

ジョルダン代数の表現に付随するクランと その基本相対不変式

九州大学大学院・数理学府 中島 秀斗 (Hideto NAKASHIMA)
Graduate School of Mathematics,
Kyushu University

概要

ユークリッド型の単純ジョルダン代数 V とその自己共役な表現 (φ, E) が与えられたとき、直和空間 $V_E := E \oplus V$ にクラン構造が定義できる。さらに V_E に単位元を添加することにより単位元を持つクラン V_E^0 を構成する。このクラン V_E^0 の右乗法作用素の行列式を考察することにより、 V_E^0 に付随する基本相対不変式が計算できる。本稿では V_E^0 を行列を用いて明示的に実現し、さらに基本相対不変式をジョルダン代数 V の主小行列式と表現 φ に付随する対称双線型形式を用いて明示的に与えた。本稿は論文 [10] をまとめたものである。

序文

実ベクトル空間 V の直線を含まない開凸錐を Ω とする。 Ω の線型変換群 $G(\Omega) := \{g \in GL(V) ; g(\Omega) = \Omega\}$ が Ω に推移的に作用するとき Ω を等質錐という。等質錐は等質開凸領域の重要なクラスのひとつである。等質開凸領域はクランと呼ばれる非結合的な代数と同型を除いて 1 対 1 に対応しており ([13])、特に等質錐 Ω は単位元を持つクラン (V, Δ) と対応する。 $G(\Omega)$ の岩沢部分群を H とする。このとき V 上の H -相対不変な既約多項式 $\Delta_1(x), \dots, \Delta_r(x)$ (r は Ω の階数) が存在し、 V 上の任意の H -相対不変な多項式 $p(x)$ はスカラー倍を除いて

$$p(x) = \Delta_1(x)^{m_1} \cdots \Delta_r(x)^{m_r} \quad (x \in V, m_1, \dots, m_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

と表すことができる ([7])。この意味で $\Delta_1(x), \dots, \Delta_r(x)$ を等質錐 Ω の基本相対不変式と呼ぶ。クランの右乗法作用素 $R_x: y \mapsto y \Delta x$ ($x \in V$) の行列式 $\text{Det } R_x$ は H -相対不変であるので $\Delta_1(x), \dots, \Delta_r(x)$ の累乗積で表されることがわかるが、実はより強く、既約因子として $\Delta_1(x), \dots, \Delta_r(x)$ が全て現れるということが知られている ([9])。この性質により、等質錐の基本相対不変式を求めるという問題は、対応するクランの右乗法作用素の行列式の既約因子を求める問題に置き換えることができる。

ユークリッド型のジョルダン代数 V は対称錐 (自己共役な等質開凸錐) と同型を除いて 1 対 1 に対応している ([5]) ので、 V にはクラン構造 Δ も定義することができる。さらにジョルダン代数 V の自己共役な表現 (φ, E) が与えられたとき、次のような積を持つクラン

(V_E^0, Δ) を構成できる: $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \xi, \eta \in E, x, y \in V$ に対して

$$(\lambda u + \xi + x) \Delta (\mu u + \eta + y) = (\lambda \mu) u + (\mu \xi + \frac{1}{2} \lambda \eta + \varphi(x) \eta) + (Q(\xi, \eta) + x \Delta y).$$

ここで u は V_E^0 の単位元 e と V の単位元 e_0 との差 $u = e - e_0$ であり, $V_E^0 = \mathbb{R}u \oplus E \oplus V$ である. また $\varphi(x)$ は作用素 $\varphi(x)$ の下三角部分, Q は表現 φ に付随する E 上の対称双線型形式である.

ユークリッド型の単純ジョルダン代数は次の 3 種類に分類される ([5]): (i) ローレンツ型: $V = \mathbb{R} \oplus W$ (W は線型空間), (ii) エルミート型: $\text{Herm}(r, \mathbb{K})$ ($r \geq 3; \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$), (iii) 例外型: $\text{Herm}(3, \mathbb{O})$. このうち例外型においてはジョルダン代数の自己共役表現が零表現しか存在せず, 従って新しいクランを構成できないので本稿の考察の対象から除外される. 本稿では (i) ローレンツ型, (ii) エルミート型 の場合に対して, 前述の方法により定義されるクラン V_E^0 に対応する等質錐 Ω^0 の基本相対不変式を, ジョルダン代数 V の主小行列式と表現に付随する対称双線型形式 Q を用いて明示的に計算した (定理 2.2, 定理 2.6). さらに Ω^0 の双対錐 $(\Omega^0)^*$ の基本相対不変式も, Ω の双対錐 Ω^* の基本相対不変式と φ に付随する対称双線型形式を用いて明示的に計算した (系 3.4, 定理 3.6).

