

## Invariant Theory in Exterior Algebras

伊藤稔 (鹿児島大学理学部)

Minoru ITOH (Faculty of Science, Kagoshima University)

### 序文

外積代数における不変式論を考える. 今回考えるのは主に正方行列のなすベクトル空間の上の外積代数で, この中の conjugation による不変元を調べる. つまり  $V$  を  $n$  次元の複素ベクトル空間,  $V^*$  をその双対空間として,  $V \otimes V^*$  上の外積代数  $\Lambda(V \otimes V^*)$  における  $GL(V)$ -不変元に注目する.

これはよく知られていることの反可換版に当たる.  $V \otimes V^*$  上の対称テンソル代数 ( $\cong V \otimes V^*$  上の多項式関数のなす環  $\mathcal{P}(V \otimes V^*)$ ) における  $GL(V)$ -不変元の構造はよくわかっていて,  $GL(V)$ -不変元全体は  $n$  変数多項式環と同型になる (不変元は固有多項式の係数から生成されて, この  $n$  個の係数は代数的に独立だから). 今回考えるのはこれの反可換版ということになる. 結論を言えば,  $\Lambda(V \otimes V^*)^{GL(V)}$  もやはり  $n$  個の元から生成される. そしてこの  $n$  個の生成元は互いに反可換で, この反可換性以外の関係式を持たない. つまり  $\Lambda(V \otimes V^*)^{GL(V)}$  は  $n$  次元ベクトル空間上の外積代数と同型となる. このように可換版と反可換版で比較すると, 非常にパラレルになっている.

このようなパラレルな様子はさらに Cayley–Hamilton 定理に関しても見られる. 可換な枠組みでは固有多項式に関わる重要な定理で Cayley–Hamilton 定理があるが, この類似が反可換な枠組みの生成元に関しても成立するのである. ただし元の Cayley–Hamilton 定理が  $n$  次の関係式なのに対して, この類似は  $2n - 1$  次の関係式となる. この反可換版の Cayley–Hamilton 定理は polynomial identity の理論の先駆けになった Amitsur–Levitzki 定理とも深く関係する (言わば Amitsur–Levitzki 定理の精密化と見なせる).

Amitsur–Levitzki 定理にはいくつか類似の定理があるが, それらも別の外積代数の不変式環に対応づけられる.

非可換な枠組みの Cayley–Hamilton 定理は [GKLLRT] などで研究されているが, 本稿で与える Cayley–Hamilton 型の定理はそれとはまた別種のものである.

$P(V \otimes V^*)^{GL(V)}$  の元が固有値の対称多項式と一致することを思い出すと,  $\Lambda(V \otimes V^*)^{GL(V)}$  の元も何らかの意味で対称式の類似と見なしたくなる. この類似が成立するとして, 冪和対称式, 基本対称式, 完全斉次対称式の対応物はそれぞれ何になるだろうか. このことの考察もおこなう. おもしろいことに, 反可換な枠組みではこれらの3系列の対称式は区別がなくなってしまうようである.

### 1. $\Lambda(V \otimes V^*)$ の $GL(V)$ -不変元

外積代数  $\Lambda(V \otimes V^*)$  の  $GL(V)$ -不変元について調べる. ただし  $V$  を  $n$  次元の複素ベクトル空間,  $V^*$  をその双対空間とする.

まず  $\Lambda(V \otimes V^*)^{GL(V)}$  の生成元を求めよう. 結論を言えば,  $\Lambda(V \otimes V^*)^{GL(V)}$  は次の元たちから生成されることになる:

$$q_k = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} x_{i_1 i_2} \wedge x_{i_2 i_3} \wedge \cdots \wedge x_{i_k i_1}.$$

今後は外積代数の積の記号 “ $\wedge$ ” は省略して, 次のように書くことにしよう:

$$q_k = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} x_{i_1 i_2} x_{i_2 i_3} \cdots x_{i_k i_1}.$$

ここで  $x_{ij}$  は  $V \otimes V^*$  の標準的な基底であり, 外積代数  $\Lambda(V \otimes V^*)$  はこれらから生成される.  $q_k$  はこの外積代数の生成元を成分とする行列  $X = (x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  を用いて簡潔に  $q_k = \text{tr}(X^k)$  と表せる.

