数理解析研究所講究録
第1825巻 2013年 103-119

Hankel Pfaffian と Selberg 積分*

Masao ISHIKAWA†

2010 Mathematics Subject Classification : Primary 05A30
Secondary 05A15, 15A15, 33D45.

Keywords : Hankel determinants, Pfaffian decomposition, Pfaffian of Catalan numbers, moments of orthogonal polynomials.

概要

ここでは, M. Ishikawa, H. Tagawa and J. Zeng, "Pfaffian decomposition and a Pfaffian analogue of q-Catalan Hankel determinants", `arxiv:1011.5941` の中で証明した q-Catalan Hankel Pfaffian を de Bruijn の公式と Askey の q-Selberg 積分公式を使った別証明を与える. また, 同じ手法を用いることにより, 上記論文の中で述べた予想の一部に証明も与える. これは、昨年10月の坂本玲峰氏による『組合せ論的表現論の拡がり』(数理研講究録 No.1795) の"A Pfaffian analogue of the Hankel determinants and the Selberg integrals" の続報である.

1 Introduction

この記事は, [10] の続編である. [10] で述べた証明のより詳しいバージョンと [10] の中では証明できなかった予想の証明を与える.

パフィアンは, 普通パーフェクトマッチングによって定義される. ここでは, $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le 2n}$ が歪対称行列であるとき, すなわち $a_{ji}=-a_{ij}$ が成り立つとき,

$$\operatorname{Pf} A=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{E}_{2n}}\operatorname{sgn}\sigma\, a_{\sigma(1)\sigma(2)}\dots a_{\sigma(2n-1)\sigma(2n)}$$

を定義として採用する. ここで,

$$\mathfrak{E}_{2n}:=\left\{\sigma\in\mathfrak{S}_{2n}\,\middle|\,\sigma(2i-1)<\sigma(2i)\quad(1\le i\le n)\right\}.$$

---

*これは Université Claude Bernard Lyon 1 の Jiang ZENG 氏との共同研究である.

†琉球大学教育学部 `ishikawa@edu.u-ryukyu.ac.jp`

である. 例えば $\mathfrak{E}_4$ は次の 6 個の置換

$$\begin{array}{lll}(1,2,3,4), & (1,3,2,4), & (1,4,2,3), \\ (2,3,1,4), & (2,4,1,3), & (2,3,1,4).\end{array}$$

からなり,

$$\mathrm{Pf}(a_{ij})_{1\leq i,j\leq 4} = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23}$$

である.

Hyperpfaffian は, パフィアンほど知られていないが, パフィアンの概念の拡張であって, Barvinok によって最初に定義された. ここでは [21] の定義を採用する.

定義 1.1. m, n を正整数とし, 配列 $B = (B(i_1,\ldots,i_{2m}))_{1\leq i_1,\ldots,i_{2m}\leq 2n}$ が, 任意の $(\tau_1,\ldots,\tau_m)\in(\mathfrak{S}_2)^m$ に対して

$$B(i_{\tau_1(1)}, i_{\tau_1(2)},\ldots,i_{\tau_m(2m-1)}, i_{\tau_m(2m)}) = \mathrm{sgn}(\tau_1)\cdots\mathrm{sgn}(\tau_m)B(i_1,\ldots,i_{2m})$$

をみたすとする. このとき B の hyperpfaffian は

$$\mathrm{Pf}^{[2m]}(B) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_m\in\mathfrak{E}_{2n}} \mathrm{sgn}(\sigma_1\cdots\sigma_m) \\ \times\prod_{i=1}^{n} B(\sigma_1(2i-1),\sigma_1(2i),\cdots,\sigma_m(2i-1),\sigma_m(2i)).$$

によって定義される.

この記事では, q-series に関する以下の標準的な記法を使う (see [4, 7]): 任意の整数 n に対して

$$(a;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty}(1-aq^k), \qquad (a;q)_n = \frac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty}.$$

ここで $(a;q)_n$ は q-**shifted factorial** といわれる. また, 以下の省略記法も用いる:

$$(a_1,a_2,\ldots,a_r;q)_\infty = (a_1;q)_\infty(a_2;q)_\infty\cdots(a_r;q)_\infty,$$
$$(a_1,a_2,\ldots,a_r;q)_n = (a_1;q)_n(a_2;q)_n\cdots(a_r;q)_n.$$

q-超幾何級数 ${}_{r+1}\phi_r$ は

$${}_{r+1}\phi_r\left[\begin{matrix}a_1,a_2,\ldots,a_{r+1}\\ b_1,\ldots,b_r\end{matrix};q,z\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1,a_2,\ldots,a_{r+1};q)_n}{(q,b_1,\ldots,b_r;q)_n}z^n.$$

によって定義される.

2 Pfaffian の和公式

$A=(a_{ij})_{i,j\geq 1}$ を半無限または有限の行列とする. $I=\{i_1,\dots,i_r\}$ を行の添字集合, $J=\{j_1,\dots,j_r\}$ を列の添字集合とするとき, 添字集合 (I,J) に対応する行・列を A から選んで作られる $r\times r$ 部分行列を $A_J^I=A_{j_1,\dots,j_r}^{i_1,\dots,i_r}$ と書く. また, 正整数 n に対して $[n]=\{1,\dots,n\}$ という記号を使う. 例えば $A=(a_{ij})_{i,j\geq 1}$ に対して

$$A_{2,3,5}^{1,2,4}=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{15} \\ a_{22} & a_{23} & a_{25} \\ a_{42} & a_{43} & a_{45} \end{pmatrix}.$$

である. また, 歪対称行列 A に対して, A_I^I を省略して A_I と書く. ここで, パフィアンの和公式を紹介する. このパフィアンの和公式は, のちに de Bruijn の定理を証明するのに使う.

