数理解析研究所講究録
第 1826 巻 2013 年 53-100

Cohomology and L-values

吉田敬之

一変数の modular 形式の L 函数の特殊値の比を cohomology 群を用いて計算する志村の方法 ([Sh1]) を思い出そう.

$0 \leq l \in \mathbf{Z}$ と $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \mathbf{C}^2$ に対して

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^l = {}^t(u^l \ u^{l-1}v \ldots uv^{l-1} \ v^l)$$

とおき, 表現 $\rho_l : GL(2, \mathbf{C}) \longrightarrow GL(l+1, \mathbf{C})$ を

$$\rho_l(g) \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}^l = (g \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix})^l$$

で定義する. ρ_l は l 次の対称テンソル表現と呼ばれる. $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ は Fuchs 群とする. l は非負整数, V は ρ_l の表現空間とする. Γ についての重さ $l+2$ の正則 cusp 形式 $\Omega \in S_{l+2}(\Gamma)$ をとる. V に値をもつ $\mathfrak{H}$ 上の正則 1-form $\mathfrak{d}(\Omega)$ を

$$\mathfrak{d}(\Omega) = \Omega(z) \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix}^l dz \tag{1}$$

によって定義する. $\rho = \rho_l$ とおく.

$$\mathfrak{d}(\Omega) \circ \gamma = \rho(\gamma)\mathfrak{d}(\Omega), \qquad \gamma \in \Gamma \tag{2}$$

は容易に確かめられる. ここに $\mathfrak{d}(\Omega) \circ \gamma$ は $\mathfrak{d}(\Omega)$ を γ によって変換したものを表す. $\mathfrak{H}$ の点, または Γ のカスプ z_0 をとる. $\gamma \in \Gamma$ に対して積分 (Eichler-志村型の積分)

$$f(\gamma) = \int_{z_0}^{\gamma z_0} \mathfrak{d}(\Omega) \tag{3}$$

を考える. $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ に対して

$$\begin{aligned} f(\gamma_1\gamma_2) &= \int_{z_0}^{\gamma_1\gamma_2 z_0} \mathfrak{d}(\Omega) = \int_{z_0}^{\gamma_1 z_0} \mathfrak{d}(\Omega) + \int_{\gamma_1 z_0}^{\gamma_1\gamma_2 z_0} \mathfrak{d}(\Omega) \\ &= f(\gamma_1) + \int_{z_0}^{\gamma_2 z_0} \mathfrak{d}(\Omega) \circ \gamma_1 \end{aligned}$$

を得る. (2) により f は 1-cocycle 条件

$$f(\gamma_1\gamma_2) = f(\gamma_1) + \rho(\gamma_1) f(\gamma_2), \qquad \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$$

をみたすことがわかる. z_0 を別の点 z_0' に置き換え

$$f'(\gamma) = \int_{z_0'}^{\gamma z_0'} \mathfrak{d}(\Omega)$$

とおく. このとき

$$\begin{aligned} f'(\gamma) &= \int_{z_0'}^{z_0} \mathfrak{d}(\Omega) + \int_{z_0}^{\gamma z_0} \mathfrak{d}(\Omega) + \int_{\gamma z_0}^{\gamma z_0'} \mathfrak{d}(\Omega) \\ &= f(\gamma) + \int_{z_0'}^{z_0} (\mathfrak{d}(\Omega) - \mathfrak{d}(\Omega) \circ \gamma) \end{aligned}$$

であるから

$$f'(\gamma) = f(\gamma) + (\rho(\gamma) - 1) \int_{z_0}^{z_0'} \mathfrak{d}(\Omega) \tag{4}$$

を得る. よって $H^1(\Gamma, V)$ における f の cohomology 類は z_0 に依らない. $p \in \Gamma$ は放物元, z_0' は p で固定されるカスプとする. (4) により

$$f(p) = (\rho(p) - 1) \int_{z_0'}^{z_0} \mathfrak{d}(\Omega)$$

を得る. $f(p)$ は coboundary の形であるが, これは f についての parabolic 条件である.

今 $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$ とし $z_0 = i\infty$ ととる.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく. このとき

$$f(\sigma\tau) = -\left(\int_0^{i\infty} \Omega(z) z^t dz \right)_{0 \le t \le l} = -\left(i^{t+1} R(t+1, \Omega) \right)_{0 \le t \le l} \tag{5}$$

である. ここに $L(s, \Omega)$ を Ω の L 函数として $R(s, \Omega) = (2\pi)^{-s} \Gamma(s) L(s, \Omega)$ である. $(\sigma\tau)^3 = 1$, $\sigma^2 = 1$ であるから, 1-cocycle 条件から

$$\begin{aligned} &[1 + \rho(\sigma\tau) + \rho((\sigma\tau)^2)] f(\sigma\tau) = 0, \\ &[1 + \rho(\sigma)] f(\sigma) = [1 + \rho(\sigma)] f(\sigma\tau) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

を得る．換言すれば $f(\sigma\tau)$ は群環 $\mathbf{Z}[\mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})]$ の元 $1+\sigma\tau+(\sigma\tau)^2$ と $1+\sigma$ の作用で消えている．これは $L(s,\Omega)$ の特殊値に対する制約条件を与える．$k=12, \Omega=\Delta$ に対して志村は

$$R(8,\Delta)=\frac{5}{4}R(6,\Delta),\quad R(10,\Delta)=\frac{12}{5}R(6,\Delta),\quad R(9,\Delta)=\frac{14}{9}R(7,\Delta)$$

を得た．

実際 *PARI* で

```
{f(i,j,l,a,b,c,d)=local(u=max(j-i,0),t=min(l+1-i,j-1),x);
x=sum(s=u,t,
binomial(l+1-i,s)*binomial(i-1,j-1-s)*a^(l+1-i-s)*b^s*c^(s+i-j)*d^(j-1-s));x}
{r(g)=local(x,a,b,c,d,n); a=g[1,1];b=g[1,2];c=g[2,1];d=g[2,2]; n=l+1;
x=matrix(n,n,i,j,f(i,j,l,a,b,c,d));x}
l=10; s=r([0,1;-1,0]);t=r([1,1;0,1]);id=r([1,0;0,1]);
tor=(s*t)^2+s*t+id; A=matker(tor);B=matker(s+id);
C=matintersect(A,B); D=matimage(C);
print(D[,1]);print(D[,2]);print(D[,3])
```

とプログラムを書くと，$L(s,\Delta)$ の特殊値の比が計算される．ここに $r(g)$ は 2 行 2 列の行列に対して $\rho_l(g)$ を計算する函数である．

筆者は学生時代に志村先生のこの計算法に興味を持ち，70 年代以来高次元化を数回試みたことがある．2010 年の春になってようやく実二次体上の Hilbert modular form に対して，non-trivial な結果を得た．以下この結果に到る道をなるべく self-contained になるよう書いたが，さらに詳しい内容については [Y4], [Y6] を参照されたい．定理 1.3 の証明と本稿の最後に書いたプログラムは未発表のものである．

1. 群の生成元と基本関係

R が Euclid 環であるとき $\mathrm{SL}(2,R)$ の生成元を与えよう．まず Euclid 環の定義を復習する．R は可換環，Γ は整列集合，γ_0 は Γ の最小元とする．次の条件 1), 2) をみたす写像 $\varphi: R\longrightarrow\Gamma$ が存在するとき，(R,Γ,φ) または R は Euclid 環であるという．

1. $\varphi(a)=\gamma_0 \Longleftrightarrow a=0.$
2. $a, b\in R, a\neq 0$ とする．このとき $q, r\in R$ があって

$$b=qa+r,\qquad \varphi(r)<\varphi(a)$$

となる．

周知のように $\mathbf{Z}$ は $\Gamma = \{x \in \mathbf{Z} \mid x \geq 0\}$, $\varphi(a) = |a|$ ととって Euclid 環になる. $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ の整数環 R は上記の Γ と $\varphi(a) = |N(a)|$ ととって Euclid 環になる. ここに $N(a)$ は a のノルムである.

命題 1.1. (R, Γ, φ) は *Euclid* 環とする. $\mathrm{SL}(2, R)$ は $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$, $a \in R^{\times}$, $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b \in R$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ で生成される.

証明. 上記の元で生成される $\mathrm{SL}(2, R)$ の部分群を G とする. $G \neq \mathrm{SL}(2, R)$ と仮定して矛盾を導く. $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく. $\mathrm{SL}(2, R) \setminus G$ に属する元 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について $\varphi(c)$ が最小になるものをとる. Γ は整列集合であるから, この様な元は存在する. この元を改めて $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく. $c = 0$ ならば

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

となって矛盾である. $c \neq 0$ としてよい. $a = qc + r$, $\varphi(r) < \varphi(c)$ と $q, r \in R$ をとる. 最小性の仮定から

$$\sigma^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma = \begin{pmatrix} * & * \\ a - qc & * \end{pmatrix} \in G$$

となるが, これから $\gamma \in G$ となり矛盾を得る.

G は群, G の有限個の元 $s_1, s_2, \ldots, s_m$ は G を生成すると仮定する. $\mathcal{F}$ は自由生成元 $\widetilde{s}_1, \widetilde{s}_2, \ldots, \widetilde{s}_m$ で生成される自由群とする. $\mathcal{F}$ から G への全射準同型 f を $f(\widetilde{s}_i) = s_i$, $1 \leq i \leq m$ によって定める. G から $\mathcal{F}$ への写像 π を $f \circ \pi = \mathrm{id}$, $\pi(1) = 1$ と取る. $R = \mathrm{Ker}(f)$ とおく. $g \in G$ に対して $\widetilde{g} = \pi(g)$ とおく.

補題 1.2. R は $(\widetilde{s}_i\widetilde{g})^{-1}\widetilde{s_ig}$, $1 \leq i \leq m$ とその共役によって生成される.

証明. $(\widetilde{s}_i\widetilde{g})^{-1}\widetilde{s_ig}$, $1 \leq i \leq m$ とその共役によって生成される $\mathcal{F}$ の正規部分群を R_0 とする. このとき $\widetilde{s_ig} \equiv \widetilde{s}_i\widetilde{g} \bmod R_0$, $g \in G$ であるが, g を $s_i^{-1}g$ ととると $\widetilde{s_i^{-1}g} \equiv \widetilde{s}_i^{-1}\widetilde{g} \bmod R_0$ を得る. $r \in R$ をとる. $r = \widetilde{s}_{i_1}^{\epsilon_1}\widetilde{s}_{i_2}^{\epsilon_2}\cdots\widetilde{s}_{i_l}^{\epsilon_l}$, $i_j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $\epsilon_j = \pm 1$ と書ける. $s_{i_1}^{\epsilon_1}s_{i_2}^{\epsilon_2}\cdots s_{i_l}^{\epsilon_l} = 1$ である. 上記の注意から $s_{i_1}^{\epsilon_1}\widetilde{s_{i_2}^{\epsilon_2}\cdots s_{i_l}^{\epsilon_l}} \equiv \widetilde{s}_{i_1}^{\epsilon_1}\widetilde{s_{i_2}^{\epsilon_2}\cdots s_{i_l}^{\epsilon_l}} \bmod R_0$ を得る. この手順を繰り返して

$$1 = s_{i_1}^{\epsilon_1}\widetilde{s_{i_2}^{\epsilon_2}\cdots s_{i_l}^{\epsilon_l}} \equiv \widetilde{s}_{i_1}^{\epsilon_1}\widetilde{s}_{i_2}^{\epsilon_2}\cdots\widetilde{s}_{i_l}^{\epsilon_l} \bmod R_0$$

となる. よって $r \in R_0$, $R = R_0$ を得る.

