数理解析研究所講究録
第 1823 巻 2013 年 158-171

ランダムな外力を伴うグロス・ピタエフスキー方程式

東北大学大学院情報科学研究科
福泉 麗佳 (Reika Fukuizumi)
fukuizumi@math.is.tohoku.ac.jp

1 序

本講演録は Anne de Bouard 氏 (CMAP, Ecole Polytechnique, France) との共同研究に基づく.

以下のランダムなポテンシャルを伴う非線形 Schrödinger 方程式を考える. Bose-Einstein 凝縮や光学ファイバーのモデル方程式として現れる, 物理的に重要な方程式である.

$$i\partial_t\psi=\frac{1}{2}(-\Delta\psi+V(x)\psi)-i\gamma\psi+\lambda|\psi|^2\psi+\frac{1}{2}K(x)\psi\dot{\xi}(t),\ t\geq 0,\ x\in\mathbb{R}^d \tag{1.1}$$

例えば [1, 13] では, 方程式 (1.1) において $V(x)=K(x)=|x|^2$ としたものを光双極子力トラップ (all-optical far-off-resonance laser trap) 内に捕獲した Bose 凝縮体の波動関数を表すモデルとして使用している. 光双極子力トラップで凝縮体を捕まえる際に, レーザーの振動数が時間に依存してゆらぎ, 波動関数に与える影響は無視できない. そのため, ゆらぎの効果をポテンシャル内に入れる必要がある. 論文 ([1]) では, ゆらぎを表現する $\dot{\xi}(t)$ は相関 $\mathbb{E}(\dot{\xi}(t)\dot{\xi}(s))=\sigma_0^2\delta_0(t-s)$ で与えられる実数値ホワイトノイズとされている. 但し, δ_0 は原点での Dirac 測度であり, σ_0 は実数である. 係数 $\gamma\geq 0$ の消散項は非凝縮体と凝縮体間の相互作用を表す. 最後に, λ の符号は 2 体粒子間衝突における S 波散乱長 a の符号に関係しており, 正または負の値をとる.

関連した方程式はファイバー光学の分野でも登場する. 例えば, [2] では, 方程式 (1.1) において, $V\equiv 0$, $K(x)=|x|^2$ の場合が現れる. このモデルでは, $\dot{\xi}(t)$ は上述のモデルと同様に時間に関する実数値ホワイトノイズであり, ランダム媒質のファイバー内を伝わる光学ソリトンの伝搬を記述するために使用されている.

我々の目的は, これらのモデル方程式 (1.1) を数学的観点から正当化することである. 正確に問題設定と得られた結果を述べるために, フィルト

レーション $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ を備えた確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を考える. ここで, $\mathcal{F}_0$ は完備で, $W(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$ はフィルトレーション $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ に関連づいた 0 出発の実数値ブラウン運動とする. 方程式 (1.1) において $\dot{\xi}(t) = \sigma_0 \frac{dW}{dt}$ とおき, より一般的な非線形項を持つ確率非線形 Schrödinger 方程式

$$id\psi + \frac{1}{2}(\Delta\psi - V(x)\psi)dt - \lambda|\psi|^{2\sigma}\psi dt = \frac{\sigma_0}{2}K(x)\psi \circ dW \tag{1.2}$$

を考えることにする. 但し, $\sigma > 0$, $\sigma_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda = \pm 1$ であり, 右辺の $\circ$ は Stratonovich 積分を表す. 簡単のため, $\gamma = 0$ の場合のみ扱うが, 以下で述べる定理は容易に $\gamma > 0$ の場合に拡張される. さらに, 以後,

$$V(x) = K(x) = |x|^2 \tag{1.3}$$

の場合に限って話を進める. より一般的なポテンシャルに対しても以下の議論は適用できる (Remark 4.3 参照).

エネルギーが有限な空間に, ほとんど確実に経路を持つ解の存在について調べる. ここで言うエネルギーとは, $K \equiv 0$ の場合の保存量である,

$$H(\psi) = \frac{1}{4}|\nabla\psi|^2_{L^2} + \frac{1}{4}|x\psi|^2_{L^2} + \frac{\lambda}{2\sigma+2}|\psi|^{2\sigma+2}_{L^{2\sigma+2}} \tag{1.4}$$

のことであり, エネルギー有限な空間というのは

$$\Sigma = \{v \in H^1(\mathbb{R}^d),\ xv \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$$

で表現される.