1 等質開凸錐とクラン

V を実ベクトル空間とし, Ω を直線を含まない V 中の開凸錐とする. $G(\Omega) = \{g \in GL(V); g(\Omega) = \Omega\}$ が Ω に推移的に作用するとき, Ω を等質錐という. $G(\Omega)$ は $GL(V)$ の閉部分群となり, 従ってリー群となる. $G(\Omega)$ は Ω の 1 点を固定する部分群 K と, 極大な連結三角部分群 H (岩沢部分群) により

$$G(\Omega) = KH, \quad K \cap H = \{e\} \quad (e \text{ は } G(\Omega) \text{ の単位元})$$

のように分解される. 特に岩沢部分群 H は Ω に単純推移的に作用する. よって $x_0 \in \Omega$ を一つ固定して, 軌道写像 $H \ni h \mapsto h \cdot x_0 \in \Omega$ を考えるとこれは微分同相になる. すると H の単位元における軌道写像の微分は H のリー代数 \mathfrak{h} から V の上への線型同型写像 $\mathfrak{h} \ni X \mapsto Xx_0 \in V$ となるので, 逆写像が存在する. この逆写像を $L: V \ni x \mapsto L_x \in \mathfrak{h}$ で表す. 定義より $L_x x_0 = x$ である. このとき V に積 Δ を $x \Delta y := L_x y$ ($x, y \in V$) で定義する. この積は双線型になり, さらに (V, Δ) は次の 3 条件を満たす:

1. 左対称である. すなわち任意の $x, y \in V$ に対して $[L_x, L_y] = L_{x \Delta y - y \Delta x}$,
2. ある $s \in V^*$ が存在して $s(x \Delta y)$ が V の内積を定める,
3. L_x の固有値は全て実数である.

この 3 条件を満たす代数をクランと呼ぶ. 一般にクランは非可換かつ非結合的である. Vinberg [13] にあるように等質開凸領域とクランは同型を除いて 1 対 1 に対応しており, 等質開凸領域が錐になることとクランが単位元を持つことが対応している.

等質錐 Ω 上の関数 f が H に関して相対不変であるとは、 H 上のある 1 次元表現 χ が存在して、任意の $h \in H, x \in \Omega$ に対して

$$f(hx) = \chi(h)f(x)$$

が成り立つことをいう。このとき以下が成り立つ。

定理 1.1 (Ishi [7]). $\Omega \subset V$ を階数 r の等質開凸錐とする。このとき V 上の相対不変な既約多項式 $\Delta_1(x), \dots, \Delta_r(x)$ が存在して、 V 上の任意の相対不変な多項式 $p(x)$ は

$$p(x) = \alpha \Delta_1(x)^{m_1} \cdots \Delta_r(x)^{m_r} \quad (\alpha \in \mathbb{R}, (m_1, \dots, m_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r)$$

と表される。さらに等質開凸錐 Ω は既約多項式 $\Delta_1(x), \dots, \Delta_r(x)$ により次のように記述される：

$$\Omega = \{x \in V; \Delta_1(x) > 0, \dots, \Delta_r(x) > 0\}.$$

この意味で $\Delta_1(x), \dots, \Delta_r(x)$ を等質開凸錐 Ω の基本相対不変式と呼ぶ。また (V, Δ) を等質錐 Ω に対応するクランとすると、 $\Delta_1(x), \dots, \Delta_r(x)$ をクラン V の基本相対不変式とも呼ぶ。クランの右乗法作用素 $R_x : y \mapsto y \Delta x$ に対してその行列式 $\text{Det } R_x$ は H -相対不変であるので定理 1.1 が成り立つが、実はより強い次の定理が成り立つことが知られている。

定理 1.2 (Ishi–Nomura [9]). 多項式 $\text{Det } R_x$ の既約因子は丁度 $\Delta_1(x), \dots, \Delta_r(x)$ である。

1.1 ジョルダン代数とその表現から得られる等質錐

V を実ベクトル空間とする。 V に双線型な積 \circ が定義されていて、次の関係式を満たすとき、 (V, \circ) をジョルダン代数という：

$$x \circ y = y \circ x, \quad x^2 \circ (x \circ y) = x \circ (x^2 \circ y) \quad (x, y \in V).$$

ただしこの積は結合性を仮定しない。以下ジョルダン代数は常に単位元 e_0 を持つと仮定する。 V に内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ が与えられていて、ジョルダン代数の乗法作用素 $M(x) : V \ni y \mapsto x \circ y \in V$ ($x \in V$) がこの内積に関して自己共役であるとき、 V はユークリッド型であるという。また V が非自明なイデアルを含まないときに単純であるという。以下ユークリッド型の単純ジョルダン代数を単にジョルダン代数と呼ぶことにする。Faraut–Korányi [5] にあるように、ジョルダン代数と対称錐は同型を除いて 1 対 1 に対応している。対称錐は等質開凸錐の特別なものであったので、ジョルダン代数 V にクラン構造 Δ も定義することができる。このとき次が成り立つ。

定理 1.3. V を階数が r の単純ジョルダン代数とし、 (V, Δ) を V に付随するクランとする。クラン (V, Δ) の右乗法作用素を R_x ($x \in V$) とすれば、

$$\text{Det } R_x = \Delta_1(x)^d \cdots \Delta_{r-1}(x)^d \Delta_r(x)$$

となる. ただし $\Delta_1(x), \dots, \Delta_r(x)$ はジョルダン代数 V のジョルダン枠 c_1, \dots, c_r に関する主小行列式であり, d は Peirce 分解 $V = \sum_{i \leq j} V_{ji}$ における V_{ji} ($i < j$) の共通の次元である.

これより, 対称錐 Ω の基本相対不変式はジョルダン代数 V の主小行列式 $\Delta_1(x), \dots, \Delta_r(x)$ と一致することがわかる. 内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle_E$ を持つ実ベクトル空間を E とし, V から $\mathfrak{gl}(E)$ への線型写像 φ を考える. $\varphi(e_0)$ が恒等写像となり,

$$\varphi(x \circ y) = \frac{1}{2}(\varphi(x)\varphi(y) + \varphi(y)\varphi(x)) \quad (x, y \in V)$$

を満たすとき, (φ, E) をジョルダン代数 V の表現という. さらに $\varphi(x)^* = \varphi(x)$ ($x \in V$) をみたすとき自己共役であるという. φ に付随する E 上の対称双線型形式 Q を

$$\langle \varphi(x)\xi | \eta \rangle_E = \langle Q(\xi, \eta) | x \rangle \quad (x \in V, \xi, \eta \in E) \quad (1.1)$$

で定義する. このとき Q は Ω -positive になる. すなわち零ベクトルでない任意の $\xi \in E$ に対して $Q(\xi, \xi) \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ となる. また $Q(\xi, \xi) = e_0$ を満たす $\xi \in E$ が存在するとき, 表現 φ は正則であるという.