この簡単な補題を適用することにより, PSL$(2,\mathbf{Z})$ の生成元と関係を代数的に決定できる. (これは筆者が 4 回生のときに得た証明法である. 関係の純代数的証明, 即ち定理 1.3 の証明, は文献には見かけないように思う.) [1] 行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbf{Z})$ に対して, その PSL$(2,\mathbf{Z})$ への像も同じ記号で表す. $\Gamma = \mathrm{PSL}(2,\mathbf{Z})$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく. $\mathcal{F}$ は自由生成元 $\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}$ で生成される自由群とする. 準同型 $f : \mathcal{F} \longrightarrow \Gamma$ を $f(\widetilde{\sigma}) = \sigma$, $f(\widetilde{\tau}) = \tau$ で定める. 写像 $\pi : \Gamma \ni \gamma \longrightarrow \widetilde{\gamma} \in \mathcal{F}$ を次のように定める. $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく. $c = 0$ ならば $a = d = \pm 1$ である. $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\tau}^{a^{-1}b}$ とおく. $a = 0$ ならば $c = \pm 1$ である. $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\sigma}\widetilde{\sigma\gamma}$ とおく. ここに $\widetilde{\sigma\gamma}$ はすでに定義されていることに注意されたい. $a \neq 0$ かつ $c \neq 0$ とする. $(|c|, |a|)$ についての辞書式順序についての帰納法によって $\widetilde{\gamma}$ を定義する. まず $|a| < |c|$ とする. $\sigma\gamma = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}$ であるから, $\widetilde{\sigma\gamma}$ はすでに定義されている. $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\sigma}\widetilde{\sigma\gamma}$ とおく. 次に $|a| \geq |c|$ と仮定する. $c > 0$ と仮定してよい. $t \in \mathbf{Z}$ を $|a + tc| < c$ ととる. 一般にはこのような t は二つあるが, そのうちの小さい方を取ると規則を決めておく.

$$\widetilde{\gamma} = \widetilde{\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \widetilde{\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma}$$

とおく. ユークリッドの互除法を使うこの構成によって, 写像 $\pi : \Gamma \longrightarrow \mathcal{F}$ が得られた. 明らかに $f \circ \pi = \mathrm{id}$, $\pi(1) = 1$ が成り立っている. また Γ が σ と τ で生成されることも同時に証明された. $R = \mathrm{Ker}(f)$ とおく. 容易に

$$\widetilde{\sigma}^2 \in R, \qquad (\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau})^3 \in R \tag{1.1}$$

がわかる.

定理 1.3. R は $\widetilde{\sigma}^2$, $(\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau})^3$ とその共役で生成される.

証明. $\widetilde{\sigma}^2$, $(\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau})^3$ とその共役によって生成される $\mathcal{F}$ の正規部分群を R_0 とする. 補題 1.2 により, 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して

$$\widetilde{\sigma\gamma} \equiv \widetilde{\sigma}\widetilde{\gamma} \mod R_0, \tag{1.2}$$

$$\widetilde{\tau\gamma} \equiv \widetilde{\tau}\widetilde{\gamma} \mod R_0 \tag{1.3}$$

を示せば十分である. $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく.

[1] Fuchs 群の生成元と基本関係は通常は基本領域の形から得られる.

まず (1.2) を証明しよう. $c=0$ ならば, 定義により $\widetilde{\sigma\gamma}=\widetilde{\sigma}\widetilde{\sigma\cdot\sigma\gamma}=\widetilde{\sigma}\widetilde{\gamma}$ ゆえ (1.2) は成り立つ. $a=0$ ならば, 定義により $\widetilde{\gamma}=\widetilde{\sigma}\widetilde{\sigma\gamma}$ である. 従って $\widetilde{\sigma\gamma}=\widetilde{\sigma}^{-1}\widetilde{\gamma}\equiv\widetilde{\sigma}\widetilde{\gamma} \bmod R_0$ となり, (1.2) は成り立つ. $a\neq 0$ かつ $c\neq 0$ であるとする. $|a|>|c|$ ならば定義により $\widetilde{\sigma\gamma}=\widetilde{\sigma}\widetilde{\sigma\cdot\sigma\gamma}=\widetilde{\sigma}\widetilde{\gamma}$ ゆえ (1.2) は成り立つ. $|a|<|c|$ ならば定義により $\widetilde{\gamma}=\widetilde{\sigma}\widetilde{\sigma\gamma}$ ゆえ (1.2) は成り立つ. $|a|=|c|$ と仮定する. このとき $a=\pm 1$, $c=\pm 1$ である. $c=1$ と仮定してよい. 定義により

$$\widetilde{\gamma}=\widetilde{\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}}\widetilde{\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & d\end{pmatrix}}=\widetilde{\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}}\widetilde{\sigma}\widetilde{\begin{pmatrix}1 & d\\ 0 & 1\end{pmatrix}},$$

$$\widetilde{\sigma\gamma}=\widetilde{\begin{pmatrix}1 & -a^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}}\widetilde{\begin{pmatrix}0 & a^{-1}\\ -a & -b\end{pmatrix}}=\widetilde{\begin{pmatrix}1 & -a\\ 0 & 1\end{pmatrix}}\widetilde{\sigma}\widetilde{\begin{pmatrix}-a & -b\\ 0 & -a\end{pmatrix}}$$

である. $a=1$ とする. このとき $d=b+1$ であり, (1.2) は関係

$$\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau}\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau}\equiv\widetilde{\tau}^{-1}\widetilde{\sigma} \bmod R_0$$

に帰着するが, これが (1.1) から得られるのは明らかである. 次に $a=-1$ とする. このとき $d=-b-1$ であり, (1.2) は関係

$$\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau}^{-1}\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau}^{-1}\equiv\widetilde{\tau}\widetilde{\sigma} \bmod R_0$$

に帰着するが, これが (1.1) から得られるのは明らかである. よって (1.2) は証明された.

次に (1.3) を示す. $(|c|,|a|)$ の辞書式順序についての帰納法によって (1.3) と同時に

$$\widetilde{\tau^{-1}\gamma}\equiv\widetilde{\tau}^{-1}\widetilde{\gamma} \mod R_0 \tag{1.4}$$

を証明していく.

$$\tau\gamma=\begin{pmatrix}a+c & b+d\\ c & d\end{pmatrix},\qquad \tau^{-1}\gamma=\begin{pmatrix}a-c & b-d\\ c & d\end{pmatrix}$$

である. $c=0$ ならば (1.3), (1.4) は定義によって明らかである. $c\geq 1$ と仮定してよい.

(I) $|a|\geq c$ の場合.

$|a+c|\geq c$ とする. $t\in\mathbf{Z}$ と $t_1\in\mathbf{Z}$ を $|a+tc|<c$, $|a+c+t_1c|<c$ をみたし, この条件をみたすものの内最小であるようにとる. 定義から

$$\widetilde{\gamma}=\widetilde{\begin{pmatrix}1 & -t\\ 0 & 1\end{pmatrix}}\widetilde{\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}\gamma},\qquad \widetilde{\tau\gamma}=\widetilde{\begin{pmatrix}1 & -t_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}}\widetilde{\begin{pmatrix}1 & t_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\tau\gamma}$$

となる. $t_1 = t - 1$ は明らかであるから (1.3) が成り立つ. $|a + c| < c$ とする. このとき (1.4) についての帰納法の仮定を $\tau\gamma$ に適用できる. $\widetilde{\tau^{-1}\tau\gamma} \equiv \tilde{\tau}^{-1}\widetilde{\tau\gamma} \bmod R_0$ から (1.3) が得られる.

$|a - c| \geq c$ とする. $t \in \mathbf{Z}$ を上のように選び, $t_2 \in \mathbf{Z}$ を $|a - c + t_2 c| < c$ をみたし, この条件をみたすものの内最小であるようにとる. 定義から

$$\widetilde{\tau^{-1}\gamma} = \widetilde{\begin{pmatrix}1 & -t_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}}\widetilde{\begin{pmatrix}1 & t_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\tau^{-1}\gamma}$$

となる. $t_2 = t + 1$ は明らかであるから (1.4) が成り立つ. $|a - c| < c$ とする. このとき (1.3) についての帰納法の仮定を $\tau^{-1}\gamma$ に適用できる. $\widetilde{\tau\tau^{-1}\gamma} \equiv \tilde{\tau}\widetilde{\tau^{-1}\gamma} \bmod R_0$ から (1.4) が得られる.

(II) $|a| < c$ の場合.

帰納法の仮定を $\sigma\gamma = \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix}$ に適用できる. すでに証明された (1.2) も用いて

$$\widetilde{\tau^{-1}\sigma\gamma} \equiv \tilde{\tau}^{-1}\widetilde{\sigma\gamma} \equiv \tilde{\tau}^{-1}\tilde{\sigma}\tilde{\gamma} \bmod R_0$$

を得る. (1.1) により $\tilde{\sigma}\tilde{\tau}\tilde{\sigma}\tilde{\tau} \equiv \tilde{\tau}^{-1}\tilde{\sigma} \bmod R_0$ であるから

$$\widetilde{\sigma\tau\sigma\tau\gamma} = \widetilde{\tau^{-1}\sigma\gamma} \equiv \tilde{\sigma}\tilde{\tau}\tilde{\sigma}\tilde{\tau}\tilde{\gamma} \bmod R_0$$

を得る. これに (1.2) を用いて

$$\widetilde{\tau\sigma\tau\gamma} \equiv \tilde{\tau}\tilde{\sigma}\tilde{\tau}\tilde{\gamma} \bmod R_0 \tag{1.5}$$

を得る. $\sigma\tau\gamma = \begin{pmatrix} c & d \\ -a-c & -b-d \end{pmatrix}$ である. $|a + c| < c$ とする. このとき帰納法の仮定を $\sigma\tau\gamma$ に適用できる. (1.5) から $\widetilde{\sigma\tau\gamma} \equiv \tilde{\sigma}\tilde{\tau}\tilde{\gamma} \bmod R_0$ を得る. これに (1.2) を用いて (1.3) を得る. $|a + c| \geq c$ とする. このとき $0 \leq a < c$ である. 定義から

$$\widetilde{\tau\gamma} = \widetilde{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}}\widetilde{\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\tau\gamma} = \tilde{\tau}\tilde{\gamma}$$

であり, (1.3) が成り立っている.