定理 2.1. ([15, 16]) n と N を $2n\leq N$ である正整数とする. $H=(h_{i,j})_{1\leq i\leq 2n,1\leq j\leq N}$ を任意の $2n\times N$ 行列とし, $A=(\alpha_{i,j})_{1\leq i,j\leq N}$ を N 次の歪対称行列とする. このとき, 次式が成り立つ.

$$\sum_{\substack{I\subseteq[N]\\ \sharp I=2n}} \mathrm{Pf}(A_I)\det(H_I^{[2n]})=\mathrm{Pf}(Q), \tag{2.1}$$

ここで, 歪対称行列 Q は $Q=(Q_{i,j})=HAH^{\mathrm{T}}$ によって定義され, その (i,j) 成分は

$$Q_{i,j}=\sum_{1\leq k<l\leq N}\alpha_{k,l}\det(H_{k,l}^{i,j}), \qquad (1\leq i,j\leq 2n) \tag{2.2}$$

によって与えられる.

パフィアンの和公式の拡張として次の結果が [21] の中で得られている.

定理 2.2. ([21]) m, n, N を $2n\leq N$ をみたす正整数とする. 正整数 s $(1\leq s\leq m)$ に対して, $H(s)=(h_{ij}(s))_{1\leq i\leq 2n,1\leq j\leq N}$ を $2n\times N$ 矩形行列とする. また $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$ を N 次の歪対称行列とする. このとき

$$\sum_{\substack{I\subseteq[N]\\ \# I=2n}} \mathrm{Pf}(A_I)\prod_{s=1}^{m}\det\left(H(s)_I^{[2n]}\right)=\mathrm{Pf}^{[2m]}(Q),$$

が成り立つ. ここで, 配列 $Q=(Q_{i_1,\dots,i_{2m}})_{1\leq i_1,\dots,i_{2m}\leq 2n}$ は

$$Q_{i_1,\dots,i_{2m}}=\sum_{1\leq k<l\leq N}a_{k,l}\prod_{s=1}^{m}\det(H(s)_{k,l}^{i_{2s-1},i_{2s}}),$$

によって定義される.

次の命題は, 実際にパフィアンを計算するときに便利なので, ここに引用しておく [15, 16].

命題 2.3. $\{\alpha_k\}_{k\geq 1}$ を任意の数列とし n を正整数とする. $B=(b_{i,j})_{i,j\geq 1}$ を次によって成分が定義される歪対称行列とする.

$$b_{i,j}=\begin{cases}\alpha_i & \text{if } j=i+1 \text{ for } i\geq 1,\\ -\alpha_j & \text{if } i=j+1 \text{ for } j\geq 1,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{2.3}$$

$I=(i_1,\dots,i_{2n})$ を $1\leq i_1<\cdots<i_{2n}$ を満たす添字集合とするとき,

$$\mathrm{Pf}\,(B_I)=\begin{cases}\prod_{k=1}^{n}\alpha_{i_{2k-1}} & \text{if } i_{2k}=i_{2k-1}+1 \text{ for } k=1,\dots,n,\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases} \tag{2.4}$$

が成り立つ.

3 De Bruijn の公式と Hankel Pfaffians

0 から a までの q-Jackson 積分は

$$\int_0^a f(x)\,d_qx=(1-q)a\sum_{n=0}^{\infty}f(aq^n)q^n.$$

によって定義され, この和は $|q|<1$ のとき絶対収束する. また, 区間 $[a,b]$ における一般の q-Jackson 積分は

$$\int_a^b f(x)\,d_qx=\int_0^b f(x)\,d_qx-\int_0^a f(x)\,d_qx.$$

によって定義される. ω を重み関数 $w(x)$ によって定義される閉区間 $[a,b]$ 上の任意の測度とする, すなわち, $\omega(d_qx)=w(x)d_qx$. この測度 ω の モーメントは

$$\mu_n(q)=\int_a^b x^n\,\omega(d_qx).$$

によって定義される. また, この測度 ω に関する **直交多項式** $p_n(x)$ $(n=0,1,\dots)$ とは次の 2 つの条件をみたすものである.

(i) $\deg p_n(x)=n$,

(ii) 任意の $m,n\geq 0$ に対して $\int_a^b p_m(x)p_n(x)\omega(d_qx)=K_n\delta_{m,n}$.

ここで $K_n>0$ は定数である.

次の命題が de Bruijn の公式と呼ばれる:

命題 3.1. n を正の整数とし, $1 \leq i \leq 2n$ に対して $\phi_i(x)$ と $\psi_i(x)$ を閉区間 $[0,a]$ 上の連続関数とする. このとき

$$\int \cdots \int_{0 \leq x_1 < \cdots < x_n \leq a} \det\left(\phi_i(x_j) | \psi_i(x_j)\right) d_q\mu(x_1) \ldots d_q\mu(x_n) = \mathrm{Pf}\left(Q_{i,j}\right)_{1 \leq i,j \leq 2n}, \tag{3.1}$$

が成り立つ. ここで

$$Q_{i,j} = \int_0^a \{\phi_i(x)\psi_j(x) - \phi_j(x)\psi_i(x)\}\, d_q\mu(x) \tag{3.2}$$

であり, $(\phi_i(x_j)|\psi_i(x_j))$ は第 i 行 $(1 \leq i \leq 2n)$ が

$$(\phi_i(x_1), \psi_i(x_1), \ldots, \phi_i(x_n), \psi_i(x_n))$$

で与えられる $2n \times 2n$ 行列である.

命題 3.1 は次に述べる命題 3.2 の特別な場合なので, 証明はそちらで述べる.

命題 3.2. m と n を正整数とし, $1 \leq i \leq 2n$, $1 \leq s \leq m$ の範囲の i, s に対して $\phi_{s,i}(x)$ と $\psi_{s,i}(x)$ を区間 $[0,a]$ 上の関数とする. このとき

$$\begin{aligned}\int \cdots \int_{a \leq x_1 < \cdots < x_n \leq b} &\prod_{s=1}^{m} \det\left(\phi_{s,i}(x_j) | \psi_{s,i}(x_j)\right) \omega(d_q\boldsymbol{x}) \\ &= \mathrm{Pf}^{[2m]}\left(Q_{i_1,\cdots,i_{2m}}\right)_{1 \leq i_1,\cdots,i_{2m} \leq 2n},\end{aligned} \tag{3.3}$$

が成り立つ. ここで, $1 \leq i_1, \ldots, i_{2m} \leq 2n$ に対して

$$Q_{i_1,\cdots,i_{2m}} = \int_0^a \prod_{s=1}^{m} \left\{\phi_{s,i_{2s-1}}(x)\psi_{s,i_{2s}}(x) - \phi_{s,i_{2s}}(x)\psi_{s,i_{2s-1}}(x)\right\} \omega(d_qx) \tag{3.4}$$

である.