定理 1.4. V をジョルダン代数とし, (V, Δ) をジョルダン代数 V に付随するクランとする. また (φ, E) をジョルダン代数 V の自己共役表現として, $V_E := E \oplus V$ とおく. このとき V_E に積 Δ を次のように定義すると (V_E, Δ) はクランになる:

$$(\xi + x) \Delta (\eta + y) := \underline{\varphi}(x)\eta + (Q(\xi, \eta) + x \Delta y) \quad (\xi, \eta \in E, x, y \in V).$$

ただし $\underline{\varphi}(x)$ は x の Peirce 分解を $x = \sum_{i \leq j} x_{ji}$ としたとき,

$$\underline{\varphi}(x) := \frac{1}{2} \sum_{j=1}^r \varphi(x_{jj}) + \sum_{i < j} \varphi(x_{ji})$$

により定義される V 上の下三角型の線型変換である.

このクラン V_E に単位元 e を添加して得られるクラン $V_E^0 := \mathbb{R}e \oplus V_E$ を考える. $u := e - e_0$ とおけば $V_E^0 = \mathbb{R}u \oplus V_E$ とも表される. この分解に関して V_E^0 でのクラン積は次のように表される: $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, \xi, \eta \in E, x, y \in V$ に対して

$$(\lambda u + \xi + x) \Delta (\mu u + \eta + y) = (\lambda \mu)u + (\mu \xi + \frac{1}{2} \lambda \eta + \underline{\varphi}(x)\eta) + (Q(\xi, \eta) + x \Delta y).$$

V_E^0 は単位元を持つクランであり, 従って等質開凸錐と対応する. よって基本相対不変式を考えることができる. クラン V_E^0 の右乗法作用素を R^0 とすれば,

$$R_{\lambda u + \xi + x}^0 \begin{pmatrix} \mu \\ \eta \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \xi & \lambda \text{id}_E & R_\xi^0 \\ 0 & R_\xi^0 & R_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu \\ \eta \\ y \end{pmatrix}$$

であるので, その行列式は $\lambda u + \xi + x \in V_E^0$ に対して

$$\text{Det } R_{\lambda u + \xi + x}^0 = \lambda^{1 + \dim E - \dim V} \text{Det } R_{\lambda x - \frac{1}{2}Q(\xi, \xi)}$$

となる (cf. [10]). クラン V の基本相対不変式を $\Delta_j(x)$ ($j = 1, \dots, r$) で表すと, 定理 1.2 によりクラン V_E^0 の基本相対不変式 $P_j(\lambda u + \xi + x)$ ($j = 0, 1, \dots, r$) は λ および $\Delta_j(\lambda x - \frac{1}{2}Q(\xi, \xi))$ ($j = 1, \dots, r$) の既約因子で尽くされる.

2 クラン (V_E^0, Δ) の基本相対不変式

$\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ とおく. ジョルダン代数 V はその階数 r により次のように分類される (cf. Faraut-Korányi [5]):

$$\begin{cases} r = 2 \Rightarrow V \cong \mathbb{R} \oplus W \text{ (} W \text{ は線型空間)} & \text{: ローレンツ型} \\ r \geq 3 \Rightarrow \begin{cases} V \cong \text{Herm}(r, \mathbb{K}) & \text{: エルミート型} \\ V \cong \text{Herm}(3, \mathbb{O}) & \text{: 例外型} \end{cases} \end{cases}$$

$r = 2$ のときをローレンツ型と呼び, $r \geq 3$ のときエルミート型と呼ぶ. また $\text{Herm}(3, \mathbb{O})$ を例外型という. 例外型のときにはジョルダン代数の自己共役表現は零表現しか存在しないので以下の考察からは除外される.

2.1 エルミート型の場合

$V = \text{Herm}(r, \mathbb{K})$ とし, $d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}$ とおく. V のジョルダン積 \circ は

$$x \circ y := \frac{1}{2}(xy + yx) \quad (x, y \in V)$$

で定義される. ここで右辺の積は通常の行列の積である. V に対応する対称錐 Ω は

$$\Omega = \text{Herm}(r, \mathbb{K})^{++} = \{x \in V; x \text{ は正定値}\}$$

であり, V に定義されるクラン積 Δ は

$$x \Delta y := \underline{x}y + y(\underline{x})^* \quad (x, y \in V)$$

となる. ただし, $x = (x_{ij}) \in V$ に対して \underline{x} は次のように定義する:

$$\underline{x} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ x_{21} & \frac{1}{2}x_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ x_{r1} & \cdots & x_{r,r-1} & \frac{1}{2}x_{rr} \end{pmatrix}.$$

このとき $\underline{x} + (\underline{x})^* = x$ となる. ジョルダン代数 V の主小行列式を $\Delta_1(x), \dots, \Delta_r(x)$ で表す. これは $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ のときにおいては $x \in V$ の左上からの小行列式 $\det^{(k)} x$ ($k = 1, \dots, r$) にほかならない. 定理 1.3 よりこれがクラン (V, Δ) の基本相対不変式でもある事がわかる.