帰納法の仮定を $\sigma\gamma$ に用いて

$$\widetilde{\tau\sigma\gamma} \equiv \tilde{\tau}\widetilde{\sigma\gamma} \equiv \tilde{\tau}\tilde{\sigma}\tilde{\gamma} \bmod R_0$$

を得る. (1.1) により $\tilde{\sigma}\tilde{\tau}^{-1}\tilde{\sigma}\tilde{\tau}^{-1} \equiv \tilde{\tau}\tilde{\sigma} \bmod R_0$ であるから

$$\widetilde{\sigma\tau^{-1}\sigma\tau^{-1}\gamma} \equiv \tilde{\sigma}\tilde{\tau}^{-1}\tilde{\sigma}\tilde{\tau}^{-1}\tilde{\gamma} \bmod R_0$$

を得る．これに (1.2) を用いて

$$\widetilde{\tau^{-1}\sigma\tau^{-1}}\gamma \equiv \tilde{\tau}^{-1}\tilde{\sigma}\tilde{\tau}^{-1}\tilde{\gamma} \bmod R_0 \tag{1.6}$$

を得る．$\sigma\tau^{-1}\gamma = \begin{pmatrix} c & d \\ c-a & d-b \end{pmatrix}$ である．$|c-a| < c$ とする．このとき帰納法の仮定を $\sigma\tau^{-1}\gamma$ に適用できる．(1.6) から $\widetilde{\sigma\tau^{-1}}\gamma \equiv \tilde{\sigma}\tilde{\tau}^{-1}\tilde{\gamma} \bmod R_0$ を得る．これに (1.2) を用いて (1.4) を得る．$|c-a| \geq c$ とする．このとき $-c < a \leq 0$ である．定義から

$$\widetilde{\tau^{-1}}\gamma = \widetilde{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}\widetilde{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\tau^{-1}}\gamma = \tilde{\tau}^{-1}\tilde{\gamma}$$

であり，(1.4) が成り立っている．(証明終)

2．群の cohomology 論

この節では群の cohomology 群についての基本的事項を復習する．命題 2.3, 2.4 以外は標準的な教科書に書かれている．

G は群とする．左 $\mathbf{Z}[G]$ 加群を G 加群と呼ぶ．M は G 加群とする．$0 < n \in \mathbf{Z}$ に対して $C^n(G,M)$ は G^n から M への写像全体のなすアーベル群とする．$C^0(G,M) = M$ とおく．境界作用素 $d_n : C^n(G,M) \longrightarrow C^{n+1}(G,M)$ を

$$\begin{aligned}(d_nf)(g_1,\ldots,g_{n+1}) &= g_1f(g_2,\ldots,g_{n+1}) + (-1)^{n+1}f(g_1,\ldots,g_n)\\ &\quad+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(g_1,\ldots,g_ig_{i+1},\ldots,g_{n+1})\end{aligned} \tag{2.1}$$

で定義する．このとき $d_{n+1} \circ d_n = 0$ が成り立ち，$\{C^n(G,M), d_n\}$ は複体をなす．

$$Z^n(G,M) = \mathrm{Ker}(d_n), \qquad B^n(G,M) = \mathrm{Im}(d_{n-1}).$$

とおく．ここに $B^0(G,M) = \{0\}$ と解する．$C^n(G,M)$ の元を n-cochain, $Z^n(G,M)$ の元を n-cocycle, $B^n(G,M)$ の元を n-cobounday という．cohomology 群 $H^n(G,M)$ は複体 $\{C^n(G,M), d_n\}$ の cohomology 群である．即ち $H^n(G,M) = Z^n(G,M)/B^n(G,M)$ である．

例 2.1. $i = 1$ とする．このとき $Z^1(G,M)$ は G から M への写像で

$$f(g_1g_2) = g_1f(g_2) + f(g_1), \qquad g_1, g_2 \in G$$

をみたすもの全体で

$$B^1(G,M)=\{gm-m \mid g\in G,\ m\in M\}$$

である．とくに G の M への作用が自明ならば $H^1(G,M)=\mathrm{Hom}(G,M)$ である．

例 2.2. $i=2$ とする．$Z^2(G,M)$ は $G\times G$ から M への写像で

$$g_1f(g_2,g_3)-f(g_1g_2,g_3)+f(g_1,g_2g_3)-f(g_1,g_2)=0, \qquad g_1,g_2,g_3\in G$$

をみたすもの全体からなる．

$$1\longrightarrow M\longrightarrow \widetilde{G}\stackrel{\pi}{\longrightarrow} G\longrightarrow 1 \tag{2.2}$$

を群の完全列 (群拡大) とする．各 $g\in G$ に対し $\pi(\widetilde{g})=g$ をみたす $\widetilde{g}\in\widetilde{G}$ を取って固定する．

$$gm=\widetilde{g}m(\widetilde{g})^{-1}, \qquad g\in G,\ m\in M$$

とおく．gm は $\widetilde{g}$ の取り方によらずに定まり，M は G 加群になる．

$$f(g_1,g_2)=\widetilde{g}_1\widetilde{g}_2(\widetilde{g_1g_2})^{-1}, \qquad g_1,g_2\in G$$

とおくと $f\in Z^2(G,M)$ が直接計算でわかる．$f(g_1,g_2)$ は群拡大 (2.2) が定める因子団である．$H^2(G,M)$ は群拡大 (2.2) の "同値類" を記述する．

H は G の指数有限の部分群とする．transfer 写像 $T: H^n(H,M)\longrightarrow H^n(G,M)$ の具体形は次のように与えられる (Eckmann [E], [Y4])．

命題 2.1. G は群，H は指数有限の部分群，M は G 加群とする．$G=\sqcup_{i=1}^r x_iH$ は剰余類分解とする．$f\in Z^n(H,M)$ は cohomology 類 $c\in H^n(H,M)$ を表す n-cocycle とする．このとき $T(c)\in H^n(G,M)$ を表す n-cocycle $\tilde{f}\in Z^n(G,M)$ は次式で与えられる．

$$\tilde{f}(g_1,g_2,\dots,g_n)=\sum_{i=1}^r x_if(x_i^{-1}g_1x_{p_i(1)},x_{p_i(1)}^{-1}g_2x_{p_i(2)},\dots,x_{p_i(n-1)}^{-1}g_nx_{p_i(n)}).$$

ここに $x_{p_i(l)}$ は

$$x_i^{-1}g_1x_{p_i(1)}\in H, \qquad x_{p_i(l-1)}^{-1}g_lx_{p_i(l)}\in H, \quad 2\le l\le n$$

となるように選ぶ．

$\mathrm{Res}: H^n(G,M) \longrightarrow H^n(H,M)$ は制限写像とする．このとき

$$T \circ \mathrm{Res}(c) = [G:H]c, \qquad c \in H^n(G,M). \tag{2.3}$$

が成り立つ．

cohomology 群の上の Hecke 作用素を考える．$\widetilde{G}$ は群, G は部分群とする．M は $\widetilde{G}$ 加群とする．任意の $t \in \widetilde{G}$ に対して

$$[G : g \cap tGt^{-1}] < \infty$$

と仮定する．$t \in \widetilde{G}$ に対して

$$G_t = G \cap t^{-1}Gt$$

とおく．

$$\mathrm{conj}: H^n(G,M) \longrightarrow H^n(t^{-1}Gt, M)$$

は共役写像とする．Res は $H^n(t^{-1}Gt, M)$ から $H^n(G_t, M)$ への制限写像とし $T: H^n(G_t, M) \longrightarrow H^n(G,M)$ は transfer 写像とする．このとき

$$[GtG] = T \circ \mathrm{Res} \circ \mathrm{conj} \tag{2.4}$$

と定義する．(2.4) の右辺は両側剰余類 GtG にのみ依存し, (2.4) により環準同型 $\mathcal{H}(G,\widetilde{G}) \longrightarrow \mathrm{End}(H^n(G,M))$ が定まる．ここに $\mathcal{H}(G,\widetilde{G})$ は G, $\widetilde{G}$ の定める Hecke 環である．この作用素の $n=2$ のときの具体形は次のようになる ([Y4])．

命題 2.2. $c \in H^2(G,M)$, $f \in Z^2(G,M)$ は c を表す 2-*cocycle* とする．$GtG = \sqcup_{i=1}^d G\beta_i$ を剰余類分解とする．$[GtG](c)$ を表す 2-*cocycle* $h \in Z^2(G,M)$ は

$$h(g_1,g_2) = \sum_{i=1}^d \beta_i^{-1} f(\beta_i g_1 \beta_{j(i)}^{-1}, \beta_{j(i)} g_2 \beta_{k(j(i))}^{-1})$$

で与えられる．ここに $1 \le i \le d$ に対し, $j(i)$ と $k(i)$ を

$$\beta_i g_1 \beta_{j(i)}^{-1} \in G, \qquad \beta_i g_2 \beta_{k(i)}^{-1} \in G$$

と選ぶ.

G は群, M は G 加群とする．N は G の正規部分群とする．このとき Hochschild-Serre のスペクトル系列

$$E_2^{p,q} = H^p(G/N, H^q(N,M)) \Longrightarrow H^n(G,M) \tag{2.5}$$

がある．低次元においてこれは完全列

$$
\begin{aligned}
(2.6)\qquad 0 \longrightarrow H^1(G/N, M^N) &\longrightarrow H^1(G,M) \longrightarrow H^1(N,M)^{G/N} \\
&\longrightarrow H^2(G/N, M^N) \longrightarrow H^2(G,M)
\end{aligned}
$$

を与える．

次に $H^2(G,M)$ を計算する MacLane ([K], §50) による手法を述べる．自由群 $\mathcal{F}$ を取って $G = \mathcal{F}/R$ と書く．$\pi : \mathcal{F} \longrightarrow G$ を自然準同型とすると $\mathrm{Ker}(\pi) = R$ である．$gm = \pi(g)m$, $g \in \mathcal{F}$, $m \in M$ とおいて M を $\mathcal{F}$ 加群とみる．

$$
(2.7)\qquad H^i(\mathcal{F}, M) = 0, \qquad i \geq 2
$$

であるから (2.6) は完全列

$$
0 \longrightarrow H^1(G,M) \longrightarrow H^1(\mathcal{F},M) \longrightarrow H^1(R,M)^G \longrightarrow H^2(G,M) \longrightarrow 0
$$

を与える．故に

$$
(2.8)\qquad H^2(G,M) \cong H^1(R,M)^G/\mathrm{Im}(H^1(\mathcal{F},M))
$$

が成り立つ．R は M に自明に作用するから，$B^1(R,M) = 0$, $H^1(R,M) = \mathrm{Hom}(R,M)$ である．よって

$$
H^1(R,M)^G = \{\varphi \in \mathrm{Hom}(R,M) \mid \varphi(grg^{-1}) = g\varphi(r), \quad g \in \mathcal{F}, r \in R\}
$$