この  $q_k$  は  $k$  が偶数なら 0 になる (つまり  $q_{2r} = 0$ ) が, これは次の等式からわかる:

$$q_{2r} = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_{2r} \leq n} x_{i_1 i_2} x_{i_2 i_3} \cdots x_{i_{2r} i_1} = - \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_{2r} \leq n} x_{i_2 i_3} \cdots x_{i_{2r} i_1} x_{i_1 i_2} = -q_{2r}.$$

第二の等号で左端の  $x_{i_1 i_2}$  を右端に移動させていて, この際に奇数個の元を飛び越えるので符号が反転することになる.

また  $k \geq 2n$  なら  $q_k = 0$  となる. これは次の節で Cayley-Hamilton 型の定理からわかる.

この  $q_k$  たちが  $\Lambda(V \otimes V^*)^{GL(V)}$  を生成するのである. まずはこの元たちの  $GL(V)$ -不変性を見る:

**命題 1.1.**  $q_k$  は  $GL(V)$ -不変である.

**証明.**  $q_k = \text{tr}(X^k)$  という関係と次の等式からわかる:

$$\pi(g)X = (\pi(g)x_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} = {}^t g X {}^t g^{-1}.$$

ただし  $GL(V)$  の  $\Lambda(V \otimes V^*)$  への自然な作用を  $\pi$  と書いている. □

さらにこれらが生成系となることは、ベクトル不変式に関する不変式論の第一基本定理からわかる:

**定理 1.2.**  $\Lambda(V \otimes V^*)^{GL(V)}$  は  $q_1, q_3, \dots, q_{2n-3}, q_{2n-1}$  で生成される. さらにこれらの生成元は互いに反可換であり, この反可換性以外に関係式を持たない. すなわち次は  $\Lambda(V \otimes V^*)^{GL(V)}$  の線型基底をなす:

$$\{q_{k_1} \cdots q_{k_d} \mid k_1, \dots, k_d: \text{odd}, 0 < k_1 < \cdots < k_d < 2n, d = 0, 1, \dots, n\}.$$

よって  $\Lambda(V \otimes V^*)^{GL(V)}$  は  $n$  次元ベクトル空間上の外積代数と同型である.

**証明.** 外積代数  $\Lambda(V \otimes V^*)$  の斉次部分への分解  $\Lambda(V \otimes V^*) = \bigoplus_{k=0}^{n^2} \Lambda_k(V \otimes V^*)$  は  $GL(V)$ -空間としての分解である. よって  $\Lambda_k(V \otimes V^*)$  の  $GL(V)$ -不変元を記述すればよい. 次の写像  $(V \otimes V^*)^{\otimes k} \rightarrow \Lambda_k(V \otimes V^*)$  は  $GL(V)$ -空間としての全射な準同型である:

$$e_{i_1} \otimes e_{j_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \otimes e_{j_k}^* \mapsto x_{i_1 j_1} \cdots x_{i_k j_k}.$$

よって  $\Lambda_k(V \otimes V^*)$  の任意の  $GL(V)$ -不変元は  $(V \otimes V^*)^{\otimes k}$  の  $GL(V)$ -不変元から来る. ベクトル不変式に関する不変式論の第一基本定理から,  $(V \otimes V^*)^{\otimes k}$  の  $GL(V)$ -不変元は

$$\sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} e_{i_1} \otimes e_{i_{\sigma(1)}}^* \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \otimes e_{i_{\sigma(k)}}^*$$

というかたちの元 (ただし  $\sigma \in S_k$ ) の一次結合で書ける [GW]. これの像

$$\sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} x_{i_1 i_{\sigma(1)}} \cdots x_{i_k i_{\sigma(k)}}$$

を整理すると  $q_1, q_3, q_5, \dots$  の積 (に符号をつけたもの) になる. よって  $\Lambda_k(V \otimes V^*)$  の  $GL(V)$ -不変元は  $q_1, q_3, q_5, \dots$  の積の一次結合で書ける.

