数理解析研究所講究録
第 1826 巻 2013 年 24-27

対称性による Borcherds リフトの特徴付け

Bernhard Heim (German University of Technology (Oman))
村瀬　篤 (京都産業大学・理学部)

要旨：　直交群 $O(2,n+2)$ 上の正則な保型形式の中で、Borcherds リフトが積対称性によって特徴づけられることを報告する。また、ベクトル系に付随する正則ヤコビ形式が類似の積対称性によって特徴づけられることもあわせて報告する。

1　はじめに

Borcherds リフトは、1990 年代に Borcherds により見いだされた直交群上の保型形式の重要な系列である ([1],[2])。Borcherds リフトは、符号 $(2,n+2)$ の 2 次形式の直交群 $G=O(2,n+2)$ に付随する対称領域 $\mathcal{D}$ 上の有理型保型形式であり、無限積表示を持つ。また、その因子は Heegner 因子の整結合として明示的に記述される。これらの性質は、一般の保型形式には期待できないことであり、Borcherds リフトの著しい特性である。

筆者達は、G 上の Borcherds リフトがある種の対称性（積対称性）を持つことを見いだした ([4])。逆に、G 上の正則保型形式 F が積対称性を持つならば、F のフーリエ展開係数は極めて強い束縛条件を満たしており、F が Borcherds リフトになることが期待される。本稿では、この期待が正しいこと、すなわち積対称性を持つ正則保型形式は Borcherds リフトであることを示す。証明には、Borcherds の導入したベクトル系に付随する正則なヤコビ形式が同様の積対称性により特徴づけられることが用いられる。本稿ではこの結果もあわせて述べる。

2　主結果

簡単のため、$n=1$ の場合、すなわち Siegel 保型形式の場合に結果を述べる。一般の場合の結果と証明については [5] を、また、Siegel 保型形式の場合の Borcherds リフトについては [6] を参照されたい。

$G:=\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ とおく。この群は、$O(2,3)$ の連結成分に isogeneous である。G は次のように 2 次上半空間 $\mathfrak{H}_2:=\{Z\in \mathrm{M}_2(\mathbb{C}) \mid {}^tZ=Z, \mathrm{Im}(Z)>0\}$ に作用する：

$$g\langle Z\rangle=(aZ+b)(cZ+d)^{-1} \qquad \left(g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in G, Z\in\mathfrak{H}_2\right).$$

$\Gamma:=\mathrm{Sp}_2(\mathbb{Z})$ を 2 次の Siegel modular group とする。Γ 上の weight k の正則保型形式の空間を $\mathrm{M}_k(\Gamma)$ と書く。すなわち、

$$\mathrm{M}_k(\Gamma):=\{F\colon \mathfrak{H}_2\to\mathbb{C} \mid F \text{ は } \mathfrak{H}_2\text{上正則}, F(\gamma\langle Z\rangle)=j(\gamma,Z)^kF(Z) \ \ (\gamma\in\Gamma, Z\in\mathfrak{H}_2)\}.$$

以下、$\mathfrak{H}_2$ の点

$$\begin{pmatrix} \tau & z \\ z & \tau' \end{pmatrix}$$

を (τ, z, τ') と書く。$F \in \mathrm{M}_k(\Gamma)$ のフーリエ・ヤコビ展開を、

$$F(\tau, z, \tau') = \sum_{m=0}^{\infty} F_m(\tau, z)\mathbf{e}(m\tau')$$

とする。ここに、$x \in \mathbb{C}$ に対して $\mathbf{e}(x) := \exp(2\pi i x)$ とおく。$m \geq 1$ に対し、F_m は weight k, index m の正則ヤコビ形式である。

$$\mu_F := \min\{m \geq 0 \mid F_m \neq 0\},$$
$$\phi_F(\tau, z) := -\frac{F_{\mu_F+1}(\tau, z)}{F_{\mu_F}(\tau, z)}$$

とおく。一般に、ϕ_F は $\mathfrak{H} \times \mathbb{C}$ 上極を持つが、もし正則ならば、weight 0, index 1 の弱正則ヤコビ形式を与える。ここで弱正則ヤコビ形式とは、正則ヤコビ形式のフーリエ展開に関する条件を次の形に弱めたものを満たすものである：

$$\phi(\tau, z) = \sum_{l,r \in \mathbb{Z}} c(l, r)\mathbf{e}(l\tau + rz)$$

において、$4l - r^2$ が十分小さいとき、$c(l, r) = 0$ となる。$c(l, r)$ は $4l - r^2$ のみによるので、以下 $c(4l - r^2)$ と書く。