(φ, E) をジョルダン代数 V の自己共役表現とする。すると $E = \text{Mat}(r \times p, \mathbb{K})$ であって $\langle \xi | \eta \rangle_E = \text{Re Tr}(\xi \eta^*)$ であり,

$$\varphi(x)\xi = x\xi \quad (x \in V, \xi \in E)$$

となる (cf. Clerc [3]). さらに次も容易に確かめられる:

$$\underline{\varphi}(x)\xi = \underline{x}\xi \quad (x \in V, \xi \in E).$$

Q を式 (1.1) で定義される, 表現 φ に付随する対称双線型形式とすると,

$$Q(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi \eta^* + \eta \xi^*) \quad (\xi, \eta \in E)$$

となる。さらに表現 φ が正則となるための必要十分条件は $p \geq r$ である (cf. Clerc [3]). この V と E を用いて 1.1 節の方法により構成されるクランを V_E^0 とする。

命題 2.1. クラン V_E^0 は $\text{Herm}(r+p, \mathbb{K})$ の部分クランと同型になる。その対応は

$$\mathfrak{X} := \left\{ \begin{pmatrix} \lambda I_p & \xi^* \\ \xi & x \end{pmatrix}; \begin{array}{l} \lambda \in \mathbb{R}, x \in \text{Herm}(r, \mathbb{K}), \\ \xi \in \text{Mat}(r \times p, \mathbb{K}) \end{array} \right\} \subset \text{Herm}(r+p, \mathbb{K})$$

とおいたとき,

$$V_E^0 \ni \lambda u + \xi + x \mapsto \begin{pmatrix} \lambda I_p & \frac{1}{\sqrt{2}} \xi^* \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \xi & x \end{pmatrix} \in \mathfrak{X}$$

である。ただし \mathfrak{X} のクラン積はクラン $\text{Herm}(r+p, \mathbb{K})$ の積 Δ を \mathfrak{X} に制限したものである。

定理 2.2. クラン V_E^0 の基本相対不変式を $P_j(\lambda u + \xi + x)$ ($j = 0, 1, \dots, r$) とする。このとき P_j は表現 φ の正則性に依じて次のように場合分けされる:

(1) φ が正則のとき, つまり $p \geq r$ のとき,

$$P_j(\lambda u + \xi + x) = \begin{cases} \lambda & (j = 0), \\ \Delta_j(\lambda x - \frac{1}{2} \xi \xi^*) & (j = 1, \dots, r). \end{cases}$$

(2) φ が正則でないとき, つまり $p < r$ のとき,

$$P_j(\lambda u + \xi + x) = \begin{cases} \lambda & (j = 0), \\ \Delta_j(\lambda x - \frac{1}{2} \xi \xi^*) & (j = 1, \dots, p), \\ \det^{(p+j)} \begin{pmatrix} \lambda I_p & \frac{1}{\sqrt{2}} \xi^* \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \xi & x \end{pmatrix} & (j = p+1, \dots, r). \end{cases}$$

この証明には次の補題を用いる:

補題 2.3. $\lambda \in \mathbb{R}$, $\xi \in E$, $x \in V$ とする. また $p(x)$ を r 次斉次の既約多項式とし, $F(\lambda, \xi, x)$ を λ について k 次未満, x について r 次未満となる斉次多項式とする. さらに $F(0, \xi, x) \neq 0$ となる $(\xi, x) \in E \times V$ が存在するとする. このとき

$$P(\lambda, \xi, x) = \lambda^k p(x) + F(\lambda, \xi, x)$$

は既約多項式になる.

系 2.4. 等質錐 Ω^0 は等質錐 $\{X \in \mathfrak{X}; X \text{ は正定値}\}$ と線型同型になる.

2.2 ローレンツ型の場合

W を n 次元の実ベクトル空間とし, B を W 上の正定値対称双線型形式とする. ただし $n \geq 2$ と仮定する. $V = \mathbb{R} \oplus W$ とおき, V に積 \circ を次で定義する:

$$(a, w) \circ (a', w') = (aa' + B(w, w'), aw' + a'w) \quad ((a, w), (a', w') \in V).$$

このとき (V, \circ) は階数 2 のジョルダン代数になる. 対応する対称錐 Ω は

$$\Omega = \{x = (a, w) \in V; a > 0, a^2 - B(w, w) > 0\}$$

である. $e_0 = (1, 0)$ とおき, e_1, \dots, e_n を B に関する W の正規直交基底とする. $c_1 = \frac{1}{2}(e_0 + e_n)$, $c_2 = \frac{1}{2}(e_0 - e_n)$ とおけば c_1, c_2 は V のジョルダン枠になり, V の Peirce 空間は

$$V_{11} = \mathbb{R}c_1, \quad V_{22} = \mathbb{R}c_2, \quad V_{21} = \mathbb{R}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}e_{n-1}$$

となる. V の元 $x \in V$ を $x_j \in \mathbb{R}$ ($j = 0, 1, \dots, n$) と $\hat{x} \in W$ を用いて

$$x = x_0 e_0 + x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = (x_0, \hat{x})$$

のように表す. この表記を用いると Ω は

$$\Omega = \{x \in V; x_0 > 0, x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2 > 0\}$$

となりローレンツ錐になっていることがわかる. また V に定義されるクラン積は

$$x \Delta y = (x_0 y_0 + B(\hat{x}, \hat{y}), x_0 \hat{y} + y_0 \hat{x} + y_n \hat{x} - B(\hat{x}, \hat{y})e_n) \quad (x, y \in V)$$

となり, V の基本相対不変式 Δ_1, Δ_2 は

$$\Delta_1(x) = x_0 + x_n, \quad \Delta_2(x) = x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2 =: \langle x, x \rangle_{1,n} \quad (2.1)$$

になる. さらに V の内積は $\langle x|y \rangle = \text{tr}(x \circ y) = 2(x_0 y_0 + x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)$ ($x, y \in V$) で与えられる. このジョルダン代数 V は B を用いて定義されるクリフォード代数 $\text{Cl}(W)$ に標準的に埋め込まれる. これよりジョルダン代数 V の自己共役表現が次のように与えられる.