証明. N を $N \geq n$ を満たす正整数とし, $2N \times 2N$ 歪対称行列 $A = (\alpha_{i,j})_{1 \leq i < j \leq 2N}$ を

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } i \text{ is odd and } j = i+1, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

のように取る. このとき, $[2N]$ の任意の $2n$-元部分集合 I に対して, 命題 2.3 から,

$$\mathrm{Pf}\left(A_I\right) = \begin{cases} 1 & \text{if } I = \{2k_1 - 1, 2k_1, \ldots, 2k_n - 1, 2k_n\}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

となる．また $H(s)=(h_{i,j}(s))_{1\le i\le 2n,1\le j\le 2N}$ を任意の $2n\times 2N$ 行列とし，

$$Q_{i_1,\dots,i_{2m}}=\sum_{k=1}^{N}\prod_{s=1}^{m}\begin{vmatrix}h_{i_{2s-1},2k-1}(s) & h_{i_{2s-1},2k}(s)\\ h_{i_{2s},2k-1}(s) & h_{i_{2s},2k}(s)\end{vmatrix}$$

とおくと，定理 2.2 により

$$\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_n\le N}\prod_{s=1}^{m}\det H(s)^{1,2,\dots,2n-1,2n}_{2k_1-1,2k_1,\dots,2k_n-1,2k_n}=\mathrm{Pf}^{[2m]}(Q_{i_1,\dots,i_{2m}})_{1\le i_1,\dots,i_{2m}\le 2n}$$

となる．この式で $N\to\infty$ とすると，

$$\begin{aligned}\sum_{1\le k_1<k_2<\cdots<k_n}&\prod_{s=1}^{m}\det H(s)^{1,2,\dots,2n-1,2n}_{2k_1-1,2k_1,\dots,2k_n-1,2k_n}\\&=\mathrm{Pf}^{[2m]}\left(\lim_{N\to\infty}Q_{i_1,\dots,i_{2m}}\right)_{1\le i_1,\dots,i_{2m}\le 2n}\end{aligned}\tag{3.5}$$

が得られる．(3.5) 式において

$$h_{i,2k-1}(s)=\begin{cases}(1-q)a\phi_{s,i}(aq^{k-1})w(aq^{k-1})q^{k-1} & \text{if } s=1,\\ \phi_{s,i}(aq^{k-1}) & \text{otherwise,}\end{cases}$$

かつ $h_{i,2k}(s)=\psi_{s,i}(aq^{k-1})$ とおくと

$$\begin{aligned}(1-q)^na^n\sum_{0\le k_1<k_2<\cdots<k_n}&\prod_{s=1}^{m}\det\left(\phi_{s,i}(q^{k_j})|\psi_{s,i}(q^{k_j})\right)\prod_{\nu=1}^{n}w(q^{k_\nu})q^{k_\nu}\\&=\mathrm{Pf}(Q'_{i_1,\dots,i_{2m}})_{1\le i<j\le 2n},\end{aligned}\tag{3.6}$$

が得られる．ここで

$$Q'_{i_1,\dots,i_{2m}}=(1-q)a\sum_{k=0}^{\infty}\prod_{s=1}^{m}\begin{vmatrix}\phi_{s,i_{2s-1}}(aq^k) & \psi_{s,i_{2s-1}}(aq^k)\\ \phi_{s,i_{2s}}(aq^k) & \psi_{s,i_{2s}}(aq^k)\end{vmatrix}w(aq^k)q^k \tag{3.7}$$

これで望む式が証明された． □

系 3.3. $\omega(d_qx)=w(x)d_qx$ を区間 $[0,a]$ 上の測度とし，$\mu_i=\int_0^a x^i\,\omega(d_qx)$ を，この測度の第 i モーメントとする．このとき

$$\begin{aligned}&\mathrm{Pf}\Big((q^{i-1}-q^{j-1})\mu_{i+j+r-2}\Big)_{1\le i<j\le 2n}\\&=\frac{q^{\binom{n}{2}}(1-q)^n}{n!}\int_{[0,a]^n}\prod_i x_i^{r+1}\prod_{i<j}(x_i-x_j)^2\prod_{i<j}(qx_i-x_j)(x_i-qx_j)\,\omega(d_q\boldsymbol{x}).\end{aligned}\tag{3.8}$$

が成り立つ．

証明. (3.2) 式において $\varphi_i(x) = q^{i-1}x^{i-1}$ かつ $\psi_i(x) = x^{i+r-1}$ とおくと,

$$Q_{i,j} = (q^{i-1} - q^{j-1}) \int_0^1 x^{i+j+r-2} \omega(d_q x) = (q^{i-1} - q^{j-1})\mu_{i+j+r-2}.$$

を得る. 一方, (3.1) 式に同様の代入を行うと

$$\begin{aligned}
&\det\left(\phi_i(x_j)|\psi_i(x_j)\right)_{1\le i\le 2n,\,1\le j\le n} = \det\left(q^{i-1}x_j^{i-1}|x_j^{i-1}\right)_{1\le i\le 2n,\,1\le j\le n} \\
&= q^{\binom{n}{2}}(1-q)^n(x_1\dots x_n)^{r+1}\prod_{i<j}(x_i-x_j)^2\prod_{i<j}(qx_i-x_j)(x_i-qx_j)
\end{aligned}$$

を得る. ここで, 最後の等号を示すにはヴァンデルモンド行列式 $\det(a_j^{i-1}) = \prod_{i<j}(a_j - a_i)$ を使う. したがって

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Pf}\left((q^{i-1}-q^{j-1})\mu_{i+j+r-2}\right)_{1\le i<j\le 2n} \\
&= q^{\binom{n}{2}}(1-q)^n \int\cdots\int_{0\le x_1<\cdots<x_n\le a}\prod_i x_i^{r+1}\prod_{i<j}(x_i-x_j)^2 \\
&\qquad\times\prod_{i<j}(qx_i-x_j)(x_i-qx_j)\,\omega(d_q\boldsymbol{x}).
\end{aligned}$$

が証明された. 示したい式は, この式の簡単な帰結である. □

系 3.3 において $q \to 1$ とすると, 次の系をえる.