この報告の主結果は次の通りである。

定理 1 $F \in \mathrm{M}_k(\Gamma)$ が次の積対称性を満たすとする：任意の整数 $N \geq 2$ に対し、

$$\prod_{ad=N,\, 0 \leq b < d} F\left(\frac{a\tau + b}{d}, \frac{\sqrt{N}}{d}z, \tau'\right) = \epsilon_N \prod_{ad=N,\, 0 \leq b < d} F\left(\tau, \frac{\sqrt{N}}{d}z, \frac{a\tau' + b}{d}\right)$$

を満たす。ここに、ϵ_N は F と N にのみよる 0 でない複素数である。このとき次が成り立つ。

(1) ϕ_F は $\mathfrak{H} \times \mathbb{C}$ 上正則である。従って、weight 0, index 1 の弱正則ヤコビ形式を定める。

(2) ϕ_F の負のフーリエ係数 $c(n)$ $(n < 0)$ は整数である。

(3) F は ϕ_F に付随する Borcherds リフトの定数倍である。すなわち、$\mathrm{Im}(\tau)\mathrm{Im}(\tau') - \mathrm{Im}(z)^2$ が十分大きいとき、

$$F(\tau, z, \tau') = C\,\mathbf{e}(\lambda\tau - \rho z + \mu\tau') \prod_{(m,r,n)>0} \left(1 - \mathbf{e}(m\tau + rz + n\tau')\right)^{c(4mn - r^2)} \qquad (C \in \mathbb{C}^\times).$$

ここに、

$$\lambda := \frac{1}{24}\sum_{r \in \mathbb{Z}} c(-r^2), \quad \rho := \frac{1}{2}\sum_{r>0} c(-r^2)r, \quad \mu := \frac{1}{2}\sum_{r>0} c(-r^2)r^2$$

であり、$(m, r, n) > 0$ は、$n > 0$ または $n = 0, m > 0$ または $m = n = 0, r > 0$ を意味する。

定理 1 の証明において、次の正則ヤコビ形式に関する結果が重要な役割を果たす。なお、ヤコビ形式については [3] を参照のこと。

定理 2 $\psi(\tau, z)$ を weight k, index m の正則ヤコビ形式とし、次の積対称性を満たすとする：任意の整数 $N \geq 2$ に対し、

$$\prod_{ad=N,\, 0\leq b<d} \psi\left(\frac{a\tau+b}{d}, az\right) = \epsilon'_N \prod_{ad=N} \psi(\tau, az)^d$$

を満たす。ここに、ϵ'_N は F と N にのみよる 0 でない複素数である。

$$\psi(\tau, z) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l(z)\mathbf{e}(\tau)$$

を ψ の τ に関するフーリエ展開とする。

$$\lambda' = \min\{l \geq 0 \mid A_l(z) \neq 0\},$$
$$B(z) = -\frac{A_{\lambda'+1}(z)}{A_{\lambda'}(z)}$$

とおく。このとき次が成り立つ。

(1) $B(z)$ は $\mathbb{C}$ 上正則である。

(2) $B(z)$ のフーリエ展開を

$$B(z) = \sum_{r\in\mathbb{Z}} \gamma(r)\mathbf{e}(rz)$$

とする。このとき、$\gamma(r) \in \mathbb{Z}$, $\gamma(-r) = \gamma(r)$ であり、有限個の r を除いて $\gamma(r) = 0$ である。

(3) $\psi(\tau, z)$ はベクトル系 $\{\gamma(r)\}$ に付随するヤコビ形式 $\psi_\gamma(\tau, z)$ の定数倍である。ここに、$\psi_\gamma(\tau, z)$ は無限積

$$\mathbf{e}(\lambda'\tau - \rho' z) \prod_{(l,r)>0} (1 - \mathbf{e}(l\tau + rz))^{\gamma(r)}$$

により与えられる。ただし、$(l, r) > 0$ は $l > 0$ または $l = 0, r > 0$ を意味し、

$$\rho' := \frac{1}{2}\sum_{r>0} \gamma(r) r$$

である。

参考文献

[1] R. E. Borcherds, *Automorphic forms on $O_{s+2,2}(\mathbb{R})$ and infinite products*, Invent. Math. **120** (1995), 161–213.

[2] R. E. Borcherds, *Automorphic forms with singularities on Grassmannians*, Invent. Math. **132** (1998), 491–562.

[3] M. Eichler and D. Zagier, *Theory of Jacobi forms*, Progress in Math. **55**, Birkhäuser, 1985.

[4] B. Heim and A. Murase, *Symmetries for the Siegel theta functions, Borcherds lifts and automorphic Green functions*, arXiv: 1003.2248.

[5] B. Heim and A. Murase, *A characterization of holomorphic Borcherds lifts by symmetries*, preprint.

[6] B. Heim and A. Murase, *Borcherds lifts on* $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{Z})$, Geometry and Analysis of Automorphic Forms of Several Variables, Proceedings of the international symposium in honor of Takayuki Oda on the occasion of his 60th birthday, World Scientific (2011), 56–76.