数理解析研究所講究録
第1823巻 2013年 36-53

統計流体力学のレビュー

シェフィールド大学・数学統計学教室
大木谷 耕司 (Koji Ohkitani)
School of Mathematics and Statistics
The University of Sheffield

I. INTRODUCTION

Navier-Stokes 方程式に支配される3次元乱流場の統計性質を, 基礎方程式に基づいて演繹的に決定することは, 重大な未解決問題として知られている. Navier-Stokes 方程式の統計解を支配する方程式には, 大きく分けて2つの流儀がある. 1つは, 速度場の確率密度分布汎関数を扱う方法で, その支配方程式は Foias 方程式と呼ばれる. もう1つは, (分布汎関数の Fourier 変換である) 速度場の特性汎関数を扱う方法で, 支配方程式は Hopf 方程式と呼ばれる [1–5]. この原稿の主な目的は, Hopf 方程式にまつわる解析の試みを概観することであり, その上で筆者が気がついたことを付け加える.

これらは, 汎関数版の Duhamel 原理を導入して, Hopf 方程式を積分方程式に変形し, その逐次近似を与えること. Vishik-Fursikov による第一積分の方法を再考すること. また, Rosen らによる Hopf 汎関数の経路積分表示を再考することなどである. 講演では, Duhamel 原理の説明に先だって, 演算子法 (記号解法) の例をいくつか紹介した. 当初, これらを講究録に含めるつもりはなかったのだが, 何人か参加者の方より書いておいてほしいとの依頼を受けたので記録することにする.

ここに書いてあることは, 普段筆者が研究の主軸においているテーマでは**ない**. 無限次元の解析学に密接に関連する, この問題は難し過ぎるからである. 今回, 本研究会への参加に際して, あらためてこのようなアプローチを考え直してみたというのが実状である. 未開拓ゆえ危険な香りがするこの分野から, 今後面白いことが出てくる可能性は十分あり得ると思う. そのため, 文献はやや無責任かつ乱雑に記録した. 片手間にでもこのような問題を考える有志により, 新展開があることを期待する.

本稿で用いる, 数学的技巧は簡単で次の通りである: 与えられた関数 $P(x), Q(x)$ に対して, 未知関数 y に対する線型常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

を考える. 左辺を指数関数で書き換えると

$$e^{-\int^x Pdx}\frac{d}{dx}\left(e^{\int^x Pdx}y\right) = Q(x)$$

となる. これから特解が決まり, 一般解は

$$y = e^{-\int^x Pdx}\left(\int^x Qe^{\int^x Pdx}dx + C\right)$$

となる.

II. PDE の発見的解法

汎関数の微分方程式の解法を考察する前に, より簡単な偏微分方程式 (ないし常微分方程式) を取り上げる. 厳密な理論が作られる前に, どのような発見的な方法が試みられたかを思い起こすためである.

例) 波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

を教える際,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - a\frac{\partial}{\partial y}\right)u = 0$$

と因数分解し, 一般解を

$$u = f(y+ax) + g(y-ax)$$

と書き下す. ここで, f, g は任意関数. これは, 学部向けの講義で無意識に行っていることかも知れない.

例) 波動方程式 (source term つき)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \phi(x, y).$$

まず, 次の 1 階方程式を考える

$$\frac{\partial u}{\partial x} - a\frac{\partial u}{\partial y} = \phi,$$

すなわち

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - a\frac{\partial}{\partial y}\right)u = \phi.$$

指数関数の恒等式を使って, 左辺を次の様に書き換える

$$\left(e^{ax\frac{\partial}{\partial y}}\frac{\partial}{\partial x}e^{-ax\frac{\partial}{\partial y}}\right)u=\phi.$$

そうすれば, 左辺の演算子は反転できて

$$\begin{aligned} u &= e^{ax\frac{\partial}{\partial y}}\int^{x}e^{-ax'\frac{\partial}{\partial y}}\phi(x',y)dx' \\ &= \int^{x}\phi(x',y+a(x-x'))dx' \end{aligned}$$

となる.

先ほどの問題は, まず

$$u=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-a^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^{-1}\phi(x,y)$$

と記号的に書いた上で, 部分分数に展開する

$$=\left(2a\frac{\partial}{\partial y}\right)^{-1}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}-a\frac{\partial}{\partial y}\right)^{-1}-\left(\frac{\partial}{\partial x}+a\frac{\partial}{\partial y}\right)^{-1}\right]\phi(x,y).$$

その後で上の解法を当てはめるとよい

$$\begin{aligned} &= \left(2a\frac{\partial}{\partial y}\right)^{-1}\left[e^{ax\frac{\partial}{\partial y}}\int^{x}e^{-ax\frac{\partial}{\partial y}}\phi(x,y)dy-e^{-ax\frac{\partial}{\partial y}}\int^{x}e^{ax\frac{\partial}{\partial y}}\phi(x,y)dy\right] \\ &= \frac{1}{2a}\int^{y}\left(\Phi_1(x,y+ax)-\Phi_2(x,y-ax)\right)dy, \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \Phi_1(x,y) &= \int^{x}\phi(x,y-ax)dx+\psi(y), \\ \Phi_2(x,y) &= \int^{x}\phi(x,y+ax)dx+\chi(y) \end{aligned}$$

とおいた. 記号解法もこれ位になれば, 年季が入っている. この例は, Boole [6] の古い微分方程式の教科書に見られる. (この本には丁寧に演習問題までついている. 残念ながら解答はない.) なお, [7, 8] も参考になる.