系 3.4. $\psi(dx) = \psi'(x)dx$ を閉区間 $[0, a]$ 上の測度とする, また $\mu_i = \int_0^a x^i\,\psi(dx)$ を, この測度の第 i モーメントとする. このとき

$$\mathrm{Pf}\left((j-i)\mu_{i+j+r-2}\right)_{1\le i<j\le 2n} = \frac{1}{n!}\int_{[0,a]^n}\prod_i x_i^{r+1}\prod_{i<j}(x_i-x_j)^4\,\psi(d\boldsymbol{x}). \tag{3.9}$$

が成り立つ.

系 3.3 の証明と同様に命題 3.2 において, $\phi_{s,i}(x) = ix^{i-1}$, $\psi_{s,i}(x) = x^{i+r_s-1}$ という代入を行うと, 次の系をえる.

系 3.5. $\psi(dx) = \psi'(x)dx$ を閉区間 $[0, a]$ 上の測度とする, また $\mu_i = \int_0^a x^i\,\psi(dx)$ を, この測度の第 i モーメントとする. このとき

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Pf}^{[2m]}\left(\prod_{s=1}^m(i_{2s}-i_{2s-1})\cdot\mu_{i_1+\cdots+i_{2m}+r}\right)_{0\le i<j\le 2n-1} \\
&= \frac{1}{n!}\int_{[a,b]^n}\prod_i x_i^{r+m}\prod_{i<j}(x_i-x_j)^{4m}\,\psi(d\boldsymbol{x})
\end{aligned} \tag{3.10}$$

が成り立つ.

4 Selberg-Askey 積分公式

この節では, 次の [13, Theorem 3.1] の中の主定理の別証明の概要を述べる.

定理 4.1. 正整数 n と整数 $r \geq 0$ に対して,

$$\mathrm{Pf}\left((q^{i-1}-q^{j-1})\frac{(aq;q)_{i+j+r-2}}{(abq^2;q)_{i+j+r-2}}\right)_{1\leq i,j\leq 2n}$$
$$= a^{n(n-1)}q^{n(n-1)(4n+1)/3+n(n-1)r}\prod_{k=1}^{n-1}(bq;q)_{2k}\prod_{k=1}^{n}\frac{(q;q)_{2k-1}(aq;q)_{2k+r-1}}{(abq^2;q)_{2(k+n)+r-3}} \tag{4.1}$$

が成り立つ.

ここでは, 積分区間を $[0,1]$ とし, 測度を

$$\int_0^1 f(x)\,\omega(d_qx) = \frac{(aq;q)_\infty}{(abq^2;q)_\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(bq;q)_k}{(q;q)_k}(aq)^k f\left(q^k\right) \tag{4.2}$$

によって定義する. すなわち $a = q^\alpha$ とおくと重み関数を,

$$w(x) = \frac{1}{1-q}\cdot\frac{(aq,bq;q)_\infty}{(abq^2,q;q)_\infty}\cdot\frac{(qx;q)_\infty}{(bqx;q)_\infty}x^{\alpha+1},$$

によって与えるのと同等である. q-二項定理により, 第 n モーメントは

$$\mu_n = \int_0^1 x^n\,\omega(d_qx) = \frac{(aq;q)_n}{(abq^2;q)_n} \quad (n=0,1,2,\dots) \tag{4.3}$$

となる. ここでは使わないが, この測度に関する直交多項式として Little q-Jacobi 多項式 [7, 19]

$$p_n(x;a,b;q) = \frac{(aq;q)_n}{(abq^{n+1};q)_n}(-1)^n q^{\binom{n}{2}}{}_2\phi_1\left[\begin{matrix}q^{-n}, abq^{n+1}\\ aq\end{matrix};q,xq\right] \tag{4.4}$$

が知られている. q-ガンマ関数は

$$\Gamma_q(a) = \frac{(q;q)_\infty}{(q^a;q)_\infty}(1-q)^{1-a}$$

によって定義される $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}_{<0}$ 上の関数である. まず (3.8) 式より

$$\mathrm{Pf}\left((q^{i-1}-q^{j-1})\frac{(aq;q)_{i+j+r-2}}{(abq^2;q)_{i+j+r-2}}\right)_{1\leq i<j\leq 2n}$$
$$= C\int_{[0,1]^n}\prod_{i<j}\prod_{l=0}^{1}(x_i-q^lx_j)(x_i-q^{-l}x_j)\prod_i x_i^{\alpha+r+1}\frac{(qx_i;q)_\infty}{(bqx_i;q)_\infty}\,d_q\boldsymbol{x}$$

をえる．ここで$C=\frac{q^{n(n-1)}}{n!}\left\{\frac{(aq,bq;q)_\infty}{(abq^2,q;q)_\infty}\right\}^n$とする．

Askey [1] は，次のような Selberg 積分公式の q-アナログを予想し [1, Conjecture 1], Habsieger [8, 9] と Kadell [18, Theorem 2;$l=m=0$] によって，独立に証明された，

$$\int_{[0,1]^n}\prod_{i<j}t_i^{2k}\left(q^{1-k}t_j/t_i;q\right)_{2k}\prod_{i=1}^n t_i^{x-1}\frac{(t_iq;q)_\infty}{(t_iq^y;q)_\infty}d_q\boldsymbol{t}=q^{kx\binom{n}{2}+2k^2\binom{n}{3}}S_n(x,y;q). \tag{4.5}$$