2 記号

$p \geq 1$ に対して, $L^p(\mathbb{R}^d)$ を複素数値 p 乗可積分関数空間とし, L^p 空間でのノルムは $|\cdot|_{L^p}$ と書く. $p' \geq 1$ は $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ で与えられる指数 p の共役を表す.

$k \in \mathbb{N}$ に対して, 以下の空間を定義する.

$$\Sigma(k) = \left\{v \in L^2(\mathbb{R}^d),\ \sum_{|\alpha|+|\beta|\leq k} |x^\beta \partial_x^\alpha v|^2_{L^2} = |v|^2_{\Sigma(k)} < +\infty\right\}$$

$\Sigma(k)$ の L^2 の意味での共役空間を $\Sigma(-k)$ と記す. 特に $\Sigma(1)$ のことを Σ と記すことにする.

I は $\mathbb{R}$ の区間, E は Banach 空間, $1 \le r \le \infty$ のとき, $L^r(I,E)$ は I から E への Lebesgue 可測な関数 v で, $t \mapsto |v(t)|_E$ は $L^r(I)$ に属するような関数の集合とする. 空間 $C(I,E)$ も同様に定義する.

3 既知の結果

文献 [8] では, コンパクトな解の近似列を構成する方法によって, 空間 1, 2 次元の場合に方程式 (1.2)-(1.3) の解の存在と一意性を示した. 以下が詳しい結果である.

Theorem 1 *Assume that $\psi_0 \in \Sigma$ if $d=1$ or $\psi_0 \in \Sigma^2$ and $1/2 \le \sigma \le 1$ if $d=2$ then there exist a stopping time $\tau^*(\psi_0,\omega)$ and a unique solution $\psi(t)$ of (1.2)-(1.3), adapted to $(\mathcal{F}_t)_{t\ge 0}$ with $\psi(0)=\psi_0$, which is almost surely in $C([0,\tau],\Sigma)$, for any $\tau < \tau^*(\psi_0)$, where $\Sigma^2 = H^2 \cap \{(1+|x|^2)u \in L^2\}$. Moreover, $\tau^*(\psi_0,\omega)=+\infty$ or $\limsup_{t\nearrow\tau^*(\psi_0,\omega)} |\psi(t)|_\Sigma = +\infty$, a.s.*

しかしながら, 物理への応用で重要な空間 3 次元の場合には証明できず, 2 次元においても非線形項への仮定に制限がついており満足のいくものではない. なぜこのような結果なのか, 問題点を説明する.

まずは, 決定論的な場合, すなわち $V(x) = |x|^2$ かつ $K \equiv 0$ のとき, 方程式 (1.2) は $\lambda = \pm 1$ のとき $\sigma < \frac{2d}{d-2}$ if $d \ge 3$ あるいは $\sigma < +\infty$ if $d = 1,2$ に対して空間 Σ で時間局所的に適切であることが知られている. さらに, $\lambda = 1$, あるいは $\lambda = -1$ かつ $\sigma < 2/d$ の場合は時間大域的に適切となる (Oh [19] を参照). これらの結果は短い時間に対する分散型評価を利用して証明される. $U_0(t)$ を方程式 (1.2) で $V(x) = |x|^2$, $K \equiv 0$, $\lambda = 0$ とした場合の発展作用素とすると, $p \in [2,\infty]$, $0 < |t| \le \delta$ に対して,

$$|U_0(t)f|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \le C|t|^{-d(1/2-1/p)}|f|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)}, \quad f \in L^{p'}(\mathbb{R}^d) \tag{3.1}$$

が成立する. この評価は例えば, $K \equiv \lambda = 0$ のときに, $V(x) = |x|^2$ とした方程式 (1.2) と, $V \equiv 0$ とした方程式 (1.2) を関連付ける変換:

$$u(t,x) = \frac{1}{(\cos t)^{d/2}} e^{-\frac{i}{2}x^2 \tan t} v\Big(\tan t, \frac{x}{\cos t}\Big) \tag{3.2}$$

によって得られる. ここで, v は $V = K \equiv 0$, $\lambda = 0$ の場合の方程式 (1.2) の解である (Carles [4] 参照). 一度このような分散型評価 (3.1) が得られ

れば, Sobolev の埋め込み $H^1(\mathbb{R}^d) \subset L^{2\sigma+2}(\mathbb{R}^d)$ により, どんな空間次元 d においても非線形項をうまく扱うことができる. しかし残念なことに, $K \neq 0$ の場合に, 上の変換 (3.2) はうまく働かない.