例) 熱核

熱拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

の解を

$$u=\exp\left(\nu t\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u_0(x)$$

と記号的に書く. Gauss 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}dz = \sqrt{\pi}$$

で, 積分変数を $z \to z - l$ と置換する

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2+2zl}dz = \sqrt{\pi}e^{l^2}.$$

ここで l は定数だが, もし微分演算子で置き換えてよい $l = \sqrt{\nu t}\frac{\partial}{\partial x}$ (Forsyth [7]) と仮定すれば,

$$u = e^{\nu t\partial_x^2}u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2+2z\sqrt{\nu t}\partial_x}u_0(x)dz$$

が得られる. [この平方展開 (uncompletion of squares) の恒等式は経路積分の求値で有用である. 例えば, Schulman [9] p.325 を参照のこと.] 後は, シフト演算子 $e^{h\partial_x}f(x) = f(x+h)$ を考慮して

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}u_0(x+2z\sqrt{\nu t})dz = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}}u_0(y)dy$$

となる.

例) KdV 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = -6u\frac{\partial u}{\partial x}$$

この方程式に対する多重 Fourier 変換による形式解法は, 実解析の専門家をも驚かせた. (Coifman and Meyer [11], also [10]) 多重 Fourier 変換

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t),\ u_k(x,t) = \int e^{ix\sum_{i=1}^{k}\xi_i}\sigma_k(\xi,t)\nu(\xi_1)\ldots\nu(\xi_k)d\xi_1\ldots d\xi_k$$

を考え, その漸化式を導くと

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + \frac{\partial^3 u_k}{\partial x^3} = -3\frac{\partial}{\partial x}\sum_{j=1}^{k-1} u_j u_{k-j}.$$

分散項を吸い込むため, 新たな変数

$$\sigma_k(\xi,t) = e^{it\sum_{j=1}^{k}\xi_j^3}\sigma_k(\xi)$$

を導入すれば,

$$\sigma_k(\xi)\left(\sum_{i=1}^{k}\xi_i^3 - \left(\sum_{i=1}^{k}\xi_i\right)^3\right) = -3\left(\sum_{i=1}^{k}\xi_i\right)\sum_{j=1}^{k-1}\sigma_j(\xi_1,\ldots,\xi_j)\sigma_{k-j}(\xi_{j+1},\ldots,\xi_k)$$

が得られる. $k=2,3$ を計算してみると, その解は

$$\sigma_k = \frac{\xi_1+\ldots+\xi_k}{(\xi_1+\xi_2)(\xi_2+\xi_3)\ldots(\xi_{k-1}+\xi_k)}$$

となることが推測でき, 帰納的にその証明も出来る. したがって

$$u_k(x,t) = \frac{\partial}{i\partial x}\int \frac{1}{(\xi_1+\xi_2)(\xi_2+\xi_3)\ldots(\xi_{k-1}+\xi_k)}\Pi_{i=1}^{k}\nu_{x,t}(\xi_i)d\xi_1\ldots\xi_k,$$

$$\nu_{x,t} = e^{ix\xi+t\xi^3}\nu(\xi)$$

となる. ここで

$$C_\nu[f](\xi) \equiv \text{p.v.}\int \frac{1}{\xi+\eta}\nu_{x,t}(\eta)f(\eta)d\eta$$

を導入すれば,

$$u_k(x,t) = \frac{\partial}{i\partial x}\int \nu_{x,t}(\eta)(C_\nu)^{k-1}[1](\eta)d\eta$$

であり, もとの未知関数は

$$u(x,t) = \frac{\partial}{i\partial x}\int \nu(1-C_\nu)^{-1}(1)d\eta = \frac{\partial}{\partial x}\int \nu\psi d\eta$$

と書くことができる. ここで

$$\psi = 1 + \int \frac{1}{\eta+\xi}\nu(\eta)\psi d\eta.$$

逆散乱法における, Gelfand-Levitan の積分方程式 (と等価なもの) が, 自動的に導かれることに注意.

III. HOPF 方程式

まず, Hopf 方程式に関する文献として [12–20] をあげておく.