である．

同型 (2.8) は具体的には次のように与えられる．$g \in \mathcal{F}$ に対して，$\pi(g) = \bar{g}$ とおく．2-cocycle $f \in Z^2(G,M)$ をとる．写像 $(g_1, g_2) \longrightarrow f(\bar{g}_1, \bar{g}_2)$ は M に値をとる $\mathcal{F}$ の 2-cocycle である．(2.7) により，1-cochain $a \in C^1(\mathcal{F},M)$ があって

$$
(2.9)\qquad f(\bar{g}_1, \bar{g}_2) = g_1 a(g_2) + a(g_1) - a(g_1 g_2), \qquad g_1, g_2 \in \mathcal{F}
$$

となる．$\varphi = a|R$ を a の R への制限とする．f は正規化されている，即ち

$$
f(1,g) = f(g,1) = 0, \qquad \forall\, g \in G
$$

と仮定してよい．r_1, $r_2 \in R$ ならば (2.9) により

$$
a(r_2) + a(r_1) - a(r_1 r_2) = 0
$$

を得る．故に $\varphi \in Z^1(R,M) = \mathrm{Hom}(R,M)$ である．(2.9) により

$$
(2.10)\qquad a(gr) = ga(r) + a(g), \qquad g \in \mathcal{F},\ r \in R
$$

を得る．再び (2.9) により

$$\begin{aligned} a(grg^{-1}) &= gra(g^{-1}) + a(gr) - f(\bar{g}, \bar{g}^{-1}) \\ &= ga(g^{-1}) + ga(r) + a(g) - f(\bar{g}, \bar{g}^{-1}) \end{aligned}$$

を得る．ここに $g \in \mathcal{F}$, $r \in R$. この式に $g_1 = g$, $g_2 = g^{-1}$ としたときの (2.9) を $a(1) = 0$ に注意して使うと

$$\varphi(grg^{-1}) = g\varphi(r), \qquad g \in \mathcal{F}, r \in R. \tag{2.11}$$

を得る．よって $\varphi \in H^1(R, M)^G$ がわかった．a' は (2.9) をみたす別の 1-cochain とする．$\varphi' = a'|R$, $a' = a + b$ とおく．このとき $b \in Z^1(\mathcal{F}, M)$ であるから，φ と φ' の $H^1(R, M)^G/\mathrm{Im}(H^1(\mathcal{F}, M))$ における類は同じである．1-cochain c の coboundary を f に加えたとする．このとき (2.9) は $a(g)$ を $a(g) + c(\bar{g})$ に置き換えて成立し，$a|R$ は変わらない．よって準同型

$$\omega : H^2(G, M) \longrightarrow H^1(R, M)^G/\mathrm{Im}(H^1(\mathcal{F}, M)).$$

が定義できた．ω が全射同型であることは困難なく証明できる．

次に $f \in Z^2(G, M)$ は正規化された cocycle とする．(2.9) をみたす $a \in C^1(\mathcal{F}, M)$ をとり $\varphi = a|R \in H^1(R, M)^G$ とおく．各 $g \in G$ に対し，$\pi(\widetilde{g}) = g$ をみたす $\widetilde{g} \in \mathcal{F}$ を選ぶ．このとき (2.9) は

$$f(g_1, g_2) = g_1 a(\widetilde{g}_2) + a(\widetilde{g}_1) - a(\widetilde{g}_1\widetilde{g}_2), \qquad g_1, g_2 \in G.$$

とかける．(2.10) により

$$a(\widetilde{g_1g_2}(\widetilde{g_1g_2})^{-1}\widetilde{g}_1\widetilde{g}_2) = g_1g_2\varphi((\widetilde{g_1g_2})^{-1}\widetilde{g}_1\widetilde{g}_2) + a(\widetilde{g_1g_2}).$$

を得る．この式に (2.11) を用いて

$$a(\widetilde{g}_1\widetilde{g}_2) = a(\widetilde{g_1g_2}) + \varphi(\widetilde{g}_1\widetilde{g}_2(\widetilde{g_1g_2})^{-1}).$$

を得る．よって

$$f(g_1, g_2) = g_1 a(\widetilde{g}_2) + a(\widetilde{g}_1) - a(\widetilde{g_1g_2}) - \varphi(\widetilde{g}_1\widetilde{g}_2(\widetilde{g_1g_2})^{-1}), \qquad g_1, g_2 \in G \tag{2.12}$$

が成り立つ．この式は coboundary を f に加えることにより

$$f(g_1, g_2) = -\varphi(\widetilde{g}_1\widetilde{g}_2(\widetilde{g_1g_2})^{-1}) \tag{2.13}$$

と仮定してよいことを示している．逆に次の命題が成り立つ．

命題 2.3. $\varphi \in H^1(R, M)^G$ とする．g_1, $g_2 \in G$ に対し $f(g_1, g_2)$ を *(2.13)* によって定義する．このとき $f \in Z^2(G, M)$ である．$\widetilde{1} = 1$ ならば f は正規化されている．

この命題は直接計算によって容易に示すことができるので証明は省略する.

(2.8) の右辺に Hecke 作用素がどう作用するかを具体的に書き表わそう. $f \in Z^2(G, M)$ は正規化された 2-cocycle でその cohomology 類を c とする. h はその類が $[GtG](c)$ を表わす命題 2.2 で与えられた 2-cocycle とする. 明らかに h は正規化されている. 1-cochain $b \in C^1(\mathcal{F}, M)$ があって

$$h(\bar{g}_1, \bar{g}_2) = g_1 b(g_2) + b(g_1) - b(g_1 g_2), \qquad g_1, g_2 \in \mathcal{F}$$

をみたす.

命題 2.4. $\varphi \in H^1(R, M)^G$ をとり正規化された 2-cocycle $f \in Z^2(G, M)$ を *(2.13)* で与える. m 個の元 $g_j \in G$, $1 \leq j \leq m$ が与えられているとする. 各 j に対して d 文字の上の置換 $p_j \in S_d$ を

$$\beta_i g_j \beta_{p_j(i)}^{-1} \in G, \qquad 1 \leq i \leq d$$

で定める. $q_j \in S_d$ を帰納的に

$$q_1 = p_1, \qquad q_k = p_k q_{k-1}, \quad 2 \leq k \leq m$$

で定める. $b(\widetilde{g}_j) = 0$, $1 \leq j \leq m$ と仮定する. このとき

(2.14)

$$\begin{aligned}
&b(\widetilde{g}_1 \widetilde{g}_2 \cdots \widetilde{g}_m) \\
&= \sum_{i=1}^{d} \beta_i^{-1} \varphi(\widetilde{\beta_i g_1 \beta_{q_1(i)}^{-1}} \widetilde{\beta_{q_1(i)} g_2 \beta_{q_2(i)}^{-1}} \cdots \widetilde{\beta_{q_{m-1}(i)} g_m \beta_{q_m(i)}^{-1}} (\widetilde{\beta_i g_1 g_2 \cdots g_m \beta_{q_m(i)}^{-1}})^{-1})
\end{aligned}$$

が成り立つ.

証明. $m = 1$ ならば (2.14) の左辺は 0 であり, $\varphi(1) = 0$ であるから右辺も 0 である. $m \geq 2$ で公式 (2.14) は $m - 1$ のとき正しいと仮定する. 命題 2.2 と (2.13) により

$$\begin{aligned}
&b(\widetilde{g}_1 \widetilde{g}_2 \cdots \widetilde{g}_{m-1} \widetilde{g}_m) \\
&= g_1 g_2 \cdots g_{m-1} b(\widetilde{g}_m) + b(\widetilde{g}_1 \widetilde{g}_2 \cdots \widetilde{g}_{m-1}) - h(g_1 \cdots g_{m-1}, g_m) \\
&= \sum_{i=1}^{d} \beta_i^{-1} \varphi(\widetilde{\beta_i g_1 \beta_{q_1(i)}^{-1}} \cdots \widetilde{\beta_{q_{m-2}(i)} g_{m-1} \beta_{q_{m-1}(i)}^{-1}} (\widetilde{\beta_i g_1 g_2 \cdots g_{m-1} \beta_{q_{m-1}(i)}^{-1}})^{-1}) \\
&+ \sum_{i=1}^{d} \beta_i^{-1} \varphi(\widetilde{\beta_i g_1 g_2 \cdots g_{m-1} \beta_{q_{m-1}(i)}^{-1}} \widetilde{\beta_{q_{m-1}(i)} g_m \beta_{q_m(i)}^{-1}} (\widetilde{\beta_i g_1 g_2 \cdots g_m \beta_{q_m(i)}^{-1}})^{-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{d} \beta_i^{-1} \varphi(\widetilde{\beta_i g_1 \beta_{q_1(i)}^{-1}} \cdots \widetilde{\beta_{q_{m-1}(i)} g_m \beta_{q_m(i)}^{-1}} (\widetilde{\beta_i g_1 g_2 \cdots g_m \beta_{q_m(i)}^{-1}})^{-1})
\end{aligned}$$

を得る.

3. ヒルベルト・モジュラー形式

この節ではヒルベルト・モジュラー形式について簡単に復習する. 詳しくは志村 [Sh4] を参照.

F は n 次の総実代数体とする. $\mathcal{O}_F$ により F の整数環, $\mathfrak{d}_F$ により F の $\mathbf{Q}$ 上の different を表わす. F の単数群 $\mathcal{O}_F^\times$ を E_F と書く. F から $\mathbf{R}$ の中への同型写像全体の集合を $\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ とする. $\xi \in F$ に対して $\xi^{(\nu)} = \xi^{\sigma_\nu}$ とおく. $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathfrak{H}^n$ に対して

$$\mathbf{e}_F(\xi z) = \exp(2\pi i \sum_{\nu=1}^{n} \xi^{(\nu)} z_\nu)$$

とおく. $k = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbf{Z}^n$ をとる. $\mathrm{GL}(2, \mathbf{R})_+^n$ は成分毎への作用で $\mathfrak{H}^n$ に作用している. $\mathfrak{H}^n$ 上の函数 Ω, $g = (g_1, \dots, g_n) \in \mathrm{GL}(2, \mathbf{R})_+^n$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathfrak{H}^n$ に対して, $\mathfrak{H}^n$ 上の函数 $\Omega|_k\, g$ を

$$(\Omega|_k\, g)(z) = \prod_{\nu=1}^{n} \det(g_\nu)^{k_\nu/2} j(g_\nu, z_\nu)^{-k_\nu} \Omega(gz)$$

によって定義する. $\mathrm{GL}(2, F)$ を $\mathrm{GL}(2, \mathbf{R})^n$ に

$$\mathrm{GL}(2, F) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{pmatrix} a^{(1)} & b^{(1)} \\ c^{(1)} & d^{(1)} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a^{(n)} & b^{(n)} \\ c^{(n)} & d^{(n)} \end{pmatrix} \right) \in \mathrm{GL}(2, \mathbf{R})^n$$

によって埋め込む.