ところで, ノイズの項も非線形項と同様に, 線形方程式からの摂動項として処理できないのか, と考えるかもしれない. [6] のように Stratonovich 積分を Itô 積分で表したときに出てくる修正項が, 線形作用素の定義域に属している場合には可能である. しかし, 今回の $K(x) = |x|^2$ の場合には同じように処理できない. 実際, (1.2)-(1.3) の Duhamel 形式の中に現れる確率積分項を見てみると, $L^2(\Omega, L^2(\mathbb{R}^d))$ での評価は以下のようになる. この最終項は, Itô 修正項からも出てくる. この考察から, 縮小写像構成のためには空間 Σ を考えるだけでは不十分である.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big(\Big|\int_0^t U_0(t-s)x^2\psi(s)dW(s)\Big|_{L^2}^2\Big) \\
&= \int_0^t \mathbb{E}(\big|U_0(t-s)x^2\psi(s)\big|_{L^2}^2)ds = \int_0^t \mathbb{E}\Big(\int x^4|\psi(s)|^2dx\Big)ds.
\end{aligned}$$

このため, 今回試みたことは,

$$id\psi + \frac{1}{2}(\Delta - |x|^2)\psi dt = \frac{\sigma_0}{2}|x|^2\psi \circ dW \tag{3.3}$$

に対する有限時間分散型評価を導出することである. もし導出に成功すれば, 上述の決定論的な場合と同様に非線形項のみ摂動として扱えばよい. そのために, ここで分散型評価に関する復習をしておく. 詳細は [23] を参照してもらいたい.

一般に,

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\Delta\psi - V(x,t)\psi) = 0, \quad \psi(s) = f$$

によって生成される発展作用素 $U(t,s)$ に対する分散型評価のためには, 作用素 $U(t,s)$ の積分核, つまり, 方程式の基本解 E:

$$U(t,s)f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} E(t,s,x,y)f(y)dy$$

の “良い” 性質が必要となる. 具体的にこの望まれる性質とは何か, 良く知られた例を挙げる.

- $V(x,t)=0$ の場合

$$E(t,0,x,y)=|2\pi it|^{-d/2}\exp\left\{\frac{i(x-y)^2}{2t}\right\},\quad t>0$$

- $V(x,t)=|x|^2$ の場合
$m\pi<t<(m+1)\pi$ $(m\in\mathbb{Z})$ に対して,

$$E(t,0,x,y)=\frac{e^{\frac{-im}{2}\pi}}{|2\pi i\sin t|^{d/2}}\exp\left\{\frac{i\{(|x|^2+|y|^2)\cos t-2x\cdot y\}}{2\sin t}\right\},$$

$$E(m\pi,0,x,y)=\exp\left(\frac{-im}{2}\pi\right)\delta_0(x-(-1)^m y)$$

と基本解が具体的に書け, 積分核の時間 t に関するオーダーが短い時間の分散型評価を与える.

したがって, 今回は方程式 (3.3) のために,

$$V(x,t)=|x|^2(1+\dot{W}(t))$$

の場合に対応する発展作用素の積分核を構成したい.

実は, このような問題に関するアプローチは多く知られている. 確率的な方法として, Zastawniak [24], Albeverio et al. [3] による結果があるが, [24] では方程式 (1.2) 中のポテンシャル $V(x),K(x)$ に対して有界性を仮定している. (正確に言えば, ポテンシャルは, $\mathbb{R}^d$ 上の有界複素ボレル測度のフーリエ変換であるという仮定である.) すなわち我々の場合に適用できない. [24] 以降も, [3] によって多くの発展がなされているが, 彼らの構成した積分核から非線形問題に応用が効くような情報が得られるのかは明らかでない.

4 得られた結果

これまでのセクションで説明した困難を克服するために, 確率的な問題をゲージ変換によって, 決定論的な問題に帰着させる, という発想を用いた. $\psi(t,x)$ が方程式 (3.3) の解だとする. ゲージ変換

$$\psi(t,x)=\exp\Big(-\frac{i|x|^2}{2}(\sigma_0 W(t)+t)\Big)u(t,x)\qquad(4.1)$$

によって, u は次の方程式を満たすことになる.

$$i\partial_t u = -\frac{1}{2}\Big(\nabla - iA(t,x)\Big)^2 u, \quad A(t,x) = x(\sigma_0 W(t) + t) \tag{4.2}$$

これは, ランダムな磁場作用下での Schrödinger 方程式であり, したがって, 固定した $\omega \in \Omega$ に対して, Yajima [22] による分散型評価の導出方法を適用しようという考えが浮かぶ.