ここでは基礎的な立場からこの方程式を見直す. 考え方の説明のため, 簡単な Burgers 方程式を取り上げる. このモデル方程式の統計解については [21–25] など多くの文献がある. Burgers 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

に対する Hopf 特性汎関数は

$$\Phi[\theta(x),t] = \left\langle \exp\left(i\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\theta(x)dx\right)\right\rangle$$

と定義される．ここで $\langle\ \ \rangle$ は，アンサンブル平均である．これは Hopf 汎関数方程式 (Functional Defferential Equation, 以下 FDE)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{i}{2}\int \theta(x)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta^2 \Phi}{\delta \theta(x)^2}dx + \nu \int \theta(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\delta \Phi}{\delta \theta(x)}dx$$

を満たす．この方程式の一般的な解法は知られていない．

基礎方程式 (Burgers 方程式) において，非線型項を無視すれば，熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

に帰着する．対応する Hopf 方程式は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \nu \int \theta(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\delta \Phi}{\delta \theta(x)}dx$$

となり，その解は

$$\Phi[\theta(x),t] = \Phi_0\left[\frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}}\int \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4\nu t}\right)\theta(y)dy\right] \equiv \Phi_0[\exp(\nu t \triangle)\,\theta]$$

とかける．この場合，特性汎関数は本質的には変化せず，引数が熱核に従って自己相似的に発展するだけであることに注意．

この解法は，FDE 版の特性曲線法とみなすことができる [26–28]．この解を特性曲線法の結果と呼ぶこと自体は進歩と言えそうにないが，ここではもう少し踏み込むことにする．

まず，次の演算子 D

$$D \equiv \int dx\theta(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\delta}{\delta \theta(x)}$$

を導入して，上の解を (きわどい表現だが) 記号的に以下の様に書いておく

$$\Phi[\theta(x),t] = \exp\left(\nu t \int dx\theta(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\delta}{\delta\theta(x)}\right)\Phi_0[\theta] \equiv \exp(\nu t D)\,\Phi_0[\theta]$$

つまり

$$\exp(\nu t D)\,\Phi[\theta] \equiv \Phi[\exp(\nu t \triangle)\,\theta]$$

と定義する．ここで $\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ である．左辺の汎関数版 “シフト演算子” を上記の解によって定義する．つまり，解を定義に変える．その意味は，オペランド汎関数において引数 $\theta(x)$ を探し，それら全てを熱核で時間推進することである．

この約束の下で，Hopf 方程式を以下のように書き換えることができる

$$\exp(\nu t D)\,\frac{\partial}{\partial t}\exp(-\nu t D)\,\Phi[\theta] = -\frac{i}{2}\int \theta(x)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta^2\Phi}{\delta\theta(x)^2}dx.$$

そうすると Duhamel 原理が適用できて, Hopf 方程式を積分方程式に書き直すと,

$$\Phi[\theta(x),t] = \exp(\nu t D)\,\Phi_0[\theta] - \frac{i}{2}\int_0^t \exp(\nu(t-s)D)\int \theta(x)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta^2\Phi}{\delta\theta(x)^2}[\theta(x),s]dxds$$

となる. さらに演算子

$$G \equiv -\frac{i}{2}\int_0^t ds\exp(\nu(t-s)D)\int dx\theta(x)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta^2}{\delta\theta(x)^2}$$

を導入すれば, Hopf 方程式の積分方程式形は

$$\Phi = \tilde{\Phi} + G\Phi$$

と書ける. ここで $\tilde{\Phi} = \Phi_0[\exp(\nu t\triangle)\theta]$ は, 熱方程式の Hopf 汎関数である. (量力力学の散乱理論での Lipmann-Schwinger 方程式との類似に注意.) 逐次近似

$$\Phi_{n+1} = \tilde{\Phi} + G\Phi_n \ \ (n = 0,1,2,\ldots)$$

を導入すれば, Hopf 汎関数についての Neumann 級数表示

$$\Phi = (I-G)^{-1}\tilde{\Phi} = (I+G+G^2+G^3+\ldots)\tilde{\Phi}$$

が得られる. その第 1 近似は

$$\Phi \approx (I+G)\tilde{\Phi}$$

で, 散乱理論では Born 近似に相当する. この近似の意味を考えるために, 上記積分を数値的に評価する必要があろう.

IV. 第一積分の方法 (VISHIK-FURSIKOV 1973)

統計流体力学における unclosedness とは次の事である. 基礎方程式を記号的に

$$\frac{\partial u}{\partial t} = uu$$

と書く. 速度 u の 2 次モーメントの発展

$$\frac{d}{dt}\langle uu\rangle = \langle uuu\rangle$$

には, 3 次モーメントが絡む. 3 次モーメントの発展

$$\frac{d}{dt}\langle uuu\rangle = \langle uuuu\rangle$$

には, 4次モーメントが絡む. 右辺の source term に相当する項に, 常に高次モーメントが現れる (統計力学の BBGKY hierarchy の類似に注意). Hopf 方程式はこれらの無限個の連立偏微分方程式と等価であるが unclosedness のため, 特別の仮定を設けない限り最初の1つさえ解くことができない.