Γ は $\mathrm{SL}(2, \mathcal{O}_F)$ の合同部分群とする. $\mathfrak{H}^n$ 上の正則函数 Ω は任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して

$$\Omega|_k\, \gamma = \Omega$$

をみたすとき, Γ についての重さ k のヒルベルト・モジュラー形式であるという. $F = \mathbf{Q}$ のときはさらにカスプにおける条件を課す. 各 $g \in \mathrm{SL}(2, F)$ に対し $\Omega|_k\, g$ は $(\Omega|_k\, g)(z) = \sum_{\xi \in L} a_g(\xi) \mathbf{e}_F(\xi z)$ の形の Fourier 展開をもつ. ここに L は F の中の格子である. $\xi \neq 0$ が総正でなければ $a_g(\xi) = 0$ が成り立つ. 定数項 $a_g(0)$ が各 $g \in \mathrm{SL}(2, F)$ について消えるとき Ω はカスプ形式であるという. Γ についての重さ k のヒルベルト・モジュラー形式の空間を $G_k(\Gamma) = G_{k_1, k_2, \dots, k_n}(\Gamma)$ で表わし, カスプ形式の空間を $S_k(\Gamma) = S_{k_1, k_2, \dots, k_n}(\Gamma)$ で表わす.

しばらく $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathcal{O}_F)$ と仮定し, $0 \neq \Omega \in S_k(\Gamma)$ をとる. Ω の Fourier 展開は

$$\Omega(z) = \sum_{0 \ll \xi \in \mathfrak{d}_F^{-1}} a(\xi) \mathbf{e}_F(\xi z) \tag{3.1}$$

の形である. $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} \in \Gamma$, $u \in E_F$ について

$$u^k \sum_{0 \ll \xi \in \mathfrak{d}_F^{-1}} a(\xi) \mathbf{e}_F(\xi u^2 z) = \sum_{0 \ll \xi \in \mathfrak{d}_F^{-1}} a(\xi) \mathbf{e}_F(\xi z)$$

が成り立つ. ここに $u^k = \prod_{\nu=1}^n (u^{(\nu)})^{k_\nu}$ とおいた. よって

(3.2) $$a(u^2\xi) = u^k a(\xi), \qquad u \in E_F$$

を得る. とくに $u = -1$ ととって

(3.3) $$\sum_{\nu=1}^n k_\nu \equiv 0 \mod 2$$

がわかる. 簡単のため

(A) 各 $u \in E_F$ に対して $u^k > 0$

を仮定する.

$$k_0 = \max(k_1, k_2, \ldots, k_n), \qquad k'_\nu = k_0 - k_\nu, \qquad k' = (k'_1, k'_2, \ldots, k'_n)$$

とおく. Ω の L 函数を

(3.4) $$L(s, \Omega) = \sum_{\xi E_F^2} a(\xi) \xi^{k'/2} N(\xi)^{-s}, \qquad \xi^{k'/2} = \prod_{\nu=1}^n (\xi^{(\nu)})^{k'_\nu/2}$$

によって定義する. ここに和は $0 \ll \xi \in \mathfrak{d}_F^{-1}$ をみたすすべての剰余類 ξE_F^2 を走る. (3.2) と (A) により, 和が well defined であることがわかる. 級数 (3.4) は $\mathrm{Re}(s)$ 十分大きいとき収束する

(3.5) $$R(s, \Omega) = (2\pi)^{-ns} \prod_{\nu=1}^n \Gamma(s - \frac{k'_\nu}{2}) L(s, \Omega)$$

とおく. 一変数のときと同様の計算によって $\mathrm{Re}(s)$ が十分大きいとき積分表示

(3.6) $$\int_{\mathbf{R}_+^n / E_F^2} \Omega(iy_1, iy_2, \ldots, iy_n) \prod_{\nu=1}^n y_\nu^{s - k'_\nu/2 - 1} dy_\nu = (2\pi)^{\sum_{\nu=1}^n k'_\nu/2} R(s, \Omega)$$

を得る. この積分を変形することにより $R(s, \Omega)$ は s の整函数であり, 函数等式

(3.7) $$R(s, \Omega) = (-1)^{\sum_{\nu=1}^n k_\nu/2} R(k_0 - s, \Omega)$$

をみたすことが証明できる.

4. ヒルベルト・モジュラー形式と cohomology 群

Γ は $SL(2,\mathcal{O}_F)$ の合同部分群とする. l_1, $l_2,\dots,l_n$ は非負整数とする. V は $\rho_{l_1}\otimes\rho_{l_2}\otimes\cdots\otimes\rho_{l_n}$ の表現空間とする. $\Omega\in G_{l_1+2,l_2+2,\dots,l_n+2}(\Gamma)$ は Γ についての重さ $(l_1+2,l_2+2,\dots,l_n+2)$ のヒルベルト・モジュラー形式とする. V に値をもつ $\mathfrak{H}^n$ 上の正則な n-form $\mathfrak{d}(\Omega)$ を

$$\mathfrak{d}(\Omega)=\Omega(z)\begin{bmatrix}z_1\\1\end{bmatrix}^{l_1}\otimes\begin{bmatrix}z_2\\1\end{bmatrix}^{l_2}\otimes\cdots\otimes\begin{bmatrix}z_n\\1\end{bmatrix}^{l_n}dz_1dz_2\cdots dz_n \tag{4.1}$$

によって定義する. $\rho=\rho_{l_1}\otimes\rho_{l_2}\otimes\cdots\otimes\rho_{l_n}$ とおく.

$g=(g_1,\dots,g_n)\in\mathrm{GL}(2,\mathbf{R})_+^n$ をとる. g の $\mathfrak{H}^n$ への作用により $\mathfrak{d}(\Omega)$ は $\mathfrak{d}(\Omega)\circ g$ に移る. ここに

$$\mathfrak{d}(\Omega)\circ g=\Omega(g(z))\begin{bmatrix}g_1z_1\\1\end{bmatrix}^{l_1}\otimes\cdots\otimes\begin{bmatrix}g_nz_n\\1\end{bmatrix}^{l_n}(dz_1\circ g_1)\cdots(dz_n\circ g_n).$$

容易な計算により

$$\mathfrak{d}(\Omega)\circ g=\prod_{\nu=1}^{n}(\det g_\nu)^{-l_\nu/2}\rho(g)\mathfrak{d}(\Omega|_k g),\quad g\in\mathrm{GL}(2,\mathbf{R})_+^n\cap\mathrm{GL}(2,F)$$

を得る. 特に

$$\mathfrak{d}(\Omega)\circ\gamma=\rho(\gamma)\mathfrak{d}(\Omega),\qquad \gamma\in\Gamma \tag{4.2}$$

が成り立つ. $\mathfrak{d}(\Omega)$ から $Z^n(\Gamma,V)$ の n-cocycle を explicit に構成できる. ([Y3], 第五章.)

$n=2$ の場合を詳しく述べよう. $w=(w_1,w_2)\in\mathfrak{H}^2$ をとる. $z=(z_1,z_2)\in\mathfrak{H}^2$ に対して

$$F(z)=\int_{w_1}^{z_1}\int_{w_2}^{z_2}\mathfrak{d}(\Omega) \tag{4.3}$$

とおく. $\mathcal{H}$ は V に値をもつ $\mathfrak{H}^2$ 上の正則函数全体のなすベクトル空間とする. $\varphi\in\mathcal{H}$ と $\gamma\in\Gamma$ に対し $\mathfrak{H}^2$ 上の函数 $\gamma\varphi$ を

$$(\gamma\varphi)(z)=\rho(\gamma)\varphi(\gamma^{-1}z) \tag{4.4}$$

によって定義する. Γ のこの作用で $\mathcal{H}$ は Γ 加群になる.

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\frac{\partial}{\partial z_2}(\gamma F-F)=0$$

であるから

$$\gamma F - F = g(\gamma; z_1) + h(\gamma; z_2)$$

と書ける．ここに $g(\gamma; z_1) \in \mathcal{H}$, $h(\gamma; z_2) \in \mathcal{H}$ はそれぞれ z_1, z_2 にのみ依存する函数である．g と h を $C^1(\Gamma, \mathcal{H})$ の 1-cochain とみなす．このとき明らかに

$$dg(\gamma_1, \gamma_2; z_1) + dh(\gamma_1, \gamma_2; z_2) = 0$$

が成り立つ．

$$f(\Omega)(\gamma_1, \gamma_2) = dg(\gamma_1, \gamma_2; z_1)$$

とおく．$f(\Omega)$ を f と略記する．$f(\gamma_1, \gamma_2) \in V$ は定数であることがわかる．$\mathcal{H}$ において f は coboundary であるから, f は cocycle 条件

$$\gamma_1 f(\gamma_2, \gamma_3) - f(\gamma_1\gamma_2, \gamma_3) + f(\gamma_1, \gamma_2\gamma_3) - f(\gamma_1, \gamma_2) = 0 \tag{4.5}$$

をみたす．2-cocycle f は $H^2(\Gamma, V)$ の cohomology 類を定める．

f を具体的に書き表わそう．$x \in F$ に対し x' は x の $\mathbf{Q}$ 上の共役を表わす．$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$ に対し $\gamma' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ とおく．γ と γ' を $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ の元とみなす．$\gamma \in \Gamma$ とする．

$$\begin{aligned} F(\gamma(z)) = F(\gamma z_1, \gamma' z_2) &= \int_{w_1}^{\gamma z_1} \int_{w_2}^{\gamma' z_2} \mathfrak{d}(\Omega) \\ &= \int_{\gamma w_1}^{\gamma z_1} \int_{\gamma' w_2}^{\gamma' z_2} \mathfrak{d}(\Omega) + \int_{\gamma w_1}^{\gamma z_1} \int_{w_2}^{\gamma' w_2} \mathfrak{d}(\Omega) + \int_{w_1}^{\gamma w_1} \int_{w_2}^{\gamma' z_2} \mathfrak{d}(\Omega) \\ &= (\rho_{l_1}(\gamma) \otimes \rho_{l_2}(\gamma'))F(z) + \int_{\gamma w_1}^{\gamma z_1} \int_{w_2}^{\gamma' w_2} \mathfrak{d}(\Omega) + \int_{w_1}^{\gamma w_1} \int_{w_2}^{\gamma' z_2} \mathfrak{d}(\Omega) \end{aligned}$$

を得る．この式の z を $\gamma^{-1}z$ で置き換えて

$$(\rho_{l_1}(\gamma) \otimes \rho_{l_2}(\gamma'))F(\gamma^{-1}z) - F(z) = -\int_{\gamma w_1}^{z_1} \int_{w_2}^{\gamma' w_2} \mathfrak{d}(\Omega) - \int_{w_1}^{\gamma w_1} \int_{w_2}^{z_2} \mathfrak{d}(\Omega)$$