命題 2.5 (Clerc [3], [4]). (φ, E) をジョルダン代数 V の既約な自己共役表現とする. すると φ はクリフォード代数 $\text{Cl}(W)$ の E 上の既約な自己共役表現を V に制限することにより得られる. $\text{Cl}(W)$ の E 上の既約表現は次の表の通り ($\#\varphi$ は既約表現の個数):

n	$\text{Cl}(W)$	E	$\dim E$	$\#\varphi$
$8k$	$\text{Mat}(16^k, \mathbb{R})$	\mathbb{R}^{16^k}	16^k	1
$8k+1$	$\text{Mat}(16^k, \mathbb{R}) \oplus \text{Mat}(16^k, \mathbb{R})$	\mathbb{R}^{16^k}	16^k	2
$8k+2$	$\text{Mat}(2 \cdot 16^k, \mathbb{R})$	$\mathbb{R}^{2 \cdot 16^k}$	$2 \cdot 16^k$	1
$8k+3$	$\text{Mat}(2 \cdot 16^k, \mathbb{C})$	$\mathbb{C}^{2 \cdot 16^k}$	$4 \cdot 16^k$	2
$8k+4$	$\text{Mat}(2 \cdot 16^k, \mathbb{H})$	$\mathbb{H}^{2 \cdot 16^k}$	$8 \cdot 16^k$	1
$8k+5$	$\text{Mat}(2 \cdot 16^k, \mathbb{H}) \oplus \text{Mat}(2 \cdot 16^k, \mathbb{H})$	$\mathbb{H}^{2 \cdot 16^k}$	$8 \cdot 16^k$	2
$8k+6$	$\text{Mat}(4 \cdot 16^k, \mathbb{H})$	$\mathbb{H}^{4 \cdot 16^k}$	$16 \cdot 16^k$	1
$8k+7$	$\text{Mat}(8 \cdot 16^k, \mathbb{C})$	$\mathbb{C}^{8 \cdot 16^k}$	$16 \cdot 16^k$	2

(φ, E) をジョルダン代数 V の自己共役表現とする. e_0, e_1, \dots, e_n の V におけるノルムはすべて $\sqrt{2}$ であり, これらは V の直交基底であるので, 表現 φ に付随する対称双線型形式 Q は

$$Q(\xi, \xi) = \sum_{j=0}^n \langle Q(\xi, \xi) | \frac{e_j}{\sqrt{2}} \rangle \frac{e_j}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \|\xi\|_E^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \langle \varphi(e_j)\xi | \xi \rangle_E e_j \quad (\xi \in E)$$

となる. これを polarize すれば $Q(\xi, \eta)$ ($\xi, \eta \in E$) を得る. また表現 φ が正則であるための必要十分条件は (i) φ が既約でかつ $n \neq 2, 3, 5, 9$, または (ii) φ が可約, である (cf. Clerc [3]). この V と E を用いて 1.1 節の方法により構成されるクランを V_E^0 とする. 式 (2.1) より $\lambda u + \xi + x \in V_E^0$ に対して

$$\Delta_2(\lambda x - \frac{1}{2}Q(\xi, \xi)) = \lambda \left(\lambda \Delta_2(x) - \langle x, Q(\xi, \xi) \rangle_{1,n} \right) + \frac{1}{4} \Delta_2(Q(\xi, \xi))$$

であり, 表現 φ が正則でないことと任意の $\xi \in E$ に対して $\Delta_2(Q(\xi, \xi)) = 0$ となることが同値である (cf. [3]) ので次が成り立つ.

定理 2.6. V_E^0 の基本相対不変式を $P_j(\lambda u + \xi + x)$ ($j = 0, 1, 2$) とすると,

$$\begin{cases} P_0(\lambda u + \xi + x) = \lambda, \\ P_1(\lambda u + \xi + x) = \Delta_1(\lambda x - \frac{1}{2}Q(\xi, \xi)), \\ P_2(\lambda u + \xi + x) = \begin{cases} \lambda \Delta_2(x) - \langle x, Q(\xi, \xi) \rangle_{1,n} & (\varphi \text{ が正則}), \\ \Delta_2(\lambda x - \frac{1}{2}Q(\xi, \xi)) & (\varphi \text{ が正則でない}). \end{cases} \end{cases}$$

2.2.1 $\dim W = 2, 3, 5, 9$ かつ φ が既約のとき

$\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2, \mathbb{K}_4, \mathbb{K}_8$ を順に $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ とする. $n = \dim W$ とすると $W = \mathbb{K}_{n-1} \oplus \mathbb{R}$ とみなすことができ, $V \cong \text{Herm}(2, \mathbb{K}_{n-1})$ となる. 以下 $d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{K}_{n-1} = n - 1$ とする. 2つの