実は, [22] の結果はそのまま方程式(4.2) に当てはめることができない. 具体的には, [22] では, ベクトルポテンシャル $A(t,x)$ に対する時間微分の一様有界性が仮定されており一方, 我々の場合は, $\dot{W}(t)$ はホワイトノイズであるため, 時間微分は超関数としてしか存在し得ない. しかしながら, ブラウン運動がほとんど確実に $C^\alpha(0 < \alpha < 1/2)$ の滑らかさを持つことを利用して, [22] における議論は我々の場合に一般化可能である. 本当は, この, 時間に関する Hölder 連続性は積分核構成のためではない. 実際, 発展作用素の具体的な積分核表示は [18] によっても, ポテンシャルが空間変数で $|x|^2$, 時間変数に関して連続なものに対して得られている. 以下に続くセクションで, Hölder 連続性を用いて引き出せる情報が, (4.2) の解のブラウン運動に関する連続性に貢献するため, 次の定理2の仮定には Hölder 連続性を含めている.

Remark 4.1 *ブラウン運動 $W(\cdot,\omega)$ が 時刻 t で連続になるような各 $t \geq 0$, と各 ω に対して, 線形作用素 $H_\omega(t) = \Big(\nabla - iA(t,x)\Big)^2$ は $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上で, 本質的自己共役であり, 閉包はその最大拡張と同じになる ([20], Theorem X.34). この拡張を同じ記号 $H_\omega(t)$ と書く. 作用素 $H_\omega(t)$ の定義域は, 各 $t \geq 0$ に対して次によって与えられ*

$$D(H_\omega(t)) = \{v \in L^2(\mathbb{R}^d), H_\omega(t)v \in L^2(\mathbb{R}^d)\},$$

この定義域は空間 $\Sigma(2)$ を含む.

Remark 4.2 *ゲージ変換 (4.1) について, $\sigma_0 W(t) + t = 0$ であるような (t,ω) に対しては, (3.3) において,*

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\Delta\psi$$

の場合に帰着されることに注意する.

まず, 線形方程式 (4.2) に対する結果を紹介する.

Theorem 2 *Let $T_0 > 0$ and $0 < \alpha < 1/2$ be fixed, and let $\omega \in \Omega$ be such that $W(\cdot, \omega) \in C^\alpha([0, T_0])$. There exists a positive number T_ω and a unique propagator $\{U^\omega(t,s), t, s \in [0, T_0], |t-s| \le T_\omega\}$ with the following properties.*

(i) $U^\omega(t,s)$ can be written in the form of an oscillatory integral operator as follows :

$$U^\omega(t,s)f(x) = (2\pi i(t-s))^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{iS(t,s,x,y)} a(t,s) f(y) dy, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

where $a(t,s)$ is a C^1 function of $t, s \in [0, T_0]$ with $|t-s| \le T_\omega$ satisfying $|a(t,s) - 1| \le C_{\omega,T_0}|t-s|$ for some constant C_{ω,T_0}. The real valued phase function $S(t,s,x,y)$ satisfies the Hamilton-Jacobi equations:

$$(\partial_t S)(t,s,x,y) + (1/2)\big((\nabla_x S)(t,s,x,y) - A(t,x)\big)^2 = 0,$$
$$(\partial_s S)(t,s,x,y) - (1/2)\big((\nabla_y S)(t,s,x,y) + A(s,y)\big)^2 = 0,$$

and the following property : for any multi-index γ, β, $\partial_x^\gamma \partial_y^\beta S \equiv 0$ if $|\gamma + \beta| \ge 3$ and

$$\left| \partial_x^\gamma \partial_y^\beta \left\{ S(t,s,x,y) - \frac{|x-y|^2}{2(t-s)} \right\} \right| \le C_{\gamma\beta}, \quad \text{if} \quad |\gamma + \beta| = 2.$$

(ii) The operator $U^\omega(t,s)$ is a linear, unitary operator in $L^2(\mathbb{R}^d)$, and satisfies

$$U^\omega(t,s) = U^\omega(t,h)U^\omega(h,s), \quad \text{for} \quad 0 \le s < h < t \le T_0, \quad |t-s| \le T_\omega.$$