ところが, 視点を変えることにより, この unclosedness をある意味で解消することができることが知られている. その理論を紹介するため, 平均値に対する恒等式を復習する [29–34]. v の関数 $f(v)$ の期待値は適当な測度 μ を用いて

$$\langle f \rangle = \int_\Omega f(v)\mu(dv)$$

と書ける. 時間発展が関わる問題では, 時刻 t における期待値は (少なくとも) 以下の2通りに書くことが出来る

$$\langle f^t \rangle = \int_\Omega f(S_t v)\mu_0(dv) = \int_\Omega f(v)\mu_t(dv).$$

ここで, 確率保存を表す恒等式

$$\mu_t(dv) = \mu_0(S_t^{-1}dv) \quad \text{(Hopf identity)}$$

を用いた.

A. フーリエ変換

Burgers 方程式の, 速度 $v(x)$ のフーリエ変換を考える

$$u(x) = \int v(\xi)e^{i\xi x}d\xi.$$

(周期境界条件下の場合, フーリエ級数で置き換えるとよい.) 波数空間での基礎方程式

$$\frac{\partial v}{\partial t}(\xi,t) = -\frac{i\xi}{2}\int v(\xi-\eta)v(\eta)d\eta - \nu\xi^2 v(\xi)$$

は, 積分形では

$$v(\xi,t) = e^{-\nu\xi^2 t}v_0(\xi) - \frac{i\xi}{2}\int e^{\nu\xi^2(s-t)}\int v(\xi-\eta,s)v(\eta,s)d\eta ds$$

となる. 波数空間での速度場に対する Hopf 汎関数を

$$\phi[z(\xi),t] = \left\langle \exp\left(i\int_{-\infty}^{\infty} v(\xi)z(\xi)d\xi\right)\right\rangle$$

で定義する.

v の汎関数 $F[v(\xi,t),t]$ が時間に依存しないとき, これを第一積分という. その引数 $z(\xi)$ についての Taylor 展開を

$$F[v] = \sum_{r=0}^{\infty} \int_{\mathbf{R}^r} F^r(\eta_1 \dots \eta_r, t) v(\eta_1) \dots v(\eta_r) d\eta_1 \dots d\eta_r$$

と表す. ここで $F^0 = \mathrm{const.}$ である. 一般性を失うことなく F^r は, 引数に関する対称性をもつと仮定できる. 後の便宜のため, 初期時刻での r 次のモーメントを

$$M_0^r(\eta_1, \dots, \eta_r) = \langle v(\eta_1) \dots v(\eta_r) \rangle_0$$

で, また, 初期の Taylor 展開係数を

$$F^r(\eta_1 \dots \eta_r, 0) = \frac{i^r}{r!} z(\eta_1) \dots z(\eta_r) \equiv G^r(\eta_1 \dots \eta_r)$$

と定義しておく.

命題: Hopf 汎関数は, F を用いて

$$\phi[z(\xi),t] = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \int_{\mathbf{R}^r} F^r(\eta_1 \dots \eta_r, -t) M_0^r(\eta_1, \dots, \eta_r) d\eta_1 \dots d\eta_r$$

と表すことができる. この命題の説明は次節に回し, ここでは F^r の決め方を説明する.

第一積分の定義

$$\frac{d}{dt} F(v(\xi,t),t) = 0$$

から

$$\frac{\partial}{\partial t} F(v(\xi,t),t) + \int_{\mathbf{R}} \frac{\delta F(v(\xi,t),t)}{\delta v(\xi)} \frac{\partial v(\xi,t)}{\partial t} = 0$$

が導かれる. 最初の $r = 0, 1$ に対する Taylor 展開係数は

$$\frac{\partial F^0}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial F^1}{\partial t}(\eta_1, t) = \nu \eta_1^2 F^1(\eta_1, t)$$

を満たす. 一般に r-次の係数は

$$\frac{\partial F^r}{\partial t}(\eta_1, \dots, \eta_r, t) = \nu \left(\sum_{l=1}^{r} \eta_l^2 \right) F^r(\eta_1, \dots, \eta_r, t)$$

$$+ \frac{i}{2r} \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^{r} (\eta_l + \eta_k) F^{r-1}(\eta_1, \dots, \eta_l + \eta_k, \dots, \eta_r, t)$$

となる. r-次の展開係数の時間発展は, $r-1$-次までの展開係数で決定されていて, この意味で unclosedness は解消されていることに注意する. このことの物理的な意味は Vishik-Fursikov の論文でも議論はされていない. 筆者もその意味を言葉で言い表すことは今のところできない. (乱流の unclosedness について哲学的な議論を始めることは差し控える.)

最低次の係数は

$$F^1(\eta_1) = G^1(\eta_1)\exp(\nu t \eta_1^2)$$

と解ける. 一般の r 次では, 以下の漸化式

$$F^r(\eta_1,\dots,\eta_r,t) = G^r(\eta_1,\dots,\eta_r)\exp\left(\nu t\sum_{l=1}^{r}\eta_l^2\right)$$

$$+\frac{i}{2r}\sum_{\substack{k,l=1\\k\neq l}}^{r}\int_0^t \exp\left(\nu(t-s)\sum_{l=1}^{r}\eta_l^2\right)(\eta_l+\eta_k)F^{r-1}(\eta_1,\dots,\eta_l+\eta_k,\dots,\eta_r,s)ds$$

を取り扱うことになる. (ここで Duhamel 原理を使って, 積分方程式に変形してある.) Burgers 方程式ですら, 実際の計算はとても繁雑になるが, ともかく方程式が閉じているため原理的には逐次に計算は可能である.