次の節で見るとように  $q_{2n+1}, q_{2n+3}, \dots$  はすべて 0 になるので, これで  $q_1, q_3, \dots, q_{2n-1}$  が生成系になることがわかる.

最後にこれらの生成元の関係式を見極めよう. まず  $q_1, q_3, \dots, q_{2n-1}$  が互いに反可換であることは, これらが奇数次の元であることからわかる. さらに  $q_{k_1} \cdots q_{k_d}$  というかたちの元たちの線型独立性を示すには,  $q_1 q_3 \cdots q_{2n-3} q_{2n-1} \neq 0$  を示せばよい. そこで  $\Lambda(V \otimes V^*)$  の次の元に注目する ( $X$  の成分をすべて掛け合わせたもの):

$$x_{11} x_{12} \cdots x_{1n} \times x_{21} x_{22} \cdots x_{2n} \times \cdots \times x_{n1} x_{n2} \cdots x_{nn}.$$

この元は  $GL(V)$ -不変だから  $q_1, q_3, \dots, q_{2n-1}$  で生成される. しかしこの元は  $n^2$  次だから,  $q_1, q_3, \dots, q_{2n-1}$  をすべて掛け合わせる必要がある ( $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$ ). よって  $q_1 q_3 \cdots q_{2n-1}$  は 0 にはなりえない.  $\square$

## 2. CAYLEY-HAMILTON 型の定理

不変元の生成系  $q_1, q_3, \dots, q_{2n-1}$  と外積代数の生成元を成分とする行列  $X$  に関して Cayley-Hamilton 定理の類似が成立する:

**定理 2.1.**  $\text{Mat}_n(\Lambda(V \otimes V^*))$  において次がなりたつ (ただし  $X^0$  は単位行列を意味する):

$$nX^{2n-1} - q_1X^{2n-2} - q_3X^{2n-4} - \dots - q_{2n-3}X^2 - q_{2n-1}X^0 = 0.$$

**証明.**  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  を可換な不定元として, 次の交代和を考える:

$$\sum_{\sigma \in S_{n+1}} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_{n+1} \leq n} \text{sgn}(\sigma) (X^2)_{i_1 i_{\sigma(1)}} \cdots (X^2)_{i_{n-1} i_{\sigma(n-1)}} X_{i_n i_{\sigma(n)}} a_{i_{n+1}} b_{i_{\sigma(n+1)}}.$$

$i_1, \dots, i_{n+1}$  には重複が生じるので, この交代和は 0 になる. この交代和において各  $\sigma \in S_{n+1}$  に対応する項をくわしく調べよう. もし  $\sigma$  を互いに素な巡回置換の積に分解したときに  $\{1, 2, \dots, n-1\}$  の元だけからなる巡回置換を含むなら対応する項は 0 となる. このことは次の関係式からわかる:

$$\sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} (X^2)_{i_1 i_2} (X^2)_{i_2 i_3} \cdots (X^2)_{i_k i_1} = \text{tr}(X^{2k}) = 0.$$

よって項が残るのは次の二つのケースだけである: (i)  $\sigma$  自体が長さ  $n+1$  の巡回置換, (ii)  $\sigma$  は互いに素な二つの巡回置換の積 (ただし一方は  $n$  を含む長さ  $1+k$  の巡回置換, 他方は  $n+1$  を含む長さ  $n-k$  の巡回置換). これに注意すると, この交代和は次に等しいことがわかる:

$$(-1)^n \{ n! {}^t b X^{2n-1} a - (n-1)! \sum_{k=0}^{n-1} \text{tr}(X^{1+2k}) {}^t b X^{2n-2-2k} a \}.$$

ただし  $a = {}^t(a_1, \dots, a_n)$ ,  $b = {}^t(b_1, \dots, b_n)$ . これが 0 ということから定理の主張が出る.  $\square$