ここで

$$S_n(x,y;q)=\prod_{j=1}^n\frac{\Gamma_q(x+(j-1)k)\Gamma_q(y+(j-1)k)\Gamma_q(jk+1)}{\Gamma_q(x+y+(n+j-2)k)\Gamma_q(k+1)} \tag{4.6}$$

である．現在では，この式は Askey-Habsieger-Kadell の公式として知られる．ここでは，(4.5) を仮定すると，次の (4.7) 式が示されることを示す．

定理 4.2. ([8]) (4.5) から次の (4.7) 式が示せる．

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^n}&\prod_{i<j}\prod_{l=0}^{k-1}(t_j-q^lt_i)(t_j-q^{-l}t_i)\prod_i t_i^{x-1}\frac{(t_iq;q)_\infty}{(t_iq^y;q)_\infty}d_q\boldsymbol{t}\\&=n!q^{kx\binom{n}{2}+2k^2\binom{n}{3}}\frac{S_n(x,y;q)}{\Gamma_{q^k}(n+1)}.\end{aligned} \tag{4.7}$$

証明. まず

$$\begin{aligned}\Delta_k^0(\boldsymbol{t})&=\prod_{i<j}\left(\frac{t_i}{t_j};q\right)_k\left(\frac{qt_j}{t_i};q\right)_k\\\Delta_k(\boldsymbol{t})&=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathscr{S}_n}\Delta_k^0(\sigma\boldsymbol{t})\\\Delta_k^1(\boldsymbol{t})&=\prod_{i<j}\prod_{l=0}^{k-1}(t_j-q^lt_i)(t_j-q^{-l}t_i)\end{aligned}$$

とおく．(4.5) 式の被積分関数の中で

$$t_i^{2k}\left(q^{1-k}t_j/t_i;q\right)_{2k}=(-1)^k(t_it_j)^kq^{-\binom{k}{2}}\left(t_i/t_j;q\right)_k\left(qt_j/t_i;q\right)_k.$$

を使うと

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{[0,1]^n} \prod_{i<j} t_i^{2k} \left(q^{1-k}t_j/t_i;q\right)_{2k} \prod_{i=1}^{n} t_i^{x-1} \frac{(t_iq;q)_\infty}{(t_iq^y;q)_\infty} d_q\boldsymbol{t} \\
&= (-1)^{k\binom{n}{2}} q^{-\binom{k}{2}\binom{n}{2}} \int_{[0,1]^n} \Delta_k^0(\boldsymbol{t}) \prod_i t_i^{x+k(n-1)-1} \frac{(t_iq;q)_\infty}{(t_iq^y;q)_\infty} d_q\boldsymbol{t} \\
&= \frac{(-1)^{k\binom{n}{2}} q^{-\binom{k}{2}\binom{n}{2}}}{n!} \sum_{\sigma\in\mathscr{S}_n} \int_{[0,1]^n} \Delta_k(\sigma\boldsymbol{t}) \prod_i t_{\sigma(i)}^{x+k(n-1)-1} \frac{(t_{\sigma(i)}q;q)_\infty}{(t_{\sigma(i)}q^y;q)_\infty} d_q\boldsymbol{t} \\
&= \frac{(-1)^{k\binom{n}{2}} q^{-\binom{k}{2}\binom{n}{2}}}{n!} \int_{[0,1]^n} \Delta_k(\boldsymbol{t}) \prod_i t_i^{x+k(n-1)-1} \frac{(t_iq;q)_\infty}{(t_iq^y;q)_\infty} d_q\boldsymbol{t}
\end{aligned}
$$

ここで [8, (2.8)] 式

$$
\Delta_k(\boldsymbol{t}) = \frac{\Gamma_{q^k}(n+1)}{n!} \prod_{i\neq j} \left(\frac{t_i}{t_j};q\right)_k \tag{4.8}
$$

を使うと

$$
\Delta_k(\boldsymbol{t}) = (-1)^{k\binom{n}{2}} q^{\binom{k}{2}\binom{n}{2}} \frac{\Gamma_{q^k}(n+1)}{n!} \prod_{i=1}^{n} t_i^{-k(n-1)} \cdot \Delta_k^1(\boldsymbol{t}) \tag{4.9}
$$

だから

$$
I = \frac{\Gamma_{q^k}(n+1)}{n!} \int_{[0,1]^n} \Delta_k^1(\boldsymbol{t}) \prod_{i=1}^{n} t_i^{x-1} \frac{(t_iq;q)_\infty}{(t_iq^y;q)_\infty} d_q\boldsymbol{t}
$$

をえる. したがって (4.5) 式より

$$
\int_{[0,1]^n} \Delta_k^1(\boldsymbol{t}) \prod_{i=1}^{n} t_i^{x-1} \frac{(t_iq;q)_\infty}{(t_iq^y;q)_\infty} d_q\boldsymbol{t} = n! q^{kx\binom{n}{2}+2k^2\binom{n}{3}} \frac{S_n(x,y;q)}{\Gamma_{q^k}(n+1)}
$$

が示された. □

よって,

$$
\frac{S_n(x,y;q)}{\Gamma_{q^k}(n+1)} = \frac{(1-q)^n}{(q;q)_{k-1}^n} \prod_{j=1}^{n} \frac{(q^{x+y+(n+j-2)k},q;q)_\infty (q;q)_{jk-1}}{(q^{x+(j-1)k},q^{y+(j-1)k};q)_\infty}.
$$

と (4.7) 式を使うと (4.1) 式が示される.