特に, 基礎方程式が熱拡散方程式の場合, 非同次項がないので, 一般項はただちに得られ, よく知られた先ほどの結果に帰着する. 実際, この場合

$$F^r(\eta_1,\dots,\eta_r,t) = e^{\nu\sum_{l=1}^{r}\eta_l^2 t}F^r(\eta_1,\dots,\eta_r,0) = \frac{i^r}{r!}e^{\nu\eta_1^2 t}z(\eta_1)e^{\nu\eta_2^2 t}z(\eta_2)\dots e^{\nu\eta_r^2 t}z(\eta_r)$$

なので

$$\phi[z(\xi),t] = 1+\sum_{r=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^r}\frac{i^r}{r!}e^{-\nu\eta_1^2 t}z(\eta_1)e^{-\nu\eta_2^2 t}z(\eta_2)\dots e^{-\nu\eta_r^2 t}z(\eta_r)M_0^r(\eta_1,\dots,\eta_r)d\eta_1\dots d\eta_r$$

$$= \phi_0[e^{-\nu eta^2 t}z(\eta)].$$

この意味で第一積分の方法は, 特性曲線法の一般化になっている. もし Burgers 方程式より計算が簡単になる, 非線型方程式の例が見つかれば, この方法の特徴をもう少し明らかに出来るかも知れない.

なお, 物理空間においては対応する方程式は

$$\frac{\partial F^r}{\partial t}(x_1,\dots,x_r,t) + \sum_{l=1}^{r}\nu\frac{\partial^2}{\partial x_l^2}F^r(x_1,\dots,x_r,t)$$

$$+\frac{1}{r}\sum_{\substack{k<l\\k,l=1}}^{r}\frac{\partial}{\partial x_l}F^{r-1}(x_1,\dots,x_{r-1},t)\delta(x_k-x_l) = 0$$

となる. 例えば $r=2$ では

$$\frac{\partial F^2}{\partial t}(x_1,x_2,t)+\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)F^r(x_1,x_2,t)+\frac{1}{2}\frac{\partial F^1}{\partial x_1}\delta(x_1-x_2)=0$$

である. モーメントの次数が異なるので, 右辺にデルタ関数が現れることに注意.

B. 命題の説明

詳しい証明は [29] などを見られたい. v の汎関数 Ψ で 第一積分 $F[v,t]$ を初期化する

$$F[v,0]\equiv\Psi[v].$$

F は $t<0$ で well-posed であり, この逆向き時間発展により

$$F[v,-t]=\Psi[S_t v]$$

が成り立つ. よって

$$\begin{aligned}\int F[v,-t]\mu_0(dv)&=\int\Psi[S_t v]\mu_0(dv)\\&=\int\Psi[v]\mu_t(dv)\ \ (\text{Hopf identity による})\end{aligned}$$

が得られる. そこで

$$\Psi[v]\equiv\exp\left(i\int_{-\infty}^{\infty}v(\xi)z(\xi)d\xi\right)$$

と取れば, Hopf 汎関数に対する 第一積分 F による表現

$$\phi[z(\xi),t]=\int\Psi[S_t v]\mu_0(dv)=\int\Psi[v]\mu_t(dv)=\int F[v,-t]\mu_0(dv)$$

が得られる. 最右辺の式が重要で, まん中の 2 つはよく知られている. これらの 3 つを Taylor 展開を用いて, 順に書き下すと次の様になる

$$\begin{aligned}\phi[z(\xi),t]&=\int\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}v(\eta_1,t)\dots v(\eta_r,t)\frac{i^r}{r!}z(\eta_1)\dots z(\eta_r)d\eta_1\dots d\eta_r\right)\mu_0(dv).\\&=\int\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}v(\eta_1)\dots v(\eta_r)\underline{\frac{i^r}{r!}z(\eta_1)\dots z(\eta_r)}d\eta_1\dots d\eta_r\right)\mu_t(dv)\\&=\int\left(1+\sum_{r=1}^{\infty}v(\eta_1)\dots v(\eta_r)\underline{F^r(-t,\eta_1,\dots,\eta_r)}d\eta_1\dots d\eta_r\right)\mu_0(dv)\end{aligned}$$

第一積分 F による新たな表現は, Hopf 汎関数の引数部分 (下線部分) を時間を逆向きに発展したもの対応している. [何人かの参加者から, 量子力学における同値だが異なる表現 (Heisenberg 表示, Schrodinger 表示など) との類推を指摘された.]