を得る．従って

$$g(\gamma; z_1) = -\int_{\gamma w_1}^{z_1} \int_{w_2}^{\gamma' w_2} \mathfrak{d}(\Omega), \tag{4.6}$$

$$h(\gamma; z_2) = -\int_{w_1}^{\gamma w_1} \int_{w_2}^{z_2} \mathfrak{d}(\Omega) \tag{4.7}$$

と取ることができる. $\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma$ に対して

$$f(\gamma_1,\gamma_2)=(\gamma_1 g)(\gamma_2;z_1)-g(\gamma_1\gamma_2;z_1)+g(\gamma_1;z_1), \tag{4.8}$$

$$f(\gamma_1,\gamma_2)=-\{(\gamma_1 h)(\gamma_2;z_2)-h(\gamma_1\gamma_2;z_2)+h(\gamma_1;z_2)\} \tag{4.9}$$

である. (4.6) と (4.8) によって

$$\begin{aligned}
f(\gamma_1,\gamma_2)=&(\rho_{l_1}(\gamma_1)\otimes\rho_{l_2}(\gamma_1'))g(\gamma_2;\gamma_1^{-1}z_1)-g(\gamma_1\gamma_2;z_1)+g(\gamma_1;z_1)\\
=&-(\rho_{l_1}(\gamma_1)\otimes\rho_{l_2}(\gamma_1'))\int_{\gamma_2w_1}^{\gamma_1^{-1}z_1}\int_{w_2}^{\gamma_2'w_2}\mathfrak{d}(\Omega)\\
&+\int_{\gamma_1\gamma_2w_1}^{z_1}\int_{w_2}^{\gamma_1'\gamma_2'w_2}\mathfrak{d}(\Omega)-\int_{\gamma_1w_1}^{z_1}\int_{w_2}^{\gamma_1'w_2}\mathfrak{d}(\Omega)\\
=&-\int_{\gamma_1\gamma_2w_1}^{z_1}\int_{\gamma_1'w_2}^{\gamma_1'\gamma_2'w_2}\mathfrak{d}(\Omega)+\int_{\gamma_1\gamma_2w_1}^{z_1}\int_{w_2}^{\gamma_1'\gamma_2'w_2}\mathfrak{d}(\Omega)-\int_{\gamma_1w_1}^{z_1}\int_{w_2}^{\gamma_1'w_2}\mathfrak{d}(\Omega)\\
=&\int_{\gamma_1\gamma_2w_1}^{z_1}\int_{w_2}^{\gamma_1'w_2}\mathfrak{d}(\Omega)-\int_{\gamma_1w_1}^{z_1}\int_{w_2}^{\gamma_1'w_2}\mathfrak{d}(\Omega)\\
=&\int_{\gamma_1\gamma_2w_1}^{\gamma_1w_1}\int_{w_2}^{\gamma_1'w_2}\mathfrak{d}(\Omega)
\end{aligned}$$

を得る. ここで計算の途中で (4.2) を用いた. cocycle の具体的な形

$$f(\gamma_1,\gamma_2)=\int_{\gamma_1\gamma_2w_1}^{\gamma_1w_1}\int_{w_2}^{\gamma_1'w_2}\mathfrak{d}(\Omega) \tag{4.10}$$

が得られた.

w_2 はそのままで w_1 を w_1^* で置き換えたとする. このとき $g(\gamma;z_1)$ は $g(\gamma,z_1)+a(\gamma)$ に変わる. ここに

$$a(\gamma)=\int_{\gamma w_1}^{\gamma w_1^*}\int_{w_2}^{\gamma' w_2}\mathfrak{d}(\Omega).$$

よって $f(\gamma_1,\gamma_2)$ は $f(\gamma_1,\gamma_2)+\gamma_1a(\gamma_2)-a(\gamma_1\gamma_2)+a(\gamma_1)$ に変わる. w_1 はそのままで w_2 を w_2^* で置き換えたとする. このとき $h(\gamma;z_2)$ は $h(\gamma,z_2)+b(\gamma)$ に変わる. ここに

$$b(\gamma)=\int_{w_1}^{\gamma w_1}\int_{w_2}^{w_2^*}\mathfrak{d}(\Omega).$$

(4.9) により $f(\gamma_1,\gamma_2)$ は $f(\gamma_1,\gamma_2)-\gamma_1b(\gamma_2)+b(\gamma_1\gamma_2)-b(\gamma_1)$ に変わる. 従って f の cohomology 類は “基点” w_1, w_2 の取り方によらない.

$\overline{\Gamma} = \Gamma/(\{\pm 1_2\} \cap \Gamma)$ とおく. (4.10) により f は $\overline{\Gamma}$ の V に値をもつ 2-cocycle とみなせることがわかる. 場合によって f を $\overline{\Gamma}$ の 2-cocycle とみる. また (4.10) により

(4.11) $$f(1,\gamma) = f(\gamma,1) = 0, \qquad \forall \gamma \in \overline{\Gamma}$$

がわかる. すなわち cocycle f は正規化されている.

今 Ω はカスプ形式とする. このとき cocycle $f = f(\Omega)$ は "parabolic 条件" をみたす. 即ち $q \in \Gamma$ は放物元で $w^* = (w_1^*, w_2^*)$ は q' の固定点とする. Ω はカスプ形式であるから w_2 を w_2^* で置き換えることができる. f^* は (w_1, w_2^*) から得られた cocycle とする. (4.10) により $f^*(q,\gamma) = 0$ であり 1-cochain b によって

$$f^*(\gamma_1,\gamma_2) = f(\gamma_1,\gamma_2) - \gamma_1 b(\gamma_2) + b(\gamma_1\gamma_2) - b(\gamma_1)$$

となる. 故に

$$f(q,\gamma) = qb(\gamma) - b(q\gamma) + b(q), \qquad \gamma \in \Gamma$$

が成り立つ. 即ち q が放物元のとき $f(q,\gamma)$ は coboundary の形である. $f(\gamma,q)$ についても同様である.

L 函数 $L(s,\Omega)$ の特殊値と cocycle $f(\Omega)$ の関係を詳しく調べよう. $\Gamma = SL(2,\mathcal{O}_F)$ と仮定する. ϵ を F の基本単数とする.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mu = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1} \end{pmatrix}$$

とおく. σ, μ を $\overline{\Gamma}$ の元とみなす. cocycle 条件により

(4.12) $$\sigma f(\sigma,\sigma) = f(\sigma,\sigma)$$

を得る. 基点として

$$w_1 = i\epsilon^{-1}, \qquad w_2 = i\infty$$

をとる. (4.10) により

(4.13) $$f(\sigma,\mu) = f(\sigma,\sigma) = -\int_{i\epsilon^{-1}}^{i\epsilon}\int_0^{i\infty} \mathfrak{d}(\Omega)$$

を得る.

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} \,\middle|\, u \in E_F,\ v \in \mathcal{O}_F \right\} \subset \Gamma$$

とおく. $p \in P$ について $pw_2 = w_2$ であるから, (4.10) により

(4.14) $$f(p,\gamma) = 0, \qquad \forall p \in P, \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

を得る. cocycle 条件 (4.5) において $\gamma_1 = p \in P$ と取って

$$f(p\gamma_1, \gamma_2) = pf(\gamma_1, \gamma_2), \qquad p \in P,\ \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma \tag{4.15}$$

を得る. これは $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathcal{O}_F)$ のときの parabolic 条件であり特殊値の計算において以下重要な役割をはたす.

$0 \leq s \leq l_1,\ 0 \leq t \leq l_2$ に対して

$$P_{s,t} = \int_{i\epsilon^{-1}}^{i\epsilon} \int_0^{i\infty} \Omega(z) z_1^s z_2^t dz_1 dz_2 \tag{4.16}$$

とおく. $f(\sigma, \sigma)$ の成分は $-P_{s,t}$ で与えられる. 関係 $\sigma f(\sigma, \sigma) = f(\sigma, \sigma)$ は

$$P_{s,t} = (-1)^{l_1+l_2-s-t} P_{l_1-s, l_2-t} \tag{4.17}$$

と同値である. $k_1 = l_1 + 2,\ k_2 = l_2 + 2$ とおく. (4.3) により

$$l_1 \equiv l_2 \mod 2 \tag{4.18}$$

を得る. $l_1 \geq l_2$ と仮定する. このとき

$$k_0 = k_1, \qquad k_1' = 0, \qquad k_2' = k_1 - k_2$$

である. $E_F^2 = \langle \epsilon^2 \rangle$ であるから $\mathbf{R}_+^2 / E_F^2$ の基本領域は $[\epsilon^{-1}, \epsilon] \times \mathbf{R}_+$ で与えられる. $\mathrm{Re}(s)$ が十分大きいとき, (4.6) により

$$\begin{aligned} &\int_{\epsilon^{-1}}^{\epsilon} \int_0^{\infty} \Omega(iy_1, iy_2) y_1^{s-1} y_2^{s-(k_1-k_2)/2-1} dy_1 dy_2 \\ &= (2\pi)^{(k_1-k_2)/2} R(s, \Omega) \end{aligned} \tag{4.19}$$

を得る. この積分は全ての $s \in \mathbf{C}$ について局所一様に収束していることが確かめられる. $m \in \mathbf{Z}$ をとり $s = m,\ t = m - (k_1 - k_2)/2$ とおく. このとき $0 \leq s \leq l_1,\ 0 \leq t \leq l_2$ が成立する条件は

$$\frac{k_1 - k_2}{2} \leq m \leq \frac{k_1 + k_2}{2} - 2 \tag{4.20}$$

である. この範囲の m について

$$\begin{aligned} P_{m, m-(k_1-k_2)/2} &= \int_{i\epsilon^{-1}}^{i\epsilon} \int_0^{i\infty} \Omega(z) z_1^m z_2^{m-(k_1-k_2)/2} dz_1 dz_2 \\ &= i^{2m-(k_1-k_2)/2+2} \int_{\epsilon^{-1}}^{\epsilon} \int_0^{\infty} \Omega(iy_1, iy_2) y_1^m y_2^{m-(k_1-k_2)/2} dy_1 dy_2 \end{aligned}$$

である．よって (4.19) により

$$P_{m,m-(k_1-k_2)/2} = (-1)^{m+1} i^{-(k_1-k_2)/2} (2\pi)^{(k_1-k_2)/2} R(m+1,\Omega) \tag{4.21}$$

を得る．函数等式 (3.7) により，これは

$$(-1)^{m+1} i^{-(k_1-k_2)/2} (2\pi)^{(k_1-k_2)/2} (-1)^{(k_1+k_2)/2} R(k_1-m-1,\Omega)$$

に等しい．k_1-m-2 も (4.20) をみたすから (4.21) により

$$P_{m,m-(k_1-k_2)/2} = (-1)^{(k_1-k_2)/2} P_{k_1-m-2,(k_1+k_2)/2-m-2} \tag{4.22}$$

となる．(4.22) は (4.17) と consistent である．(4.20) は $L(m+1,\Omega)$ が critical value であるための条件であることを注意しておく．([Sh4], (4.14) 参照).