Moreover, if $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, then $U^\omega(\cdot, s)f$ is continuous in t with values in $L^2(\mathbb{R}^d)$, and $\partial_t U^\omega(\cdot, s)f$ is continuous with values in $\Sigma(-2)$ and satisfies

$$i\partial_t U^\omega(t,s)f = -\frac{1}{2}\big(\nabla - iA(t,x)\big)^2 U^\omega(t,s)f, \quad \text{in} \quad \Sigma(-2).$$

Remark 4.3 方程式 *(1.2)* で, より一般のポテンシャル $V(x)$, $K(x)$ を考えた場合にも, 対応する方程式 *(4.2)* の 発展作用素を構成することは可能である. このとき, $A(t,x) = \frac{1}{2}(\nabla V(x)t + \sigma_0 \nabla K(x)W(t))$ である. 例えば, 滑らかな実数値ポテンシャル $V(x)$, $K(x)$ で以下の条件を満たすものに対しては, *[22]* にある同じ議論に従えば十分である.

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_x^\alpha V(x)|, \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\partial_x^\alpha K(x)| \leq C_\alpha, \quad |\alpha| \geq 2.$$

[22] では, 対応する輸送方程式の解の列で定義される振幅関数を持つ準古典近似での作用素 $U^\omega(t,s)$ の近似を行っている. 近似級数の収束の正当化は, *[11, 12, 22]* と同様, 今回の場合でも *Kumanogo-Taniguchi* の定理 *([15])* を使用すれば可能である. また, 論文 *[9]* では, $V(x) = \sum_{j=1}^d \nu_j x_j^2$, $K(x) = \sum_{j=1}^d \gamma_j x_j^2$, $\nu_j, \gamma_j \in \mathbb{R}$ の場合のみ詳しい証明を行っているが, これは大変特別で簡潔な場合で, 古典軌道が満たす連立微分方程式が線形なので近似級数の第 *1* 項だけが残り, 第 *2* 項以降がゼロとなる.

次に, 非線形方程式 (1.2) を解く. まずは, ゲージ変換後の方程式

$$i\partial_t u = -\frac{1}{2}\Big(\nabla - iA(t,x)\Big)^2 u + \lambda |u|^{2\sigma} u, \quad A(t,x) = x(\sigma_0 W(t) + t) \tag{4.3}$$

の解の存在を示す. より正確には, 初期値 $u(0) = u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ を持つ方程式 (4.3) と同値な積分形

$$u(t) = U^\omega(t,0)u_0 - i\lambda \int_0^t U^\omega(t,s)|u(s)|^{2\sigma} u(s) ds. \tag{4.4}$$

で解の存在を考える.

方程式 (4.3) において, 時間依存しないか, あるいは時間微分が有界な磁場ベクトルポテンシャル $A(t,x)$ を伴ったものの解の存在は, 線形方程式の発展作用素に対する [22] の結果を用いて既に証明されている ([5, 17]). これらの結果を, 良く知られた決定論的な偏微分方程式論による手法 ([14, 21]) で確率的な場合に拡張できる.

Proposition 1 *Assume $\sigma > 0$ and $\lambda = \pm 1$. Let $2/r = d(1/2 - 1/(2\sigma + 2))$.*

(i) Let $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ and $\sigma < 2/d$. Then there exists a unique global solution u of (4.4), adapted to $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, almost surely in $C([0,T_0]; L^2(\mathbb{R}^d)) \cap$

$L^r(0,T_0;L^{2\sigma+2}(\mathbb{R}^d))$ *for any* $T_0>0$. *Moreover, the* L^2 *norm is conserved:*

$$|u(t)|_{L^2}=|u(0)|_{L^2}, \quad a.s.\ in\ \omega, \quad for\ all\ t\geq 0,$$

and u *depends continuously on the initial data* u_0 *in the following sense: if* $u_{0,n}\to u_0$ *in* $L^2(\mathbb{R}^d)$, *and if* u_n *denotes the solution of (4.4) with* u_0 *replaced by* $u_{0,n}$, *then* $u_n\to u$ *in* $L^\infty(0,T_0;L^2)$.

(ii) Let $u_0\in\Sigma$ *and* $\sigma<2/d$. *Then there exists a unique global adapted solution* u *of (4.4) almost surely in* $C(\mathbb{R}^+;\Sigma)$.