この Cayley-Hamilton 型の定理に  $X^2, X^4, \dots$  を掛けてトレースをとると  $q_{2n+1} = q_{2n+3} = \dots = 0$  であることがわかる ( $\text{tr}(X^{2k}) = 0$  だから). 特に不変式環  $\Lambda(V \otimes V^*)^{GL(V)}$  を生成するのに  $2n-1$  次以下の元  $q_1, q_3, \dots, q_{2n-1}$  だけで十分だとわかる. 思い起こせば, 通常可換版の Cayley-Hamilton 定理も不変式環を生成するのに高次の元が不要であることを教える. 実際,  $\mathcal{P}(V \otimes V^*)^{GL(V)}$  が冪のトレースから生成されることは定理 1.2 の証明と同様にわかり, このうち  $n+1$  次以上のものが不要なことは Cayley-Hamilton 定理から導かれる. このように可換版・反可換版の Cayley-Hamilton 定理は, 不変式論で共通する役割を果たしている. これらの Cayley-Hamilton 型の定理自体を不変式論の第二基本定理の一種と見なすこともできるが, 本稿ではその詳細は省略する.

なお  $GL(V)$ -不変元を係数とする  $X$  の関係式でモニックなものでは、この定理 2.1 の関係式が最小次数である。このことは定理 1.2 からわかる。

また  $X$  は成分が互いに反可換な行列でもっとも generic なものと思えるから、成分が互いに反可換な  $n$  次正方行列  $A$  に対して一般に同じ等式が成立する:

$$(2.1) \quad nA^{2n-1} - \operatorname{tr}(A)A^{2n-2} - \operatorname{tr}(A^3)A^{2n-4} - \dots - \operatorname{tr}(A^{2n-3})A^2 - \operatorname{tr}(A^{2n-1})A^0 = 0.$$

### 3. AMITSUR-LEVITZKI 定理との関係

Cayley-Hamilton 型の定理 (定理 2.1) は次の Amitsur-Levitzki 定理と深い関係がある:

**定理 3.1** (Amitsur-Levitzki [AL]).  $2n$  個の  $n$  次複素正方行列  $A_1, \dots, A_{2n}$  に対して、次がなりたつ:

$$\sum_{\sigma \in S_{2n}} \operatorname{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(2n)} = 0.$$

これはこの手の関係式 ( $n$  次正方行列のなす代数における任意個の変数の定係数の恒等式) の中でもっとも次数の低いものであることが知られている。この関係式の発見がきっかけになって Polynomial identity の理論が盛んに研究されるようになった。

Amitsur と Levitzki が定理 3.1 を発見したときの証明はかなり複雑だったが、その後 Rosset が簡潔で初等的な証明を与えた [R]。その鍵が、形式的な反可換変数  $e_1, \dots, e_{2n}$  を用いて定める次のような反可換成分の行列である:

$$A = A_1 e_1 + \cdots + A_{2n} e_{2n}.$$

$A^{2n}$  は次のように展開できるから、定理 3.1 を示すには  $A^{2n} = 0$  という関係を示せばよい:

$$A^{2n} = \sum_{\sigma \in S_{2n}} \operatorname{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(2n)} e_1 e_2 \cdots e_{2n}.$$

そしてこの等式  $A^{2n} = 0$  自身は、行列  $A^2$  に通常のカイリー-ハミルトン定理を適用することで得られる ( $A^2$  の成分は互いに可換だから通常のカイリー-ハミルトン定理が成立して、 $\operatorname{tr}(A^2) = \operatorname{tr}(A^4) = \dots = 0$  ということから  $A^2$  の固有多項式の係数は最高次を除いてすべて 0 になる)。これが Rosset [R] による定理 3.1 の証明である。

実際には、この証明の鍵である等式  $A^{2n} = 0$  は定理 2.1 から導くこともできる。実際、 $A$  は成分が反可換なので (2.1) が成立して、これに  $A$  を左または右から掛けると次の二つの