線型写像 $\varphi_1, \varphi_2 : V \rightarrow \text{Sym}(\mathbb{K}_d \oplus \mathbb{K}_d)$ をそれぞれ $x_0 \in \mathbb{R}$, $(z, x_n) \in W = \mathbb{K}_d \oplus \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}\varphi_1(x_0 e_0 + x_n e_n + z) &= \begin{pmatrix} (x_0 + x_n)\text{id} & L_z \\ L_{\bar{z}} & (x_0 - x_n)\text{id} \end{pmatrix}, \\ \varphi_2(x_0 e_0 + x_n e_n + z) &= \begin{pmatrix} (x_0 + x_n)\text{id} & L_{\bar{z}} \\ L_z & (x_0 - x_n)\text{id} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

と定義する. ここで L_z は \mathbb{K}_d における左乗法作用素であり, \bar{z} は \mathbb{K}_d における z の共役である. すると φ_1, φ_2 はどちらもジョルダン代数 V の自己共役な既約表現となるが, 特に

$$\begin{aligned}d = 1, 2 &\Rightarrow \varphi_1, \varphi_2 \text{ は } \mathbb{R}\text{-同値}, \\ d = 4, 8 &\Rightarrow \varphi_1, \varphi_2 \text{ は } \mathbb{R}\text{-同値でない}\end{aligned}$$

となる. $j = 1, 2$ に対して Q_j を φ_j に付随する対称双線型形式とすると,

$$Q_1(\xi, \xi) = \xi\xi^*, \quad Q_2(\xi, \xi) = {}^t(\xi\xi^*) = {}^t(Q_1(\xi, \xi)) \quad (\xi \in \mathbb{K}_d^2).$$

補題 2.7. 写像 $\tau: v \mapsto {}^t v$ は $\text{Herm}(2, \mathbb{K}_d)$ のジョルダン代数およびクランとしての自己同型写像になる.

$\mathbb{K}_d = \mathbb{H}, \mathbb{O}$ のときは一般に ${}^t(xy) \neq {}^t y {}^t x$ であるのでこの補題は自明ではないが, 直接計算により示すことができる. この補題より次の定理が成り立つ.

定理 2.8. 既約な自己共役表現 (φ_j, E_j) ($j = 1, 2$) から構成されるクランを $(V_{E_j}^0, \Delta_j)$ で表す. このとき φ_1 と φ_2 が \mathbb{R} -同値かどうかに関わらず, $(V_{E_1}^0, \Delta_1)$ と $(V_{E_2}^0, \Delta_2)$ は同型なクランになる. 特にいずれの場合においても $(V_{E_j}^0, \Delta_j)$ はクラン $\text{Herm}(3, \mathbb{K}_d)$ と同型になる.

3 (V_E^0, Δ) の双対クラン

V_E^0 を 1.1 節で定義されるクランとする. V_E^0 の内積 $\langle | \rangle^0$ を次で定義する:

$$\langle \lambda u + \xi + x | \mu u + \eta + y \rangle^0 := \lambda\mu + \langle \xi | \eta \rangle_E + \langle x | y \rangle.$$

さらにクラン V_E^0 に対応する等質開凸錐を Ω^0 で表し, その双対錐 $(\Omega^0)^*$ を

$$(\Omega^0)^* := \left\{ v \in V_E^0; \langle v | v' \rangle^0 > 0 \text{ for all } v' \in \overline{(\Omega^0)} \setminus \{0\} \right\}$$

と定義する. また $g \in G(\Omega^0)$ の内積 $\langle | \rangle^0$ に関する共役作用素を ${}^t g$ で表し,

$${}^t G(\Omega^0) := \{ {}^t g; g \in G(\Omega^0) \}$$

とおく. このとき $(\Omega^0)^*$ は単位元 e の ${}^t G(\Omega^0)$ -軌道になる (cf. [13]). 特に等質開凸錐 $(\Omega^0)^*$ に対応するクランの積 ∇ はクラン (V_E^0, Δ) の左乗法作用素 L_v^0 ($v \in V_E^0$) を用いて

$$v \nabla v' = {}^t L_v^0 v' \quad (v, v' \in V_E^0)$$

となる. よってその積 ∇ は $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\xi, \eta \in E$, $x, y \in V$ に対して

$$(\lambda u + \xi + x)\nabla(\mu u + \eta + y) = (\lambda\mu + \langle \xi | \eta \rangle_E)u + (\varphi(x)^*\eta + \frac{1}{2}\lambda\eta + \varphi(y)\xi) + x\nabla y$$

である. ここで $x\nabla y$ は (V, Δ) の双対クランの積である. クラン (V, ∇) に付随する基本相対不変式を $\Delta_1^*(x), \dots, \Delta_r^*(x)$ で表す. これはジョルダン代数 V のジョルダン枠 c_r, \dots, c_1 に関する主小行列式となる (cf. [5]). クラン (V, ∇) の右乗法作用素を R^∇ とすれば定理 1.3 により

$$\text{Det } R_x^\nabla = \Delta_1^*(x)^d \cdots \Delta_{r-1}^*(x)^d \Delta_r^*(x) \quad (x \in V)$$