5 Al-Salam and Carlitz I,II

ここでは次の記号を使う.

$$e_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(q;q)_n} = \frac{1}{(x;q)_\infty},$$
$$E_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}} x^n}{(q;q)_n} = (-x;q)_\infty.$$

Al-Salam と Carlitz [3, 6] は, 直交多項式 $\{U_n^{(a)}(y;q)\}$ $(a<0)$ と $\{V_n^{(a)}(x;q)\}$ を, 次のように定義した:

$$\rho_a(x;q)e_q(xy) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n^{(a)}(y;q)\frac{x^n}{(q;q)_n},$$
$$\frac{1}{\rho_a(x;q)}E_q(-xy) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n^{(a)}(y;q)\frac{(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} x^n}{(q;q)_n}$$

ここで

$$\rho_a(x;q) = (x;q)_\infty (ax;q)_\infty = E_q(-x)E_q(-ax).$$

とする. $\{U_n^{(a)}(y;q)\}$ は Al-Salam and Carlitz I 多項式, $\{V_n^{(a)}(x;q)\}$ は Al-Salam and Carlitz II 多項式といわれる. これら多項式の直交性 [3, 6] は

$$\int_a^1 U_m^{(a)}(x;q)U_n^{(a)}(x;q)w_U^{(a)}(x;q)\,d_qx = (1-q)(-a)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}(q;q)_n\delta_{m,n}, \tag{5.1}$$

$$\int_1^\infty V_m^{(a)}(x;q)V_n^{(a)}(x;q)w_V^{(a)}(x;q)\,d_qx = (1-q)a^n q^{-n^2}(q;q)_n\delta_{m,n} \tag{5.2}$$

で与えられる. ここで, 重み関数は

$$w_U^{(a)}(x;q) = \frac{(qx;q)_\infty \left(\frac{qx}{a};q\right)_\infty}{(q;q)_\infty (aq;q)_\infty \left(\frac{q}{a};q\right)_\infty}$$
$$w_V^{(a)}(x;q) = \frac{(q;q)_\infty (aq;q)_\infty \left(\frac{q}{a};q\right)_\infty}{(x;q)'_\infty \left(\frac{x}{a};q\right)_\infty}$$

とする. ダッシュ付記号 $(x;q)'_\infty$ は, 0 となる成分を除外することを意味する. また Jackson 積分は

$$\int_a^1 f(x)d_qx = (1-q)\left\{\sum_{n=0}^{\infty} f(q^n)q^n - a\sum_{n=0}^{\infty} f(aq^n)q^n\right\}$$
$$\int_1^\infty f(x)d_qx = (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} f(q^{-n})q^{-n}$$

であることに注意しよう. この測度関数のモーメントは, それぞれ

$$\int_a^1 x^n w_U^{(a)}(x;q)d_qx = (1-q)\,F_n^{(a)}(a;q),$$

$$\int_1^\infty x^n w_V^{(a)}(x;q)d_qx = (1-q)\,G_n^{(a)}(a;q)$$

で与えられる. ここで

$$F_n^{(a)}(a;q) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q a^k, \qquad G_n^{(a)}(a;q) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q a^{k(k-n)},$$

また $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}}$ とする. この節では, 次の定理を証明する. 次の (5.3) 式 (5.3) 式は [13, Konjecture 6.1] の中で予想として述べられている. しかし [13, Konjecture 6.1] で述べた予想の q の指数は間違っている.

定理 5.1. $F_n(a;q)$ と $G_n(a;q)$ を上のようにする. このとき

$$\mathrm{Pf}\left((q^{i-1}-q^{j-1})F_{i+j-3}(a;q)\right)_{1\le i,j\le 2n} = a^{n(n-1)}q^{\frac{1}{6}n(n-1)(4n-5)}\prod_{k=1}^{n}(q;q)_{2k-1}, \tag{5.3}$$

$$\mathrm{Pf}\left((q^{i-1}-q^{j-1})F_{i+j-2}(a;q)\right)_{1\le i,j\le 2n}$$
$$= a^{n(n-1)}q^{\frac{1}{6}n(n-1)(4n+1)}\prod_{k=1}^{n}(q;q)_{2k-1}\sum_{k=0}^{n} q^{(n-k)(n-k-1)}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^2} a^k. \tag{5.4}$$

$$\mathrm{Pf}\left((q^{i-1}-q^{j-1})G_{i+j-3}(a;q)\right)_{1\le i,j\le 2n} = a^{n(n-1)}q^{-n(n-1)(4n-5)/3}\prod_{k=1}^{n}(q;q)_{2k-1}, \tag{5.5}$$

$$\mathrm{Pf}\left((q^{i-1}-q^{j-1})G_{i+j-2}(a;q)\right)_{1\le i,j\le 2n}$$
$$= a^{n(n-1)}q^{-\frac{2}{3}n(n-1)(2n-1)}\prod_{k=1}^{n}(q;q)_{2k-1}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q^2} a^k. \tag{5.6}$$

が成り立つ.

この節では, この定理を証明する. このために (3.8) より得られる

$$\mathrm{Pf}\Big((q^{i-1}-q^{j-1})\,F^{(a)}_{i+j+r-2}(a;q)\Big)_{1\le i<j\le 2n} = \frac{1}{n!}q^{n(n-1)}(1-q)^n$$
$$\times\int_{[a,1]^n}\prod_{i<j}\prod_{l=0}^{1}(x_i-q^lx_j)(x_i-q^{-l}x_j)\prod_{i=1}^{n}x_i^{r+1}w_U^{(a)}(x_i;q)d_q\boldsymbol{x}, \tag{5.7}$$
$$\mathrm{Pf}\Big((q^{i-1}-q^{j-1})\,G^{(a)}_{i+j+r-2}(a;q)\Big)_{1\le i<j\le 2n} = \frac{1}{n!}q^{n(n-1)}(1-q)^n$$
$$\times\int_{[1,\infty)^n}\prod_{i<j}\prod_{l=0}^{1}(x_i-q^lx_j)(x_i-q^{-l}x_j)\prod_{i=1}^{n}x_i^{r+1}w_V^{(a)}(x_i;q)d_q\boldsymbol{x}. \tag{5.8}$$

という式を $r=-1,0$ の場合に使う.