Unclosedness は解消されたとは言え, 興味ある物理量が, 必ずしも有限回の操作で得られる訳ではない. 例えば k-次速度相関 M を求めるには, 以下のように k 次以上のすべての Taylor 展開係数を求め, 初期モーメントとの積分をすべての次数に渡って総和する必要がある.

$$M_t(x_1,\dots,x_k) = 1 + \sum_{r=k}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^r} F^r(\eta_1 \dots \eta_r, -t) M_0^r(\eta_1,\dots,\eta_r) d\eta_1 \dots d\eta_r,$$

ここで

$$F^k(\eta_1,\dots,\eta_k, t=0) = \exp i\,(\eta_1 x_1 + \dots + \eta_k x_k)\,,$$

$$F^k(\eta_1,\dots,\eta_r, t=0) = 0,\ (r \neq k)$$

である.

V. その他の話題

経路積分 Rosen(1960)

Hopf(1952) の論文が出て, 8 年後 Rosen によって Hopf 方程式の解の純粋に形式的な経路積分表示が与えられた [35]. また, [36, 37] も参照. 厳密な定義が与えられないのみならず, 物理的・直感的な正当化すらなされていない現状では, 数学解析の専門家なら思考が停止するだろう. この時期にそのような表現を書き下した, この数理物理学者はかなり特徴的だと思う. (余談だが [38] も驚きに値する.) 当時, これらの論文は我国の研究者の注意も引いたようである; 例えば [39–42]. しかし, 現在に至るまで, この経路積分表示から乱流について有意な結果を理論的に演繹した論文は見当たらないようである. なお, 汎関数積分の方法全般については [43–46] などがある.

ここで, 再び Burgers 方程式を使って, この表現を例示する. まず, Hopf 方程式の線型性から

$$\phi[\theta(x), t] = \int K[\theta(x), t|\theta'(x), t']\phi[\theta'(x), t]\mathcal{D}\theta$$

とグリーン関数 K を導入する. その" 分配関数" は

$$Z = K[\theta(x), t|\theta'(x), t'] = N \iint \exp\left(iS[\eta, \zeta]\right) \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\zeta$$

であり, "作用" は

$$S[\eta,\zeta]=\int_{t_0}^{t}dt\int dx\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\zeta+\eta Q[\zeta]\right),$$

と書ける. ここで

$$Q[u]\equiv-\frac{1}{2}\partial_x u^2+\nu\partial_x^2 u$$

とおいた. [37] によれば, 一般に normalization factor が積分変数に依存するので, [35] の式 (32) は 正しいが 式 (37) は誤りである.

もし ζ が Burgers 方程式を満足するなら, あるいは同じ事だが, もし η がその随伴方程式を満足するなら $S[\eta,\zeta]=0$ である. 量子力学の Schrodinger 方程式の場合, これは古典軌道に対応する. 量子力学においては, 経路積分表示の当初の利点は, 量子古典対応が直接みてとれることにあった. では, Rosen の経路積分表示において, 量子力学の「準古典近似」に相当するものは何だろうか.

Levy Laplacian (Feller [47])

もう一度, Burgers 方程式と対応する Hopf 方程式を並べてみる

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-u\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=-\frac{i}{2}\int\theta(x)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta^2\Phi}{\delta\theta(x)^2}dx+\nu\int\theta(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\delta\Phi}{\delta\theta(x)}dx.$$

Hopf 方程式の粘性項は, 1 階汎関数微分で表され, その部分だけなら特性曲線法が使える. 一方, Hopf 方程式の慣性項は, 2 階汎関数微分で表され, むしろ放物型の性格を持つ. 後者の項は, Laplacian の無限次元版である, Levy Laplacian と形が似ている. 特性曲線法と熱核の方法が, 現れる場所が逆転する点に注意.

Levy Laplacian は, Hilbert 空間上で以下のように定義される

$$\triangle_L U=2\lim_{\rho\to 0}\frac{\mathcal{M}_{(x_0,\rho)}U(x)-U(x_0)}{\rho^2},$$

ここで $\mathcal{M}$ は無限次元空間での, 中心 x_0, 半径 ρ のボールの上の平均を表す. Hilbert 空間の種類によって, 具体的な表現は変わる. 例えば, 数列のなす空間 l^2 なら

$$\triangle_L U(x_1,\ldots,x_n,\ldots)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_k^2}$$

となる. また, 汎関数からなる集合では

$$\triangle_L U(x(t))=\frac{1}{b-a}\int_a^b\frac{\delta^2 U[x]}{\delta x(s)^2}ds$$

である (functional Laplacian) などとなる.

$\mathbb{R}^n$ で, ポテンシャルを伴った熱拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \triangle u + Vu,\ u(x,0) = f(x)$$

の解が, Brown 運動によって表されることはよく知られている (Feynman-Kac 公式)

$$u(x,t) = E_x \left[f(X_t) \exp\left(\int_0^t V(X_s) ds \right) \right],$$

ここで X_t は Brown 運動の path, E_x は期待値を表す. Hopf 方程式の解の経路積分表示の理解の第一歩として, 無限次元の場合の

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \triangle_L U(x,t) + V(x,t)$$

を考え, 対応する Feynman-Kac 公式を導くことは助けにならないだろうか.