関係式を得る:

$$nA^{2n} - \operatorname{tr}(A)A^{2n-1} - \operatorname{tr}(A^3)A^{2n-3} - \cdots - \operatorname{tr}(A^{2n-3})A^3 - \operatorname{tr}(A^{2n-1})A^1 = 0,$$

$$nA^{2n} + \operatorname{tr}(A)A^{2n-1} + \operatorname{tr}(A^3)A^{2n-3} + \cdots + \operatorname{tr}(A^{2n-3})A^3 + \operatorname{tr}(A^{2n-1})A^1 = 0.$$

ここで  $\operatorname{tr}(A^{2k-1})$  が奇数次の元であることが効いて、2つ目以降の項の符号の違いが生じている。この二つの式を足して  $2n$  で割れば  $A^{2n} = 0$  を得る。このように我々の Cayley–Hamilton 型の定理 (定理 2.1) は Amitsur–Levitzki 定理 (とほぼ同値な関係式  $A^{2n} = 0$ ) の精密化と言える。

#### 4. 他の AMITSUR–LEVITZKI 型の定理と外積代数での不変式論

定理 3.1 の類似で外積代数の不変式論と関係するものがいくつかある。

4.1. まず定理 3.1 の類似として、次がよく知られている:

**定理 4.1** (Kostant [K]).  $2n - 2$  個の  $n$  次複素交代行列  $A_1, \dots, A_{2n-2}$  に対して、次がなりたつ:

$$\sum_{\sigma \in S_{2n-2}} \operatorname{sgn}(\sigma) A_{\sigma(1)} A_{\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(2n-2)} = 0.$$

定理 3.1 に似ているが、行列を交代行列に制限すると行列の個数を 2 個減らせるわけである。この証明は定理 3.1 と比べるとずっと難しく、初めて Kostant がこの定理を発見したときにはリー環のコホモロジーの理論を使って証明した。その後も定理 3.1 のような初等的で簡潔な証明は得られていなかった (前節で述べた Rosset [R] による証明をまねても、 $A^{2n} = 0$  が得られるだけで  $A^{2n-2} = 0$  は出てこない)。

しかしこの Amitsur–Levitzki 型の定理も、定理 3.1 と同様に外積代数における不変式論に対応づけることができ、定理 2.1 と似た Cayley–Hamilton 型の定理から導くこともできる。具体的にはこの定理 4.1 は  $V$  の 2 次交代テンソル積  $\Lambda_2(V)$  上の外積代数  $\Lambda(\Lambda_2(V))$  において  $O(V)$ -不変元のなす不変式環に対応づけられる ( $V$  は非退化な対称双線型形式が定義された  $n$  次元複素ベクトル空間).  $\Lambda_2(V)$  の基底  $a_{ij} = e_i \wedge e_j$  をとると、これは  $\Lambda(\Lambda_2(V))$  の生成系になる ( $e_1, \dots, e_n$  は  $V$  の対称双線型形式に関する正規直交基底). この生成系を並べた行列  $A = (a_{ij})$  を考えると  $\Lambda(\Lambda_2(V))^{O(V)}$  は次で生成される (そしてこれらは互いに反可換で、反可換性以外の関係式を持たない):

$$\operatorname{tr}(A^3), \operatorname{tr}(A^7), \operatorname{tr}(A^{11}), \dots, \operatorname{tr}(A^{4m-1}), \quad n = 2m + 1,$$

$$\operatorname{tr}(A^3), \operatorname{tr}(A^7), \operatorname{tr}(A^{11}), \dots, \operatorname{tr}(A^{4m-5}), \quad n = 2m.$$

これらの生成元に関して次の Cayley–Hamilton 型の定理が成立する（これ自体の証明は省略するが、基本的には定理 2.1 と同じように証明できる）：

**定理 4.2.**  $\text{Mat}_n(\Lambda(\Lambda_2(V)))$  において次がなりたつ：

$$\begin{aligned} nA^{2n-3} - \sum_{0 \leq k \leq m-1} \text{tr}(A^{4k+3})A^{2n-3-4k-3} &= 0, & n = 2m + 1, \\ (n-2)A^{2n-3} - \sum_{0 \leq k \leq m-2} \text{tr}(A^{4k+3})A^{2n-3-4k-3} &= 0, & n = 2m. \end{aligned}$$