$\Omega \in M_k(\Gamma)$ とし $f = f(\Omega) \in Z^2(\Gamma, V)$ は (4.10) によって Ω から得られる 2-cocycle とする．$f(\Omega)$ の cohomology 類への Hecke 作用素の作用を書き表そう．$f(\Omega)$ を f_Ω とも書く．

F は n 次の総実代数体，Γ は $\mathrm{SL}(2,\mathcal{O}_F)$ の合同部分群とする．F の総正な元 ϖ に対し

$$\Gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \Gamma = \sqcup_{i=1}^{d} \Gamma \beta_i$$

を剰余類分解とする．$\Omega \in M_k(\Gamma)$ をとる．Hecke 作用素 $T(\varpi)$ を

$$\Omega \mid T(\varpi) = N(\varpi)^{k_0/2-1} \sum_{i=1}^{d} \Omega|_k \beta_i. \tag{4.23}$$

によって定義する．明らかに $T(\varpi)$ は剰余類分解の取り方によらない．$\Omega|T(\varpi) \in M_k(\Gamma)$ であり Ω がカスプ形式ならば $\Omega|T(\varpi)$ はカスプ形式である．また

$$\mathfrak{d}(\Omega \mid T(\varpi)) = \prod_{\nu=1}^{n} (\varpi^{(\nu)})^{(k_0+k_\nu)/2-2} \sum_{i=1}^{d} \rho(\beta_i)^{-1} (\mathfrak{d}(\Omega) \circ \beta_i) \tag{4.24}$$

が成り立つ．

$$c = \prod_{\nu=1}^{n} (\varpi^{(\nu)})^{(k_0+k_\nu)/2-2} \tag{4.25}$$

とおく．以下 $n=2$ と仮定する．

$$F_{\Omega|T(\varpi)}(z) = \int_{w_1}^{z_1} \int_{w_2}^{z_2} \mathfrak{d}(\Omega \mid T(\varpi)), \qquad z = (z_1, z_2) \tag{4.26}$$

とおく. (4.10) を導いたように, この函数から出発して $\Omega \mid T(\varpi)$ に付随する 2-cocycle $f_{\Omega|T(\varpi)}$ を計算できる. 詳細は略するが結果は次のようになる. γ_1, $\gamma_2 \in \Gamma$ に対し

(4.27) $\beta_i\gamma_1 = \delta_i^{(1)}\beta_{j(i)},\ \delta_i^{(1)} \in \Gamma, \quad \beta_i\gamma_2 = \delta_i^{(2)}\beta_{k(i)},\ \delta_i^{(2)} \in \Gamma, \qquad 1 \le i \le d$

とおく. このとき coboundary を法として

$$f_{\Omega|T(\varpi)}(\gamma_1, \gamma_2) = c\sum_{i=1}^{d} \beta_i^{-1} f_\Omega(\beta_i\gamma_1\beta_{j(i)}^{-1}, \beta_{j(i)}\gamma_2\beta_{k(j(i))}^{-1}) \tag{4.28}$$

である. この公式は c 倍を除いて命題 2.2 と一致する.

F の狭義類数は 1 とする. Ω は Hecke 作用素の共通固有函数とする. このとき (3.4) で定義された L 函数 $L(s,\Omega)$ は志村 [Sh4] あるいは Jacquet-Langlands [JL] で与えられた Euler 積と本質的に一致するが, 微妙な違いがある. これを説明しておこう.

$\delta \gg 0$ によって $\mathfrak{d}_F = (\delta)$ と書く. $\Omega \in S_{k_1,k_2}(\Gamma)$, $\Gamma = \mathrm{SL}(2, \mathcal{O}_F)$ とし

$$\Omega(z) = \sum_{0 \ll \alpha \in \mathcal{O}_F} c(\alpha)\mathbf{e}_F(\frac{\alpha}{\delta}z)$$

を Fourier 展開とする. (3.1) の記号では $a(\alpha/\delta) = c(\alpha)$ である.

$$\Delta = \{\alpha \in M(2, \mathcal{O}_F) \mid \det\alpha \gg 0\}$$

とおく. $\mathfrak{m}$ は F の整イデアルとし $m \gg 0$ を $\mathfrak{m} = (m)$ と取る. このとき Hecke 環 $\mathcal{H}(\Gamma, \Delta)$ の元 $T(\mathfrak{m})$ を

$$T(\mathfrak{m}) = \sum_{\alpha \in \Delta,\, \det\alpha = m} \Gamma\alpha\Gamma$$

で定義する. $T(\mathfrak{m}) = \sqcup_{i=1}^{e}\Gamma\beta_i$ を剰余類分解とする. $k_1 \ge k_2$ と仮定する. $T(\mathfrak{m})$ の Ω への作用を

$$\Omega \mid T(\mathfrak{m}) = N(\mathfrak{m})^{k_1/2-1}\sum_{i=1}^{e} \Omega|_k\beta_i$$

で定義する. このとき $\Omega|T(\mathfrak{m}) \in S_k(\Gamma)$ でありこれが m と β_i の取り方によらないことがわかる.

$\Omega \neq 0$ は 全ての $T(\mathfrak{m})$ の共通固有函数とする.

$$\Omega \mid T(\mathfrak{m}) = \lambda(\mathfrak{m})\Omega$$

とおく. Ω は $c(1)=1$ と正規化されていると仮定する. 一変数の場合と同様に計算して

$$\lambda(\mathfrak{m}) = c(m)(m^{(2)})^{(k_1-k_2)/2},$$

(4.29) $$L(s,\Omega) = (\delta^{(2)})^{(k_1-k_2)/2} D_F^s \prod_{\mathfrak{p}} (1-\lambda(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{-s} + N(\mathfrak{p})^{k_1-1-2s})^{-1}$$

を得る. ここに $\mathfrak{p}$ は F の全ての素イデアルにわたり, $D_F = N(\delta)$ は F の判別式である.

$0 \ll \varpi \in \mathcal{O}_F$ が素イデアル $\mathfrak{p}$ を生成するとき, (4.23) で定義される $T(\varpi)$ を $T(\mathfrak{p})$ とも書く.

5. Parabolic 条件と特殊値の計算法

この節ではヒルベルト・モジュラー形式 Ω の L 函数 $L(s,\Omega)$ の特殊値の比を $H^2(\Gamma, V)$ を用いて計算する原理を説明する.

F は実二次体, ϵ は F の基本単数とする. $\Gamma = \mathrm{PSL}(2, \mathcal{O}_F)$,

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} \middle| \, u \in E_F,\ v \in \mathcal{O}_F \right\} / \{\pm 1_2\}$$

とおく. 非負整数 l_1, l_2 は $l_1 \geq l_2$, $l_1 \equiv l_2 \mod 2$ をみたすと仮定する. $k_1 = l_1 + 2$, $k_2 = l_2 + 2$, $k = (k_1, k_2)$ とおく. $\Omega \in S_k(\Gamma)$ とする. $N(\epsilon) = -1$ ならば l_1 は偶数であると仮定する. (これは 3 節の仮定 (A) である.)

V_1, V_2 はそれぞれ ρ_{l_1}, ρ_{l_2} の表現空間とする. V_1 の基底 $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_{l_1+1}\}$ を $\rho_{l_1}(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})\mathbf{e}_i = a^{l_1+1-i}\mathbf{e}_i$ と取る. 同様に V_2 の基底 $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_{l_2+1}\}$ を $\rho_{l_2}(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})\mathbf{e}'_i = a^{l_2+1-i}\mathbf{e}'_i$ と取る. このとき $\rho = \rho_{l_1} \otimes \rho_{l_2}$ に対して

(5.1) $$\rho(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix})(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}'_j) = \alpha^{l_1+1-i}(\alpha')^{l_2+1-j}\beta^{i-1}(\beta')^{j-1}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}'_j)$$

が成り立つ. ここに $\alpha, \beta \in F^\times$ である.

前節では Ω から $L(s,\Omega)$ の特殊値についての情報を含む 2-cocycle $f(\Omega) \in Z^2(\Gamma, V)$ を構成したが, $f(\Omega)$ の cohomology 類は coboundary を法として定まっている. $f(\Omega)$ に coboundary を加えたとき特殊値に関係する成分はどう変化するであろうか. 答は次の定理によって与えられる.

定理 5.1. $i = 1$ または 2 とする. このとき

$$\dim H^i(P, V) = \begin{cases} 0 & l_1 \neq l_2 \text{ または } N(\epsilon)^{l_1} = -1 \text{ のとき}, \\ 1 & l_1 = l_2 \text{ かつ } N(\epsilon)^{l_1} = 1 \text{ のとき}. \end{cases}$$

この定理の $i = 1$ の場合は次の定理から従う.

定理 5.2.

$$U=\left\{\begin{pmatrix}\pm1 & u\\ 0 & \pm1\end{pmatrix}\middle|\, u\in\mathcal{O}_F\right\}/\{\pm1_2\}\subset\Gamma$$

とおく．このとき $\dim H^1(U,V)=2$ であり μ の $H^1(U,V)$ への作用の固有値は $\epsilon^{l_1+2}(\epsilon')^{-l_2}$, $\epsilon^{-l_1-2}(\epsilon')^{l_2}$ である．特に $H^1(U,V)^{P/U}=0$.