τ_i を i 番目の変数に対する q-shift operator とする. すなわち

$$\tau_i f(x_1,\dots,x_n)=f(x_1,\dots,x_{i-1},qx_i,x_{i+1},\dots,x_n),$$

とし, n 変数の対称関数に対する Macdonald operator M_1 を

$$M_1:=\sum_{i=1}^{n}A_i(t)\tau_i,\quad A_i(t):=\prod_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j},$$

によって定義する. また

$$E_k:=\sum_{i=1}^{n}x^kA_i(t)\frac{\partial}{\partial_q x_i},\quad \frac{\partial}{\partial_q x_i}:=\frac{1-\tau_i}{(1-q)x_i}$$

とおく. また M_1 において q と t を q^{-1} と t^{-1} に置き換えた operator を $\widetilde{M_1}$ と書く. $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)$ を変数とする対称関数 $U_\lambda^{(a)}(\boldsymbol{x};q,t)$ を次のように定義する:

$$\mathscr{H}U_\lambda^{(a)}(\boldsymbol{x};q,t)=\widetilde{e}(\lambda)U_\lambda^{(a)}(\boldsymbol{x};q,t)$$

ここで $\mathscr{H}$ は

$$\mathscr{H}=\widetilde{M_1}-(1+a)[E_0,\widetilde{M_1}]+a[E_0,[E_0,\widetilde{M_1}]],$$

によって定義される線形作用素で, $\widetilde{e}(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}q^{-\lambda_i}t^{-n+i}$ とする. また, 対称関数 $V_\lambda^{(a)}(\boldsymbol{x};q,t)$ を

$$V_\lambda^{(a)}(\boldsymbol{x};q,t)=U_\lambda^{(a)}(\boldsymbol{x};q^{-1},t^{-1})$$

によって定義する. このとき Baker と Forrester [5] は

$$\int_{[a,1]^n} \Delta_k^2(\boldsymbol{x}) \prod_{i=1}^{n} w_U^{(a)}(x_i;q) d_q \boldsymbol{x}$$
$$= (1-q)^n (-a)^{\frac{kn(n-1)}{2}} q^{k^2\binom{n}{3} - \frac{k(k-1)}{2}\binom{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \frac{(q;q)_{ki}}{(q;q)_k} \tag{5.9}$$

$$\int_{[1,\infty]^n} \Delta_k^2(\boldsymbol{x}) \prod_{i=1}^{n} w_V^{(a)}(x_i;q)\, d_q \boldsymbol{x}$$
$$= (1-q)^n a^{\frac{kn(n-1)}{2}} q^{-2k^2\binom{n}{3} - k^2\binom{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} \frac{(q;q)_{ki}}{(q;q)_k} \tag{5.10}$$

という式を証明した. ここで

$$\Delta_k^2(\boldsymbol{x}) = \prod_{i<j} \prod_{l=-k+1}^{k} (x_i - q^l x_j)$$

とする. また, $\lambda \neq \mu$ のとき

$$\int_{[a,1]^n} U_\lambda^{(a)}(\boldsymbol{x};q,t) U_\mu^{(a)}(\boldsymbol{x};q,t) \Delta_k^2(\boldsymbol{x}) \prod_{i=1}^{n} w_U^{(a)}(x_i;q) d_q \boldsymbol{x} = 0 \tag{5.11}$$

$$\int_{[1,\infty]^n} V_\lambda^{(a)}(\boldsymbol{x};q,t) V_\mu^{(a)}(\boldsymbol{x};q,t) \Delta_k^2(\boldsymbol{x}) \prod_{i=1}^{n} w_V^{(a)}(x_i;q)\, d_q \boldsymbol{x} = 0 \tag{5.12}$$

という直交性もこの論文の中で示されている. ここでは, まず (5.7) 式と (5.9) 式を使って (5.3) 式を, また (5.8) 式と (5.10) 式を使って (5.5) 式を証明する. まず (4.9) 式を使うと (5.7) 式の右辺の積分は

$$\int_{[a,1]^n} \Delta_k^1(\boldsymbol{x}) \prod_{i=1}^{n} x_i^{r+1} w_U^{(a)}(x_i;q) d_q \boldsymbol{x}$$
$$= \frac{(-1)^{k\binom{n}{2}} q^{-\binom{k}{2}\binom{n}{2}} n!}{\Gamma_{q^k}(n+1)} \int_{[a,1]^n} \Delta_k(\boldsymbol{x}) \prod_{i=1}^{n} x_i^{k(n-1)+r+1} w_U^{(a)}(x_i;q) d_q \boldsymbol{x}$$
$$= \frac{(-1)^{k\binom{n}{2}} q^{-\binom{k}{2}\binom{n}{2}} n!}{\Gamma_{q^k}(n+1)} \int_{[a,1]^n} \Delta_k^0(\boldsymbol{x}) \prod_{i=1}^{n} x_i^{k(n-1)+r+1} w_U^{(a)}(x_i;q) d_q \boldsymbol{x}$$

ここで

$$\Delta_k^2(\boldsymbol{x}) = (-1)^{k\binom{n}{2}} q^{-\binom{k}{2}\binom{n}{2}} \prod_{i=1}^{n} x_i^{k(n-1)} \cdot \Delta_k^0(\boldsymbol{x})$$

を使うと

$$= \frac{n!}{\Gamma_{q^k}(n+1)} \int_{[a,1]^n} \Delta_k^2(\boldsymbol{x}) \prod_{i=1}^{n} x_i^{r+1} w_U^{(a)}(x_i;q) d_q \boldsymbol{x}$$

$r=-1$ のとき (5.9) 式より (5.3) が示される．このとき $k=2$ を使う．同様にして，ほぼ平行した議論により (5.5) が示される．最後に (5.4) と (5.6) を示すには $r=0$ のときの (5.7) 式と (5.8) 式において $\prod_{i=1}^n x_i = e_n(\boldsymbol{x})$ を対称関数 $U_\lambda^{(a)}(\boldsymbol{x};q,t)$ または $V_\lambda^{(a)}(\boldsymbol{x};q,t)$ で展開して，直交性 (5.11) または (5.12) を使う。ここで

$$\sum_{r\geq 0} e_r(\boldsymbol{x})z^r = \prod_{i=1}^n (1+x_i z)$$

で定義される $e_r(\boldsymbol{x})$ を r 次の基本対称式という．ここでは，結果だけ述べると，基本対称式は

$$e_r(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=0}^r \widetilde{f}_{r-i}(a) \begin{bmatrix} n-i \\ r-i \end{bmatrix}_t U_{(1^i)}^{(a)}(\boldsymbol{x};q,t)$$