この定理から定理 4.1 を導くのは易しい。まず前節で述べたのと同じ手順で  $A^{2n-2} = 0$  という等式が得られて、さらにこの等式から定理 4.1 がわかる。

**4.2.** 定理 4.1 の他に次のような Amitsur–Levitzki 定理の類似もある：

**定理 4.3.**  $n$  個の  $n$  次複素交代行列  $A_1, \dots, A_n$  と  $n-1$  個の  $n$  次複素対称行列  $B_1, \dots, B_{n-1}$  に対して、次がなりたつ：

$$\sum_{\sigma \in S_n, \tau \in S_{n-1}} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) A_{\sigma(1)} B_{\tau(1)} A_{\sigma(2)} B_{\tau(2)} \cdots A_{\sigma(n-1)} B_{\tau(n-1)} A_{\sigma(n)} = 0.$$

これは今回初めて発見したものであるが、対称行列の個数をもうひとつ増やしたものは既に知られていた：

**定理 4.4** (Giambruno [G]).  $n$  個の  $n$  次複素交代行列  $A_1, \dots, A_n$  と  $n$  個の  $n$  次複素対称行列  $B_1, \dots, B_n$  に対して、次がなりたつ：

$$\sum_{\sigma, \tau \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) A_{\sigma(1)} B_{\tau(1)} A_{\sigma(2)} B_{\tau(2)} \cdots A_{\sigma(n-1)} B_{\tau(n-1)} A_{\sigma(n)} B_{\tau(n)} = 0.$$

この場合は証明はずっと易しくなり、前節で述べた Rosset [R] による定理 3.1 の証明とほぼ同じ方法が使える。しかし定理 4.3 のように対称行列の個数を  $n-1$  個にすると、もっと精密に扱わなければ証明できない。

定理 4.3 は、 $n$  次元複素ベクトル空間  $V$  の 2 次交代テンソル積と  $V^*$  の 2 次対称テンソル積の直和の上の外積代数  $\Lambda(\Lambda_2(V) \oplus S_2(V^*))$  における  $GL(V)$ -不変元と対応づけるのが自然である。この外積代数において  $GL(V)$ -不変元は自明なもの以外に存在しない。つまり  $\Lambda(\Lambda_2(V) \oplus S_2(V^*))^{GL(V)} = \mathbb{C}1$  である。この状況に対応する Cayley–Hamilton 型の定理を考えよう。 $\Lambda_2(V)$  の基底  $a_{ij} = e_i \wedge e_j$  と  $S_2(V^*)$  の基底  $b_{ij} = e_i^* e_j^*$  をとる ( $e_i$  は  $V$  の基底,  $e_i^*$  はその双対基底)。これらは  $\Lambda(\Lambda_2(V) \oplus S_2(V^*))$  の生成系になる。これらを成分とする行列  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$  を考える。これに対して次の関係式がなりたち、これから定理 4.3

はすぐ出る. またこの場合は, これ自体が背景にある Cayley–Hamilton 型の定理と解釈すべきである.

**定理 4.5.**  $\text{Mat}_n(\Lambda(\Lambda_2(V) \oplus S_2(V^*)))$  において次がなりたつ:

$$(AB)^{n-1}A = 0.$$

## 5. 対称式環との比較

$\Lambda(V \otimes V^*)^{GL(V)}$  の元を対称多項式の類似と見なすのも面白い.

可換な枠組みでは,  $\mathcal{P}(V \otimes V^*)^{GL(V)}$  の元は固有値の対称多項式と一致していて, その具体的な対応もよくわかっている. 実際, 一般に複素数を成分とする正方行列  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  とその固有値  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  に対して, 次の関係式がなりたつ:

$$\text{tr } A^r = p_r(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \det_r A = e_r(\lambda_1, \dots, \lambda_n), \quad \text{per}_r A = h_r(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

ここで  $p_k, e_k, h_k$  はそれぞれ冪和対称式, 基本対称式, 完全斉次対称式を意味する. また  $\det_r, \text{per}_r$  を行列式, パーマネントを用いて次のように定義する:

$$\det_r A = \frac{1}{r!} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n} \det A_{II}, \quad \text{per}_r A = \frac{1}{r!} \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n} \text{per } A_{II}.$$

ただし  $I = (i_1, \dots, i_r)$  に対して,  $A_{II} = (a_{i_p j_q})_{1 \leq p, q \leq r}$  とおく.