であり, クラン (V_E^0, ∇) の右乗法作用素を $R_{\lambda u + \xi + x}^\nabla$ と表せばその行列式は

$$\begin{aligned} \text{Det } R_{\lambda u + \xi + x}^\nabla &= \text{Det} \begin{pmatrix} \lambda & \langle \cdot | \xi \rangle_E & 0 \\ \frac{1}{2}\xi & \varphi(x) & \varphi(\cdot)^*\xi \\ 0 & 0 & R_x^\nabla \end{pmatrix} \\ &= \Delta_1^*(x)^d \cdots \Delta_{r-1}^*(x)^d \Delta_r^*(x) \cdot \text{Det} \begin{pmatrix} \lambda & \langle \cdot | \xi \rangle_E \\ \frac{1}{2}\xi & \varphi(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.1)$$

となる. ここで $\varphi(x)$ ($x \in V$) が可逆であるときには

$$\text{Det} \begin{pmatrix} \lambda & \langle \cdot | \xi \rangle_E \\ \frac{1}{2}\xi & \varphi(x) \end{pmatrix} = \text{Det } \varphi(x) \left(\lambda - \frac{1}{2} \langle \varphi(x)^{-1} \xi | \xi \rangle_E \right)$$

であるので次が成り立つ.

命題 3.1. $(\Omega^0)^* = \{ \lambda u + \xi + x \in V_E^0; x \in \Omega \text{ and } \lambda > \frac{1}{2} \langle \varphi(x)^{-1} \xi | \xi \rangle_E \}$.

3.1 エルミート型の場合

2.1 節で用いた記号を用いる. $V = \text{Herm}(r, \mathbb{K})$ の双対クラン積 ∇ は

$$x\nabla y := (x)^*y + yx \quad (x, y \in V)$$

で与えられる. またクラン (V, ∇) に付随する基本相対不変式 $\Delta_1^*(x), \dots, \Delta_r^*(x)$ は右下からの k 次小行列式 $\det_{[k]}(x)$ ($k = 1, \dots, r$) となる. さて (V_E^0, ∇) を 2.1 節で定義したクラン (V_E^0, Δ) の双対クランとすると, 次のように $\text{Herm}(rp+1, \mathbb{K})$ の部分クランとして実現される.

命題 3.2. クラン (V_E^0, ∇) はクラン $(\text{Herm}(rp+1, \mathbb{K}), \nabla)$ に次のように埋め込まれる:

$$V_E^0 \ni \lambda u + \xi + x \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & \frac{1}{\sqrt{2}}\iota(\xi)^* \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\iota(\xi) & x \otimes I_p \end{pmatrix} \in \text{Herm}(rp+1, \mathbb{K}).$$

ただし I_p は p 次の単位行列であり, $\iota: E \mapsto \mathbb{K}^{rp}$ は次のように定義される:

$$\iota: E \ni \xi = \begin{pmatrix} {}^t\xi_1 \\ \vdots \\ {}^t\xi_r \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_r \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{rp}.$$

ここで $\xi_k \in \mathbb{K}^p$ ($k = 1, \dots, r$) は縦ベクトルである.

ここで $\text{Herm}(rp+1, \mathbb{K})$ の部分空間 \mathfrak{Y} を以下のように定義する:

$$\mathfrak{Y} = \left\{ Y(\mu, \eta, y) = \begin{pmatrix} \mu & \eta^* \\ \eta & y \otimes I_p \end{pmatrix}; \mu \in \mathbb{R}, \eta \in \mathbb{K}^{rp}, y \in \text{Herm}(r, \mathbb{K}) \right\} \subset \text{Herm}(rp+1, \mathbb{K}).$$

すると (\mathfrak{Y}, ∇) はクラン $(\text{Herm}(rp+1, \mathbb{K}), \nabla)$ の部分クランになる. 特に命題 3.2 より双対クラン (V_E^0, ∇) は (\mathfrak{Y}, ∇) と同型になっていることがわかる. 一方命題 2.1 よりクラン (V_E^0, Δ) は (\mathfrak{X}, Δ) と同型であった. そこで \mathfrak{X} と \mathfrak{Y} との双対ペアを考察する. $\xi \in E, \eta \in \mathbb{K}^{rp}$ を次のように表す:

$$\xi = \begin{pmatrix} {}^t\xi_1 \\ \vdots \\ {}^t\xi_r \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_r \end{pmatrix}, \quad (\xi_j, \eta_j \in \mathbb{K}^p; j = 1, \dots, r).$$

ここで各 ξ_j, η_j はいずれも縦ベクトルである. このとき実双線型形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y} \mapsto \mathbb{R}$ を

$$\langle X(\lambda, \xi, x), Y(\mu, \eta, y) \rangle = \lambda\mu + 2\text{Re} \sum_{j=1}^r \xi_j^* \eta_j + \text{Re Tr}(xy)$$

と定義すると, これは \mathfrak{X} と \mathfrak{Y} との双対ペアになる. この双対ペアを通して \mathfrak{Y} を \mathfrak{X} の双対線型空間とみなし, Ω' を \mathfrak{Y} の正定値なものなす等質錐とする:

$$\Omega' = \{ Y \in \mathfrak{Y}; Y \text{ は正定値} \}.$$

また Ω^0 を系 2.4 により実現される等質錐とすると, 次が成り立つ.

定理 3.3. Ω' は双対ペア $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関する Ω^0 の双対錐である.

系 3.4. 等質錐 Ω' に付随する基本相対不変式を $P_j^*(Y)$ ($j = 1, \dots, r, r+1$) とすると,

$$P_j^*(Y(\mu, \eta, y)) = \begin{cases} \Delta_j^*(y) & (j = 1, \dots, r), \\ \mu \det y - \eta^*(\text{co}y \otimes I_p)\eta & (j = r+1). \end{cases}$$

注意 3.5. $\deg P_j^* = j$ ($j = 1, \dots, r, r+1$) である. 特に $p > 1$ とすれば Ω' は対称錐ではなく, Ishi-Nomura [9] で扱われた階数 3 の等質錐の, より高い階数のものへの一般化になっている.