(iii) Let $u_0\in\Sigma$, $\sigma<2/(d-2)$ *if* $d\geq 3$ *and* $\sigma<+\infty$ *if* $d=1,2$. *Then there exists a maximal time* $T^*=T^*_{u_0,\omega}>0$ *such that there exists a unique adapted solution* $u(t)$ *of (4.4) almost surely in* $C([0,T^*);\Sigma)$, *and the following alternative holds:* $T^*=+\infty$ *or* $T^*<+\infty$ *and* $\lim_{t\uparrow T^*}|u(t)|_\Sigma=+\infty$.

ゲージ変換 (4.1) によって非線形項の形は変わらない. さらに, 命題 1 によって与えられる (4.4) の解 $u(t)$ は $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-適合過程なので, 変換 (4.1) によって $\psi(t)$ も適合している. この事実を踏まえて, 方程式 (1.2)-(1.3) に関する以下の定理が得られる.

Theorem 3 *Assume* $\sigma>0$ *and* $\lambda=\pm 1$. *Let* $2/r=d(1/2-1/(2\sigma+2))$.

(i) Let $\psi_0\in L^2(\mathbb{R}^d)$ *and* $\sigma<2/d$. *Then there exists a unique global solution* $\psi(t)$ *of (1.2)-(1.3), adapted to* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *with* $\psi(0)=\psi_0$, *which is almost surely* $C(\mathbb{R}^+;L^2(\mathbb{R}^d))\cap L^r_{loc}(\mathbb{R}^+;L^{2\sigma+2})$. *Moreover, the* L^2 *norm is conserved by the time evolution, that is,*

$$|\psi_0|_{L^2}=|\psi(t)|_{L^2}, \quad a.s.\ in\ \omega, \quad for\ all\ t\geq 0.$$

(ii) Let $\psi_0\in\Sigma$ *and* $\sigma<2/d$. *Then there exists a unique global solution* $\psi(t)$ *of (1.2)-(1.3), adapted to* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *with* $\psi(0)=\psi_0$, *almost surely in* $C(\mathbb{R}^+;\Sigma)$.

(iii) Let $\psi_0\in\Sigma$ *and* $\sigma<2/(d-2)$ *if* $d\geq 3$, $\sigma<+\infty$ *if* $d=1,2$. *Then there exist a stopping time* $\tau^*=\tau^*_{\psi_0,\omega}>0$ *and a unique solution* $\psi(t)$ *of (1.2)-(1.3), adapted to* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *with* $\psi(0)=\psi_0$, *almost surely in* $C([0,\tau^*);\Sigma)$. *In fact,* $\tau^*=T^*$, *defined in Proposition 1 (iii).*

(iv) Let $\lambda = 1$, $\psi_0 \in \Sigma$ and $\sigma < 2/(d-2)$ if $d \geq 3$, $\sigma < +\infty$ if $d = 1, 2$. Then there exists a unique global solution $\psi(t)$ of (1.2)-(1.3) adapted to $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, with $\psi(0) = \psi_0$, almost surely in $C(\mathbb{R}^+; \Sigma)$.

上の (iv) の証明では, (1.4) で定義されているエネルギー汎関数 H を利用している. 実際, $R > 0$ と (4.4) の解 u に対して,

$$\tau_R = \inf\{t \geq 0, |u(\cdot)|_{L^\infty(0,t,\Sigma)} \geq R\}, \quad \tau^* = \lim_{R\to\infty} \tau_R$$

とすると, $\tau^* = T^*$ a.s. であり, 特に $\lambda = 1$ に対しては, エネルギー H を用いることで, Rに依存しない定数 C で, (1.2)-(1.3) の解 ψ を

$$\mathbb{E}\Big(\sup_{t\in\tau_R\wedge T} |\psi(t)|_\Sigma\Big) \leq C,$$

と評価できることがわかる.

5 結果の応用

上のセクションで得られた結果の 1 つの応用として, 次の問題を考える.

$m(t)$ を平均ゼロの定常過程とし, $\sigma_0^2 = 2\mathbb{E}\int_0^{+\infty} m(0)m(t)dt$ とする. 方程式

$$i\partial_t\varphi = \frac{1}{2}(-\Delta + |x|^2)\varphi - i\gamma\varphi + \lambda|\varphi|^2\varphi + \frac{1}{2\varepsilon}m\Big(\frac{t}{\varepsilon^2}\Big)|x|^2\varphi, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

において, ε がゼロに近づくとき, この方程式の解は方程式 (1.2)-(1.3) の解 ψ に収束するだろうか？

[13] では, 方程式 (1.1) において, このような「タイプ」の拡散近似を用いて, Bose-Einstein 凝縮体が崩壊する時間を調べている. （実際には凝縮体の波動関数にガウス関数形の ansatz を適用し, 凝縮体の幅を具体的に表す関数が満たす常微分方程式に関して拡散近似を行っている.) また, 数学的には [6, 16, 10] において, 分散制御 (dispersion management) 下での光学ファイバーモデルに対して拡散近似を証明している.