反可換な枠組の  $\Lambda(V \otimes V^*)^{GL(V)}$  も対称多項式の類似と見なそう. 生成元  $q_{2k-1} = \text{tr}(X^{2k-1})$  は何に相当することになるだろうか. 冪のトレースなので, 一見これは冪和対称式の対応物に見える. しかし同時にこれは「固有多項式」の係数だから, 基本対称式の対応物にも見える. 実はさらに考察を重ねてみると, これは完全斉次対称式の対応物とも見なせる. つまり反可換な枠組みでは, これらの3系列は区別できないように思われる (少なくとも対称式同士の関係を見るかぎり). 理由を以下に述べる.

まず通常の対称多項式の関係式を復習しよう.  $e_k, h_k, p_k$  の母関数

$$E(t) = 1 + e_1 t + e_2 t^2 + \dots,$$

$$H(t) = 1 + h_1 t + h_2 t^2 + \dots,$$

$$\tilde{P}(t) = p_1 + p_2 t + p_3 t^2 + \dots$$

に対して次の関係式がなりたつ:

$$E(t)H(-t) = 1, \quad E'(t) = E(t)\tilde{P}(-t).$$



これに注意して  $\Lambda(V \otimes V^*)^{GL(V)}$  の生成元  $q_1, q_3, \dots$  の母関数を考える:

$$Q(t) = 1 + q_1 t + q_3 t^3 + \dots,$$

$$\tilde{Q}(t) = q_1 t^0 + q_3 t^2 + \dots.$$

すると直接的な計算で次の関係式がなりたつことがわかる:

$$Q(t)Q(-t) = 1, \quad Q'(t) = Q(t)\tilde{Q}(-t).$$

これは反可換な枠組みでは冪対称式, 基本対称式, 完全斉次対称式を区別する必要がないということを示唆する.

ただし  $t$  は  $V \otimes V^* \subset \Lambda(V \otimes V^*)$  の元と反可換な形式的変数とする. そして  $t$  の冪の微分 (反可換版の微分) を次のように定義する:

$$(t^k)' = \begin{cases} t^{k-1}, & k: \text{奇数}, \\ 0, & k: \text{偶数}. \end{cases}$$

$h$  が  $t$  と反可換のときの次の関係を見ると, この定義は自然に感じる<sup>1</sup>:

$$(t+h)^k - t^k = \begin{cases} t^{k-1}h, & k: \text{奇数}, \\ 0, & k: \text{偶数}. \end{cases}$$

#### REFERENCES

- [AL] A. S. Amitsur and J. Levitzki, *Minimal identities for algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **1**, (1950), 449–463.
- [GKLLRT] I. M. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V. S. Retakh, and J.-Y. Thibon, *Noncommutative symmetric functions*, Adv. Math. **112** (1995), no. 2, 218–348.
- [G] A. Giambruno, *On \*-polynomial identities for  $n \times n$  matrices*, J. Algebra **133** (1990), 433–438.
- [GW] R. Goodman and N. R. Wallach, *Symmetry, representations, and invariants*, Springer, 2009.
- [K] B. Kostant, *A theorem of Frobenius, a theorem of Amitsur-Levitzki and cohomology theory*, J. Math. Mech. **7** (1958), 237–264.
- [R] S. Rosset, *A new proof of the Amitsur-Levitzki identity*, Israel J. Math. **23** (1976), no. 2, 187–188.

<sup>1</sup>Dunkl operator の定義に現れる式で  $f(t)' = \frac{f(t)-f(-t)}{2t}$  と理解することもできる. このことは落合啓之氏に教わった.