3.2 ローレンツ型の場合

2.2節の記号を用いる。クラン (V, Δ) の双対クラン積 ∇ は

$$x \nabla y = (x_0 y_0 + B(\hat{x}, \hat{y}), x_0 \hat{y} + y_0 \hat{x} - y_n \hat{x} + B(\hat{x}, \hat{y}) e_n)$$

となり、双対クラン (V, ∇) に付随する基本相対不変式 Δ_1^*, Δ_2^* は

$$\Delta_1^*(x) = x_0 - x_n, \quad \Delta_2^*(x) = x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2 = \langle x, x \rangle_{1,n}$$

となる。ここでクラン (V_E^0, ∇) の基本相対不変式を求めるために式 (3.1) の末項

$$\text{Det} \begin{pmatrix} \lambda & \langle \cdot | \xi \rangle_E \\ \frac{1}{2} \xi & \varphi(x) \end{pmatrix} = \lambda \text{Det} \varphi(x) - \frac{1}{2} \langle {}^{\text{co}}\varphi(x) \xi | \xi \rangle_E \quad (3.2)$$

を考察する。 $\text{Det} \varphi(x) = (\det x)^{\dim E/2}$ であることと x が可逆であれば

$$x^{-1} = (\det x)^{-1} ({}^{\text{co}}x) \quad ({}^{\text{co}}x = (\text{tr } x) e_0 - x = x_0 e_0 - x_1 e_1 - \cdots - x_n e_n)$$

となることに注意する (cf. Faraut–Korányi [5]). ${}^{\text{co}}x$ はクリフォード代数の標準的な自己同型 $x \mapsto \tilde{x}$ に拡張することができるので、以下 ${}^{\text{co}}x$ のかわりに \tilde{x} で表す。このとき

$${}^{\text{co}}\varphi(x) = (\text{Det} \varphi(x)) \varphi(x)^{-1} = (\det x)^{\dim E/2 - 1} \varphi(\tilde{x})$$

となり、従って式 (3.2) は

$$\lambda \text{Det} \varphi(x) - \frac{1}{2} \langle {}^{\text{co}}\varphi(x) \xi | \xi \rangle_E = (\det x)^{\dim E/2 - 1} (\lambda \det x - \frac{1}{2} \langle \varphi(\tilde{x}) \xi | \xi \rangle_E)$$

となる。ここで $\det x$ は次数 2 の既約多項式であるので

$$\lambda \det x - \frac{1}{2} \langle \varphi(\tilde{x}) \xi | \xi \rangle_E$$

は既約多項式になる。これより次を得る。

定理 3.6. 等質錐 $(\Omega^0)^*$ の基本相対不変式を $P_j^*(\lambda u + \xi + x)$ ($j = 1, 2, 3$) とすれば、

$$P_j^*(\lambda u + \xi + x) = \begin{cases} \Delta_j^*(x) & (j = 1, 2) \\ \lambda \det x - \frac{1}{2} \langle \varphi(\tilde{x}) \xi | \xi \rangle_E & (j = 3). \end{cases}$$

注意 3.7. ローレンツ型の時も $\deg P_j^* = j$ ($j = 1, 2, 3$) が成り立つ。

参考文献

- [1] J. C. Baez, The octonions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **39** (2002), 145–181; Errata, *ibid.*, (2005), 213.
- [2] H. Braun and R. Koecher, *Jordan-Algebren*, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
- [3] J.-L. Clerc, Représentation d’une algèbre de Jordan, polynômes invariants et harmoniques de Stiefel, *J. Reine Angew. Math.*, **423** (1992), 47–71.
- [4] J.-L. Clerc, Determinantly homogeneous polynomials on representations of Euclidean Jordan algebras, *J. Lie Theory*, **12** (2002), 113–136.
- [5] J. Faraut and A. Korányi, *Analysis on symmetric cones*, Clarendon Press, Oxford, 1994.
- [6] F. R. Harvey, *Spinors and calibrations*, *Perspectives in Mathematics* **9**, Academic Press, Boston, 1990.
- [7] H. Ishi, Basic relative invariants associated to homogeneous cones and applications, *J. Lie Theory*, **11** (2001), 155–171.
- [8] H. Ishi, Representation of clans and homogeneous cones, *Vestnik Tambov University*, **16** (2011), 1669–1675.
- [9] H. Ishi and T. Nomura, Tube domain and an orbit of a complex triangular group, *Math. Z.*, **259** (2008), 697–711.
- [10] H. Nakashima and T. Nomura, Clans defined by representations of Euclidean Jordan algebras and the associated basic relative invariants, to appear in *Kyushu Journal of Mathematics*.
- [11] T. Nomura, On Penney’s Cayley transform of a homogeneous Siegel domain, *J. Lie Theory*, **11** (2001), 185–206.
- [12] T. Nomura, Right multiplication operators in the clan structure of a Euclidean Jordan algebra, *Vestnik Tambov University*, **16** (2011), 1717–1721.
- [13] E. B. Vinberg, The theory of convex homogeneous cones, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **12** (1963), 340–403.
- [14] E. B. Vinberg, The structure of the group of automorphisms of a homogeneous convex cone, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **13** (1965), 63–93.
- [15] F. Zhang, Quaternions and matrices of quaternions, *Linear Alg. Appl.*, **251** (1997), 21–57.