数理解析研究所講究録
第 1822 巻 2013 年 32-34

Hall ドリフトの効果を考慮した磁場の誘導方程式の乱流や不安性

小嶌康史 (Yasufumi Kojima)
広島大学・大学院理学研究科 (Hiroshima University)

概要

電子の慣性長程度の小さなスケールではイオンは動くことができず、電子の運動のみが電流に寄与する。このようなスケールでの電磁流体力学ＥＭＨＤ (Electron Magnetic Hydro-Dynamics) はそれ以上のスケールの通常のＭＨＤと異なる状況が起こる。本稿ではＥＭＨＤの数理的側面と流体力学 (渦度方程式) との類似 (相違) 等にふれた。

1 はじめに

ＥＭＨＤ系の動力学は少なくとも以下の二つの物理問題で重要になる。

プラズマ物理学の分野ではＭＨＤスケールより小さな、電子慣性長程度の尺度ではイオンは動けず、ホール項が重要になる。また、天体物理学の分野では中性子星の殻の部分は金属が格子状態をなし、電子のみが動ける状態となる。中性子星の磁場は減衰するかとうかは観測的には決定されていないが、異なる磁場の大きさの中性子星が存在するのは確かである。ミリ秒パルサーと呼ばれる天体では 10^8 ガウス以下、通常のパルサーでは 10^{12} ガウス程度、さらに、マグネターと呼ばれる非常に強い磁場 (10^{13} ガウス以上) のものの存在が分かってきた。また、そのマグネターでは熱源 (Ｘ線放射) に磁場の減衰が関連しているとも考えられている。以上の異なる大きさの磁場が存在は種族であるか、あるいは何らかの要因で減衰するのか明確にする必要がある。ジュール熱による単純な概算では千万〜億年程度の減衰時間となり、顕著な効果ではない。ホール電流の効果を考えると減衰には直接関係しないものの、移流効果のため、ある場所に集積させて減衰させる可能性がある。

2 基礎方程式

誘導方程式と一般化されたオームの法則から、適切に規格化されたＥＭＨＤ系の基礎方程式は次となる。

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times (\vec{J} \times \vec{B}) + \mathcal{R}_m \nabla^2 \vec{B} \tag{1}$$

$$\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{B} \tag{2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{3}$$

ここで、電気電動度や電子数密度は一定と近似した。第二項はジュール拡散を示し，第一項のホール項による移流効果に影響されている。(例えば [1]) この方程式は次の非圧縮流体の渦度方程式との類似 (相違) がある。

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\Omega} = -\vec{\nabla} \times (\vec{V} \times \vec{\Omega}) + \mathcal{R}_e \nabla^2 \vec{\Omega} \tag{4}$$

$$\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V} \tag{5}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \tag{6}$$

対応関係

時間発展の方程式 (式 (1),(4)) を比較すれば、$B \Leftrightarrow \Omega$、$J \Leftrightarrow V$ であるが、電流 J(式 (2)) と渦度 Ω(式 (5)) の定義はそれぞれの 空間微分と積分の相違 がある。(明らかなことであるが、$B \Leftrightarrow V$、$J \Leftrightarrow \Omega$ に対応させても、微分と積分の差が生じる。)

この対応関係の差は以下の振る舞いに影響がでる。渦度方程式 (式 (4)) では短波長の波に対して必ず右辺第二項 (拡散項) が第一項 (移流項) が主要になるのに対し、磁場の誘導方程式 (式 (1)) では同じである。流体力学では渦はより小さな渦へカスケードし、拡散項が効くところで消失すると考えられているが、ホール効果を取り入れた磁場の発展ではどうなるか。

その他関連事項

ホール効果を取り入れた磁場の誘導方程式は一次元の Bergers モデルとの類似性 (例えば [2]) やホール項にともなう不安定性 (例えば [3]) も論じられている。

3 シミュレーションの紹介

3 次元箱型シミュレーション

近年の数値計算 [4, 5] の結果をまとめておく。ホール時間尺度での乱流、カスケード的遷移を調べたもので、例えば、エネルギースペクトラム $E(k) = k^{-p}$ の指数は簡単な次元解析からわかる $p = 7/3$ (流体のコロモゴロフの場合は $p = 5/3$) に近いベキ指数を示している。一方、逆カスケードの振る舞いも数値実験は示している。

天体の場合

移流拡散方程式を磁場が減衰するまでの永年的時間進化が計算されている (例えば [6, 7, 8])。磁場が強いとホール効果が有効になるが、近年の観測的興味が増してきたマグネター (中性子星) の磁場の減衰、フレア現象や熱源問題に関連するからである。結果は初期条件や境界状況によるが、トロイダルとポロイダルの磁場成分間で興味ある非線形結合がみられる。

4 最後に

移流拡散方程式 (式 (1),(4)) を取り上げた。移流項における非線形性が流体力学の興味ある数理 (乱流や不安定性など) に関係している。中性子星（クラスト）の永年的磁場の減衰の理論でも同様の方程式となり、今後両者の類似点や相違点を明確にすることが必要である。概念や数値計算法の共有も必要であろう。

地上実験室での条件がコントロールされたものの違い、天体物理学的尺度では情報は間接的である。しかしながら、極限的 (極端) な状況のものであり、理論的考察は不可欠である。例えば、天体現象であるマグネターのフレア ([9]) に何らかの磁場のカスケード的な統計性の発現の可能性を模索している。

参考文献

[1] Goldreich, P. & Reisenegger, A. (1992) ApJ, 395, 250

[2] Vainshtein, S. I. and Chitre, S. M.& Olinto, A. V. (2000) Phys. Rev. E. 61, 4422

[3] Rheinhardt, M. & Geppert, U. (2002) Phys. Rev. Lett. 88, 101103

[4] Cho, J. & Lazarian, A. (2009) ApJ, 701, 236

[5] Cho, J. (2011) Phys. Rev. Lett., 106, 191104

[6] Hollerbach, R. & Rudiger, G. (2002) MNRAS, 337, 216

[7] Pons, J.A. & Geppert, U. (2007) AA, 470, 303

[8] Kojima, Y. & Kisaka, S. (2012) MNRAS, 421

[9] Perna, R. & Pons, J.A. (2011) ApJ, 727, L51