VI. おわりに

統計流体力学の基礎方程式である, Hopf 方程式に関するいくつかの話題をごく大雑把にサーベイした. 無限次元の解析という困難さを踏まえると, 何がしかの進歩を期待するためには, おそらく発見的な考察が必要であろう. このことを念頭において, より簡単な偏微分方程式 (ないし常微分方程式) に対する, 演算子法的な解法をいくつか冒頭で列挙した. その上で個人的に気がついたことを記録したが, これらはほとんど問題提起に過ぎず, かつ有意義な問題提起なのかどうかすら判然としないことをお断りしておく. 最後に, このような方法に対する見方を引用しておく.

Hopf 方程式のような極めて一般的なアプローチには, 実用性が乏しいと言う意味の批判もある:

「一方, E.Hopf は, 偶然量に関する 特性関数を拡張し, 任意の位相確率分布の Fourier 変換に相当する特性汎関数を導入して統計流体力学の問題を定式化した. 特性汎関数に関して Hopf が Navier-Stokes 方程式から導いた汎関数微分方程式は, 形式的に無限連立のモーメント方程式と同等で, しかも位相確率分布の発展をコンパクトに記述する. しかし, Hopf 方程式の解法を発見する試みは, まだ特筆すべき成果をあげていない. 」(「乱流」Rotta [48])
Monin-Yaglom vol.1 [3] の前書きにも同趣旨の記述がある.

他方, 経路積分表示についてだが, やや楽観的な見通しもある:

「何分, (35) は無限に近い多重積分であるので, このままでは積分が実行できない. その上,

$N \to \infty$ $(\delta t \to 0)$ のときの積分の収束性の問題や, C^N の無限大の処置, $\dfrac{\partial \eta}{\partial t}$ がどういう意味をもつかなど, 数学的には問題がいくつもあって, われわれはまだ実際的な意味で (32) と (35) の積分を特性汎関数方程式の解として受取るわけにはいかない. しかし, この汎関数積分を実行する方法が見出されて, 解が具体的に計算されるようになる以前においても, 解の定性的な性質だけはこの積分形から見当がつくという可能性は十分あるように思われる.」(巽 [49]) ここで, (32),(35) は Hopf 方程式の経路積分表示を指す. また, [5] も参照.

乱流への汎関数的方法によるアプローチが, 速記法としての方便以上の御利益をもたらすことができるか否か, 今後の進展を見守りたい.

---

[1] E. Hopf, "Statistical hydromechanics and functional calculus," J. Rat. Mech. Anal. 1, 87-123 (1952)

[2] E. Hopf and E.W. Titt, "On certain special solutions of the cfl-equation of statistical hydrodynamics, "J. Rat. Mech. Anal. 2 587(1953)

[3] A.S. Monin and A.M. Yaglom, "Statistical fluid dynamics: mechanics of turbulence," Vol. 1 (1971) and Vol. 2, (1975), MIT Press.

[4] 今村勤,「確率場の数学」(岩波書店, 1976).

[5] 井上淳,「汎関数微分方程式について- 汎関数空間上の解析学の勧め I, II」数学 42 170,261(1990)

[6] G. Boole, "A Treatise on Differential Equations," (Macmillan and co., 1877).

[7] A.R. Forsyth, "A Treatise on Differential Equations," (Macmillan and co., 1885; Dover 1997).

[8] 東京大学応用物理学教室編 (犬井鉄郎 代表),「微分方程式」(東京大学出版会,1960).

[9] L.S Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration*, (Dover, 2005).

[10] R. R. Rosales, "Exact solutions of some nonlinear evolution equations," Studies Appl. Math. 59, (1978) 117-151.

[11] R.R. Coifman and Y. Meyer, Nonlinear harmonic analysis, operator theory and P.D.E., *in* Beijing Lectures in Harmonic Analysis (Beijing, 1984), ed. E.M. Stein, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1986, 3–45.

[12] Al Dawtowicz, "On the existence of an invariant measure for a quasi-linear partial differential equation," Prace Matematyczne **23**, 117-123. (1982)

[13] VI Gishlarkaev, "Uniqueness of a solution to the Cauchy problem for the Hopf equation in the two-dimensional case," J. Math. Sci. **169**, 64-83 (2010).

[14] M.I. Vishik and A.I. Komec, "On the solvability of the Cauchy problem for the Hopf equation corresponding to a nonlinear hyperbolic equation," Amer. Math. Soc. translations **118**, 161-184 (1982).

[15] T. Alankus, "An exact representation of the space-time characteristic functional of turbulent Navier-Stokes flows with prescribed random initial states and driving forces," J. Stat. Phys. **54**, 859-872 (1989).

[16] T. Alankus, "The generating functional for the probability density functions of Navier-Stokes turbulence," J. Stat. Phys. **53**, 1261-1271 (1988).

[17] H.H. Shen and A. Wray, "Stationary turbulent closure via the Hopf functional equation," J. Stat. Phys. **65**, 33-52 (1991).

[18] P. Biler, "Critical nonlinearity exponent and self-similar asymptotics for Levy conservation laws," Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis, **18**, 613-637 (2001).