によって対称式 $U_\lambda^{(a)}(\boldsymbol{x};q,t)$ に展開される． ここで $\widetilde{f}_i(a)$ は初期条件 $\widetilde{f}_0(a)=1$, $\widetilde{f}_1(a)=1+a$ と漸化式

$$\widetilde{f}_i(a) = (1+a)t^{i-1}\widetilde{f}_{i-1}(a) + at^{i-2}(1-t^{i-1})\widetilde{f}_{i-2}(a)$$

で定義される．この漸化式から

$$\widetilde{f}_i(a) = \sum_{j=0}^i \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix}_t t^{\frac{j(j-1)}{2}+\frac{(i-j)(i-j-1)}{2}} a^j$$

となる．ここで $U_\emptyset^{(a)}(\boldsymbol{x};q,t)=1$ であることに注意すると，直交性 (5.11) より

$$\begin{aligned}
&\int_{[a,1]^n} \Delta_k^2(\boldsymbol{x}) \prod_{i=1}^n x_i w_U^{(a)}(x_i;q) d_q\boldsymbol{x} \\
&= \int_{[a,1]^n} \Delta_k^2(\boldsymbol{x}) e_n(\boldsymbol{x}) \prod_{i=1}^n w_U^{(a)}(x_i;q) d_q\boldsymbol{x} \\
&= \sum_{i=0}^n \widetilde{f}_{n-i}(a) \int_{[a,1]^n} U_{(1^i)}^{(a)}(\boldsymbol{x};q,t)\Delta_k^2(\boldsymbol{x}) \prod_{i=1}^n w_U^{(a)}(x_i;q) d_q\boldsymbol{x}
\end{aligned}$$

$t=q^k$ のとき

$$= \widetilde{f}_n(a) \int_{[a,1]^n} \Delta_k^2(\boldsymbol{x}) \prod_{i=1}^n w_U^{(a)}(x_i;q) d_q\boldsymbol{x}$$

これに (5.7) 式を代入して計算すると (5.4) をえる．同様にして (5.6) も計算できる．最後に，このことからわかるのは，一般の r に対して，この形のパフィアンを計算するには，矩形 $n\times(r+1)$ の shape に対応する基本対称式 $e_n(x_1,\ldots,x_n)^r$ の $U_\lambda^{(a)}(\boldsymbol{x};q,t)$ による展開を知る必要がある．

参考文献

[1] R. Askey, Some basic hypergeometric extenqions of integrals of Selberg and Andrews, SIAM J. Math. Anal., t. 11, 1980, p. 203–951.

[2] N. G. de Bruijn, On some multiple integrals involving determinants, J. Indian Math. Soc., **19** (1955), 133-151.

[3] W. Al-Salam and L. Carlitz, "Some orthogonal q-polynomials", *Math. Nachr.*, **30** (1965), 47–61.

[4] G. Andrews, R. Askey and R. Roy, *Special Functions*, Cambridge Univ. Press, (1999).

[5] T. H. Baker and P. J. Forrester, "Multivariable Al-Salam & Carlitz polynomials associated with the type A q-Dunkl kernel", *Math. Nachr.* **212** (2000), 5–35.

[6] T. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, (1978).

[7] G. Gasper and M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series (2nd ed.)*, Cambridge Univ. Press, (1990, 2004).

[8] L. Habsieger, Une q-intégrale de Selberg-Askey, *Publ. I.R.M.A. Strasboug* **334** (1987), 25 – 45.

[9] L. Habsieger, Une q-intégrale de Selberg et Askey, *SIAM J. Math. Anal.* **19** (1988), no. 6, 1475 – 1489

[10] M. Ishikawa and J. Zeng, "A Pfaffian analogue of the Hankel determinants and the Selberg integrals", 数理研講究録 No.1795 (2012), 189 – 203.

[11] M. Ishikawa and C. Koutschan, "Zeilberger's Holonomic Ansatz for Pfaffians", `arxiv:1011.5941`.

[12] M. Ishikawa, H. Tagawa and J. Zeng, "A q-analogue of Catalan Hankel determinants", *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B11** (2009), 19–42.

[13] M. Ishikawa, H. Tagawa and J. Zeng, "Pfaffian decomposition and a Pfaffian analogue of q-Catalan Hankel determinants", `arxiv:1011.5941`.

[14] M. Ishikawa, H. Tagawa and J. Zeng, "A generalization of the Mehta-Wang determinant and Askey-Wilson polynomials ", `arxiv:1210.5305`.

[15] M. Ishikawa and M. Wakayama, "Minor summation formula of Pfaffians", *Linear and Multilinear Alg.* **39** (1995), 285-305

[16] M. Ishikawa and M. Wakayama, "Applications of minor summation formula, III: Plücker relations, lattice paths and Pfaffian identities", *J. Combin. Theory Ser. A.*, **113** (2006), 113–155.

[17] M. Ishikawa and J. Zeng, "q-Selberg integrals and q-Catalan Hankel Pfaffians", in preparation.

[18] K. W. J. Kadell, A proof of Askeys conjectured q-analogue of Selberg's integral and a conjecture of Morris, SIAM J. Math. Anal. 19 (1988), 969-986.

[19] R. Koekoek, P. Lesky and R. Swarttouw, *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q-Analogues*, Springer-Verlag, (2000).

[20] J. Luque and J. Thibon, "Hankel hyperdeterminants and Selberg integrals", *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** (2003), 5267–5292.

[21] S. Matsumoto, "Hyperdeterminantal expressions for Jack functions of rectangular shapes", *Journal of Algebra* **320** (2008) 612–632, `arXiv:math/0603033`.