方程式 (1.2)-(1.3) に対しても拡散近似を正当化できるというのが, 以下の結果である. まずは, $m(t)$ に関して以下の仮定を置く.

Assumption (A). The real valued centered stationary random process $m(t)$ has trajectories a.s. in $L^\infty(0,T)$ for any $T>0$, and is such that for any $T>0$, the process $t\mapsto \frac{\varepsilon}{\sigma_0}\int_0^{t/\varepsilon^2} m(s)ds$ converges in distribution in $C([0,T])$ to a standard real valued Brownian motion.

Theorem 4 *Let $0<\sigma<2/d$ and $\lambda=\pm 1$. Suppose that $m(t)$ satisfies Assumption (A) above. Then, for any $\varepsilon>0$ and $\psi_0\in L^2(\mathbb{R}^d)$ there exists a unique solution φ_ε, with continuous paths on $\mathbb{R}^+$ with values in $L^2(\mathbb{R}^d)$, of the following equation:*

$$\begin{cases} i\partial_t\varphi = & \dfrac{1}{2}(-\Delta+|x|^2)\varphi+\lambda|\varphi|^{2\sigma}\varphi+\dfrac{1}{2\varepsilon}m\Big(\dfrac{t}{\varepsilon^2}\Big)|x|^2\varphi, \\ \varphi(0)= & \psi_0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Moreover the process φ_ε converges in distribution in $C([0,T];L^2(\mathbb{R}^d))$ as ε tends to zero, to the solution ψ of (1.2)-(1.3) with $\psi(0)=\psi_0$, for any positive T.

(5.1) の解 φ_ε の存在はセクション4の結果より保証されている. この定理4は, [6, 16] の方針と同様, 方程式 (4.3) の解の, ブラウン運動の経路 $W(\cdot,\omega)$ に関する連続依存性を利用して示される.

Proposition 2 *Assume $0<\sigma<d/2$. Let $T_0>0$ and $0<\alpha<1/2$ be fixed, and for $R>0$, let B_R be the closed ball of radius R in $C^\alpha([0,T_0])$. Then, for any $u_0\in L^2(\mathbb{R}^d)$, the mapping*

$$\begin{array}{ccc} W & \mapsto & u^W \\ B_R & \to & C([0,T_0];L^2(\mathbb{R}^d)) \end{array}$$

is continuous, where u^W is the unique solution of (4.3) given in (i) of Proposition 1, and where B_R is endowed with the topology of $C([0,T_0])$.

命題2の証明は, 定理2で得られた発展作用素 $U^\omega(t,s)$ の性質を利用する. $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して, $U^\omega(\cdot,s)f$ は (4.2) の強解であることがわかっており, 従って, $\omega\in\{\omega\in\Omega,\ W(\cdot,\omega)\in C^\alpha([0,T_0])\}$ $(0<\alpha<1/2)$ を満たす ω に対して $U^\omega(t,s)f$ は $W(\cdot,\omega)$ の関数である. よって, $U^\omega(t,s)$ を $U^W(t,s)$ と書くことにすると, 次が成り立つ.

Proposition 3 *Let $T_0 > 0$ $R > 0$ and $M > 0$ be fixed. There exist a $T_R > 0$, and a constant $C_{R,T_0,M} > 0$ such that if $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ with supp$(f) \subset B(0,M)$, and if $W_1, W_2 \in B_R$, then for any $t, s \in [0, T_0]$ with $|t-s| < T_R$ we have*

$$
\begin{aligned}
&|(U^{W_1}(t,s) - U^{W_2}(t,s))f|_{L^2} \\
&\le C_{R,T_0,M}|W_1 - W_2|_{C([0,T_0])}\Big(|f|_{L^2} + \sum_{|\gamma|\le \frac{d}{2}+3} |\partial_y^\gamma f|_{L^1}\Big),
\end{aligned}
$$

where B_R is the centered ball in $C^\alpha([0,T_0])$ with radius R, and $U^W(t,s)$ is the unique propagator of (4.2).

最後に, 非線形項については Strichartz 評価を用い, ゲージ変換 (4.1) を行えば, 方程式 (1.2)-(1.3) の解 ψ に対しても命題 2 の意味での連続依存性が言える.