[19] H-P Breuer, F. Petruccione and F Weber, "On a Fourier space master equation for Navier-Stokes turbulence," Zeitschrift fur Physik B, **100**, 461-468 (1996).

[20] P. Biechele, "Stochastische Simulation der dreidimensionalen Turbulenz," PhD Thesis (2000).

[21] T Butler, "A Mathematical Example by Hopf with Features of turbulence," J. Math. Anal. Appl. **9**, 215-233 (1964).

[22] M-L Chabanol and J Duchon, "Markovian Solutions of Inviscid Burgers Equation," J. Stat. Phys, **114**, 525-534(2009).

[23] L. Carraro and and J Duchon, "Equation de Burgers avec conditions initiales a accroissements independants et homogenes," Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis, **15**, 431-458 (1998).

[24] A Karczewska, "Statistical solutions for a stochastic Burger's equation," Statistics & probability letters, **27**, 305-311 (1996).

[25] L Frachebourg and Ph. A. Martin, "Exact statistical properties of the Burgers equation," J. Fluid Mech. **417**, 323-349 (2000).

[26] H.D. Dahmen, G. Jona-Lasinio and J. Tarski, "The method of characteristics for functional-derivative equations" Il Nuovo Cimento 10A, 513(1972).

[27] M. Oberlack and M. Waclawczyk, "On the extension of Lie group analysis to functional differential equations," Arch Mech. **58**, 597-618(2006).

[28] M. Oberlack and M. Waclawczyk, "Application of Lie group analysis to functional differential

equations," eprint arXiv:math-ph/0610080.

[29] M.I. Vishik and A.V. Fursikov, "Analytic First Integrals of Nonlinear Parabolic Equations and Their Applications," Math. USSR Sbornik **21** 339(1973).

[30] M.I. Vishik and A.V. Fursikov, "Analytic first integrals of non-linear parabolic systems of differential equations in the sense of Petrovskil, and applications," Russ. Math. Surveys **29** pt.2 124-157(1974).

[31] M.I. Vishik and A.V. Fursikov, *Mathematical problems of statistical hydromechanics,* (Kulwer, Dordrecht and Boston, 1988).

[32] M.I. Vishik and A.V. Fursikov, "Analytical first integrals of the Burgers equation and of the Navier-Stokes system and their application," Reprint N 35 of Inst.of Mech. publ.of AN.USSR, 1-62(1974) (in Russian).

[33] M.I. Vishik and A.V. Fursikov, "The Hopf equation, statistical solutions, moment functions, corresponding to the Navier-Stokes system, and the Burgers equation," Reprint N 66 of Inst. of Mech. probl of ANUSSR, 1-68(1976) (in Russian).

[34] A. Cichocka and T. Cichocki, "On the Hopf functional of a certain semilinear partial differential equation," Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica, Fasciculus XXX 113-129 (1993). 誤植は多いが, 例題の１つとして参考になる.

[35] G. Rosen, Turbulence Theory and Functional Integration. I. and II." Phys. Fluids 3, 519-524 and 525-528 (1960)

[36] G. Rosen, *Formulation of Classical and Quantum Dynamical Theory,* (Academic Press, 1969).

[37] VI Tatarskii, "Application of the methods of quantum field theory to the problem of degeneration of homogeneous turbulence," Soviet Physics JETP 15, 961 (1962)

[38] G. Rosen, *A New Science of Stock Market Investing,* (Harper-Collins, 1990)

[39] 川原 琢治, "統計流体力学に於ける逐次近似解法" (乱流の分布汎函数方程式の研究会報告集) 数理解析研究所講究録 23 57-67 (1967).

[40] 川原 琢治, "特性汎函数方程式の解法：Tatarskiの仕事を中心に" (統計流体力学における近似解法の研究会報告集) 数理解析研究所講究録 80 1-13 (1970).

[41] I. Hosokawa, "Functional Approach to Classical Non-Equilibrium Statistical Mechanics," J. Math. Phys. 8, 221-229(1967).

[42] I. Hosokawa and K. Yamamoto, "Numerical Study of the Burgers' Model of Turbulence Based on the Characteristic Functional Formalism," Phys. Fluids 13, 1683 (1970).

[43] E.A. Novikov, "The convergence of a functional Taylor series for the characteristic functional of a random field," Uspekhi Mat. Nauk. 19(1964)195–197.

[44] E.A. Novikov, "Solutions of some equations with functional derivatives," Uspekhi Mat. Nauk. 16(1961)135–141.

[45] I. M. Gel'fand and A. M. Yaglom, "Integration in Functional Spaces and its Applications in Quantum Physics," J. Math. Phys. 1, 48 (1960).

[46] M.D. Donsker and J.L. Lions, "Frechet-Volterra variational equations, boundary value problems, and function space integrals," Acta Math. 108,147-228(19962).

[47] M.N. Feller, *The Levy Laplacian*, (Cambridge University Press, Cambridge, 2005).

[48] J.C. ロッタ, 「乱流」大路道雄 訳, (岩波書店, 1975).

[49] 巽 友正, 「統計流体力学 II」, 科学 38, 246(1968)