際，$a \neq 0$ のとき (i) が成立，$a = 0$ のとき (ii) が成立し，(i) と (ii) は同時に成立しない。

4 分離可能凸関数のもう一つの二者択一の定理

前の章で述べた例に基いて，次の二者択一の定理を得た。

定理 4.1. ([5]) $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ を原点を通る分離可能凸関数とする。このとき (C) $\Rightarrow$ (D) が成立する。

(C) $\delta > 0$ が存在して，任意の $x \in B(0, \delta)$ と $i = 1, \ldots, m$ に対して $f_i'(0; x) = f_i(x)$ が成立する。ただし， $B(0, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \delta\}$.

(D) 任意の原点を通る凸関数 $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対して次のどちらか一方のみ成立：

(i) $f_0(x) < 0, f_1(x) \leq 0, \ldots, f_m(x) \leq 0$ となる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在する。

(ii) $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ が存在して，任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して
$f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \geq 0$

注意 4.1. 例 3.1 の関数に対して条件 (C) が成立する。すなわち，例 3.1 は (A) 不成立かつ (C) 成立となる。従って，「条件 (C)⇒ 条件 (A)」は成立しない。また次の例でみるように，「条件 (A)⇒ 条件 (C)」も成立しないことが判る。以上により，条件 (A) と条件 (C) の間には条件の強弱関係はない。

例 4.1. 次のような分離可能凸関数 $f_2(x_1, x_2) = f_{21}(x_1) + f_{22}(x_2)$ について考える。ただし，

$$f_{2j}(x_j) = \frac{1}{2}x_j^2 + |x_j|$$

とする。このとき，$f_2^*(y_1, y_2) = f_{21}^*(y_1) + f_{22}^*(y_2)$, ただし，

$$f_{2j}^*(y_j) = \begin{cases} \frac{1}{2}(y_j + 1)^2 & (y_j \in (-\infty, -1)) \\ 0 & (y_j \in [-1, 1]) \\ \frac{1}{2}(y_j - 1)^2 & (y_j \in (1, \infty)) \end{cases}$$

であるから，

$$\operatorname{epi}\left(\inf_{\lambda_2 \geq 0} (\lambda_2 f_2)^*\right) = \bigcup_{\lambda_2 \geq 0} \operatorname{epi}(\lambda_2 f_2)^* = \mathbb{R} \times [0, \infty)$$

となり，(A) は成立する。しかし，任意の $\delta > 0$ に対して $(\frac{1}{2}\delta, 0) \in B((0,0), \delta)$ であることから

$$f_2'((0,0);(\tfrac{1}{2}\delta,0)) = \tfrac{1}{2}\delta < \tfrac{1}{8}\delta^2 + \tfrac{1}{2}\delta = f_2(\tfrac{1}{2}\delta,0)$$

となり，(C) は成立しない。

定理 4.1 は原点を通る関数に制限したものであるが，これを原点以外に変えても定理は成立する。

系 4.1. ([5]) $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$,$f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $f_0(\bar{x}) = 0$ となる凸関数 $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ を $f_i(\bar{x}) = 0$ となる分離可能凸関数とする。このとき (C′) ⇒ (D′) が成立する。

(C′) $\delta > 0$ が存在して，任意の $x \in B(0,\delta)$ と任意の $i = 1, \ldots, m$ に対して $f_i'(\bar{x};x) = f_i(x+\bar{x}) - f_i(\bar{x})$

(D′) 次のうちどちらか一方のみ成立：

(i) $f_0(x) < 0, f_1(x) \leq 0, \ldots, f_m(x) \leq 0$ となる $x \in \mathbb{R}^n$ が存在する。

(ii) $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ が存在して，任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $f_0(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x) \geq 0$

参考文献

[1] J. Farkas, Theorie der einfachen Ungleichungen. J. Reine. Math. **124** (1902), 1–27.

[2] V. Jeyakumar and G. Y. Li, Farkas' lemma for separable sublinear inequalities without qualifications. Optim Lett. **3** (2009), 537–545.

[3] P. Tsng, Some convex programs without a duality gap. Math. Program. Ser. B **116** (2009), 553–578.

[4] V. Jeyakumar and G. Y. Li, New strong duality results for convex programs with separable constraints. European J. Oper. Res. **207** (2010), 1203–1209.

[5] S. Yamamoto, S. Suzuki and D. Kuroiwa, An obserevation of alternative theorem for separable convex functions, preprint.