Remark 5.1 実は, *[13]* で扱われているモデルは, 方程式 *(1.2)* で非線形項の次数が $\sigma = 2/d$ の場合である. 上の定理 *4* では, この場合は含まれていないため, 改善の余地がある.

参考文献

[1] F.Kh. Abdullaev, B.B Baizakov and V.V. Konotop, "Dynamics of a Bose-Einstein condensate in optical trap", in: Nonlinearity and Disorder : Theory and Applications, edited by F.Kh. Abdullaev, O. Bang and M.P. Soerensen, NATO Science Series vol. 45, Kluwer Dodrecht, 2001.

[2] F.Kh. Abdullaev, J.C. Bronski and G. Papanicolaou, "Soliton perturbations and the random Kepler problem", Physica D **135** (2000) 369–386.

[3] S. A. Albeverio, R. J. Høegh-Krohn and S. Mazzucchi, "Mathematical theory of Feynman path integrals", Lecture Notes in Math. **523**, 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin, (2008).

[4] R. Carles, "Linear v.s. nonlinear effects for nonlinear Schrödinger equations with potential", Commun. Contemp. Math. **7** (2005) 483–508.

[5] A. de Bouard, "Nonlinear Schrödinger equations with magnetic fields", Differential and Integral Equ. **4** (1991) 73–88.

[6] A. de Bouard and A. Debussche, "The stochastic nonlinear Schrödinger equation in H^1", Stochastic Anal. Appl. **21** (2003) 97–126.

[7] A. de Bouard and A. Debussche, "The nonlinear Schrödinger equation with white noise dispersion", J. Funct. Anal. **259** (2010) 1300–1321.

[8] A. de Bouard and R. Fukuizumi, "Stochastic fluctuations in the Gross-Pitaevskii equation", Nonlinearity **20** (2007) 2821–2844.

[9] A. de Bouard and R. Fukuizumi, "Representation formula for stochastic Schrödinger evolution equations and applications", Preprint.

[10] A. Debussche and Y. Tsutsumi, "1D quintic nonlinear Schrödinger equation with white noise dispersion", J. Math. Pure. Appl. (2011)

[11] D. Fujiwara, "A construction of the fundamental solution for the Schrödinger equation", J. Analyse Math. **35** (1979) 41–96.

[12] D. Fujiwara, "Remarks on convergence of the Feynman path integrals", Duke Math. J. **47** (1980) 559–600.

[13] J. Garnier, F.Kh. Abdullaev and B.B. Baizakov, "Collapse of a Bose-Einstein condensate induced by fluctuations of the laser intensity", Phys. Rev. A **69** (2004) 053607, 369–386.

[14] T. Kato, "On nonlinear Schrödinger equations", Ann. Inst. H. Poincaré. Phys. Theor. **46** (1987) 113–129.

[15] H. Kumano-go and K.Taniguchi, "Fourier integral operators of multi-phase and the fundamental solution for a hyperbolic system", Funkc.Ekva. **22** (1979) 161–196.

[16] R. Marty, "On a splitting scheme for the nonlinear Schrödinger equation in a random medium", Commun. Math. Sci. **4** (2006) 679–705.

[17] L. Michel, "Remarks on nonlinear Schrödinger equation with magnetic fields", Comm. Partial Differential Equ. **33** (2008) 1198–1215.

[18] K. Nishiwada, "Explicit formulae for solutions of Schrödinger equations with quadratic Hamiltonians", Poc. Japan. Acad. **56** Ser.A (1980) 362–366.

[19] Y. G. Oh, "Cauchy problem and Ehrenfest's law of nonlinear Schrödinger equations with potentials", J. Differential Equ. **81** (1989) 255–274.

[20] M. Reed and B. Simon, "Methods of modern mathematical physics II: Fourier analysis, self-adjointness", Academic Press 1975.

[21] Y. Tsutsumi, "L^2-solutions for nonlinear Schrödinger equations and nonlinear groups", Funkc.Ekva. **30** (1987) 115–125.

[22] K. Yajima, "Schrödinger evolution equations with magnetic fields", J. Analyse Math. **56** (1991) 29–76.

[23] K. Yajima, "シュレーディンガー方程式の分散型評価", 数学 **62** 日本数学会 (2010).

[24] T.J. Zastawniak, "Fresnel type path integral for the stochastic Schrödinger equation", Lett. Math. Phys. **41** (1997) 93–99.