(2.4) において $G=P$, $N=U$, $M=V$ と取ると，$P/U\cong\mathbf{Z}$ であるから完全列

$$0\longrightarrow H^1(P/U,V^U)\longrightarrow H^1(P,V)\longrightarrow H^1(U,V)^{P/U}\longrightarrow 0$$

が得られる．$\dim H^1(P/U,V^U)$ は $l_1\neq l_2$ または $N(\epsilon)^{l_1}=-1$ のときは 0, $l_1=l_2$ かつ $N(\epsilon)^{l_1}=1$ のとき 1 であることは容易にわかるので，定理 5.1 の $i=1$ の場合は定理 5.2 から従う．定理 5.2 の証明は [Y4] または [Y6] を参照されたい．

f は parabolic 条件 (4.15) をみたす $Z^2(\Gamma,V)$ の 2-cocycle とし，これに $b\in C^1(\Gamma,V)$ の coboundary

$$b(\gamma_1\gamma_2)-\gamma_1 b(\gamma_2)-b(\gamma_1)$$

を加えたとする．得られた 2-cocycle は正規化されており parabolic 条件 (4.15) をみたすと仮定する．このとき $b(1)=0$ であり parabolic 条件を用いて

$$p\gamma_1 b(\gamma_2)+b(p\gamma_1)-b(p\gamma_1\gamma_2)=p\gamma_1 b(\gamma_2)+pb(\gamma_1)-pb(\gamma_1\gamma_2),\qquad p\in P$$

を得る．$\gamma_2=\gamma_1^{-1}$ と取り，γ_1 を γ と書くと，b は条件

$$b(p\gamma)=pb(\gamma)+b(p),\qquad p\in P,\ \gamma\in\Gamma \tag{5.2}$$

を充たすことがわかる．$A=f(\sigma,\mu)$ とおく．b の coboundary を加えると，A は $A+b(\sigma\mu)-\sigma b(\mu)-b(\sigma)$ に変わる．(5.2) により

$$b(\sigma\mu)=b(\mu^{-1}\sigma)=\mu^{-1}b(\sigma)+b(\mu^{-1}),\qquad b(\mu^{-1})=-\mu^{-1}b(\mu)$$

であるから，A は

$$A+(\mu^{-1}-1)b(\sigma)-(\sigma+\mu^{-1})b(\mu)$$

に変わる．(5.2) により $b|P\in Z^1(P,V)$ であることに注意する．まず $l_1\neq l_2$ とする．定理 5.1 により，$\mathbf{b}\in V$ があって

$$b(\mu)=(\mu-1)\mathbf{b}$$

となる. $(\sigma+\mu^{-1})(\mu-1)=(\mu^{-1}-1)(\sigma-1)$ であるから, A は

$$A+(\mu^{-1}-1)[b(\sigma)+(1-\sigma)\mathbf{b}]$$

に変わる. (5.1) により

$$\mu^{-1}(\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}'_{i-(l_1-l_2)/2})=N(\epsilon)^{l_1}(\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}'_{i-(l_1-l_2)/2}) \tag{5.3}$$

であるから A の特殊値に関係する成分は変わらないことがわかる. 次に $l_1=l_2$ としよう. 定理 5.1 と定理 5.2 の下の完全列により, $\mathbf{b}\in V$ と $\mathbf{b}_0\in V^U$ があって

$$b(\mu)=(\mu-1)\mathbf{b}+\mathbf{b}_0,\qquad \mathbf{b}\in V,\quad \mathbf{b}_0\in V^U$$

となる. 故に A は

$$A+(\mu^{-1}-1)[b(\sigma)+(1-\sigma)\mathbf{b}]-(\sigma+\mu^{-1})\mathbf{b}_0$$

に変わる. $\mathbf{b}_0\in V^U$ ゆえ, この式から A の特殊値に関係する成分は, 端にある二つの特殊値 $L(1,\Omega)$ と $L(l_1+1,\Omega)$ に関係する成分を除いて変わらないことがわかる.

$\bar{Z}^2(\Gamma,V)$ は正規化された 2-cocycle 全体のなす $Z^2(\Gamma,V)$ の部分群とする.

$$\bar{B}^2(\Gamma,V)=\{f=db\mid b\in C^1(\Gamma,V),\ b(1)=0\}$$

とおくと,

$$\bar{Z}^2(\Gamma,V)\cap B^2(\Gamma,V)=\bar{B}^2(\Gamma,V)$$

が成り立つ. よって

$$\bar{Z}^2(\Gamma,V)/\bar{B}^2(\Gamma,V)\subset Z^2(\Gamma,V)/B^2(\Gamma,V)$$

である. 任意の 2-cocycle は coboundary を加えて正規化されるから

$$H^2(\Gamma,V)=\bar{Z}^2(\Gamma,V)/\bar{B}^2(\Gamma,V)$$

を得る.

$$Z^2_{\mathrm{P}}(\Gamma,V)=\{f\in\bar{Z}^2(\Gamma,V)\mid f\ \text{は parabolic 条件 (4.15) をみたす}\},$$

$$\begin{aligned}B^2_{\mathrm{P}}(\Gamma,V)=&\{f\in\bar{B}^2(\Gamma,V)\mid f=db, b\in C^1(\Gamma,V),\\ &b(p\gamma)=pb(\gamma)+b(p),\quad p\in P,\gamma\in\Gamma\}\end{aligned}$$

とおく. $Z^2_P(\Gamma,V)$ の元を正規化された *parabolic 2-cocycle* と呼ぶ. 次の補題は容易に確かめられる.

補題 5.3. $Z^2_{\mathrm{P}}(\Gamma,V)\cap\bar{B}^2(\Gamma,V)=B^2_{\mathrm{P}}(\Gamma,V)$ が成り立つ.

補題 5.3 により

$$Z^2_{\mathrm{P}}(\Gamma, V)/B^2_{\mathrm{P}}(\Gamma, V) \subset \bar{Z}^2(\Gamma, V)/\bar{B}^2(\Gamma, V) = H^2(\Gamma, V)$$

である. $H^2(\Gamma, V)$ の parabolic 部分 $H^2_{\mathrm{P}}(\Gamma, V)$ を

$$H^2_{\mathrm{P}}(\Gamma, V) = Z^2_{\mathrm{P}}(\Gamma, V)/B^2_{\mathrm{P}}(\Gamma, V)$$

で定義する.

定理 5.1 の応用として, Ω が Hecke 作用素の共通固有函数であるとき $f(\Omega)$ の cohomology 類が消えないことを示しておこう.

命題 5.4. *$N(\epsilon) = -1$ ならば l_1 は偶数であると仮定する. $f \in Z^2_P(\Gamma, V)$ は正規化された parabolic 2-cocycle とする. $(l_1 - l_2)/2+1 \leq i \leq (l_1+l_2)/2+1$ に対し c_i は $f(\sigma, \mu)$ における $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}'_{i-(l_1-l_2)/2}$ の係数とする. $l_1 \neq l_2$ のときはある i について $c_i \neq 0$ と仮定し, $l_1 = l_2$ のときは $i \neq 1, l_1+1$ について $c_i \neq 0$ と仮定する. このとき f の cohomology 類は消えない.*

証明. f の cohomology 類が消えると仮定する. このとき $b \in C^1(\Gamma, V)$ があって

$$f(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_1 b(\gamma_2) + b(\gamma_1) - b(\gamma_1\gamma_2), \qquad \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$$

となる. b は (5.2) をみたすから, 前と同様の計算により

$$f(\sigma, \mu) = (1 - \mu^{-1})b(\sigma) + (\sigma + \mu^{-1})b(\mu)$$

を得る.

まず $l_1 \neq l_2$ の場合を考える. $b|P \in Z^1(P, V)$ であるから, 定理 5.1 により $\mathbf{b} \in V$ があって $b(\mu) = (\mu - 1)\mathbf{b}$ となる. これから

$$f(\sigma, \mu) = (1 - \mu^{-1})[b(\sigma) + (1 - \sigma)\mathbf{b}]$$

を得る. (5.3) により c_i は全て消える. これは矛盾であり, この場合には証明できた.

次に $l_1 = l_2$ の場合を考える. 定理 5.1 と定理 5.2 の下の完全列により, $\mathbf{b} \in V$ と $\mathbf{b}_0 \in V^U$ があって

$$b(\mu) = (\mu - 1)\mathbf{b} + \mathbf{b}_0$$

となる. このとき

$$f(\sigma, \mu) = (1 - \mu^{-1})[b(\sigma) + (1 - \sigma)\mathbf{b}] + (\sigma + \mu^{-1})\mathbf{b}_0$$

を得る. $\mathbf{b}_0 \in V^U$ ゆえ, この式から $i \neq 1, l_1 + 1$ のとき $c_i = 0$ がわかる. これは矛盾であり証明が終わる.

定理 5.5. $k=(k_1,k_2)$, $k_1 \geq k_2$, $k_1 \equiv k_2 \equiv 0 \mod 2$ とする. $\Omega \in S_k(\Gamma)$ で $f=f(\Omega)$ は *(4.10)* で定義される正規化された *parabolic 2-cocycle* とする. F の狭義類数は 1 で Ω は *Hecke* 作用素の共通固有函数であると仮定する. $k_1 \neq k_2$ ならば $k_2 \geq 4$ と仮定し, $k_1=k_2$ ならば $k_2 \geq 6$ と仮定する. このとき f の $H^2(\Gamma, V)$ における *cohomology* 類は消えない.

証明. $k_1=l_1+2$, $k_2=l_2+2$ とおく. i が $(l_1-l_2)/2+1 \leq i \leq (l_1+l_2)/2+1$ の範囲にあるとき, (4.21) により $f(\sigma,\mu)$ における $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}'_{i-(l_1-l_2)/2}$ の係数 c_i は $L(l_1+2-i,\Omega)$ を 0 でない定数倍したものであることがわかる. $\mathrm{Re}(s) \geq (k_1+1)/2$ のとき $L(s,\Omega) \neq 0$ であることは良く知られている ([Sh4], Proposition 4.16 参照). $i=(l_1-l_2)/2+1$ のとき, c_i は $L((k_1+k_2)/2-1,\Omega)$ の 0 でない定数倍である. $k_2 \geq 3$ ならば $(k_1+k_2)/2-1 \geq (k_1+1)/2$ であるから $k_1 \neq k_2$ のとき定理は補題 5.4 から従う. $k_1=k_2$ とする. $i=2$ のとき c_i は $L(k_1-2,\Omega)$ の 0 でない定数倍である. $k_1 \geq 5$ ならば $k_1-2 \geq (k_1+1)/2$ であるから定理は補題 5.4 から従う.

具体的な計算のためには $H^2(\Gamma,V)$ を Γ の外部自己同型の作用で分解しておくのが好都合である.

$$Z=\left\{ \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \middle| \ u \in E_F \right\}$$

とおく. これは $\mathrm{GL}(2,\mathcal{O}_F)$ の中心である. 同型

$$Z \cdot \mathrm{SL}(2,\mathcal{O}_F)/Z \cong \mathrm{SL}(2,\mathcal{O}_F)/\{\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\} = \mathrm{PSL}(2,\mathcal{O}_F)=\Gamma$$

により Γ を $\mathrm{PGL}(2,\mathcal{O}_F)=\mathrm{GL}(2,\mathcal{O}_F)/Z$ の部分群とみなす. 以下 l_1 と l_2 は偶数であると仮定する. l が偶数のとき $\mathrm{GL}(2,\mathbf{C})$ の表現 ρ'_l を

$$\rho'_l(g)=\rho_l(g)\det(g)^{-l/2}, \qquad g \in \mathrm{GL}(2,\mathbf{C})$$

で定義する. ρ'_l は中心の上で自明である. $\rho'=\rho'_{l_1} \otimes \rho'_{l_2}$ とおく. $gv=\rho'(g)v$, $g \in \mathrm{GL}(2,\mathcal{O}_F)$, $v \in V$ により, V は $\mathrm{GL}(2,\mathcal{O}_F)$ 加群になる. $\rho'(z)=\mathrm{id}$, $z \in Z$ であるから, V を $\mathrm{PGL}(2,\mathcal{O}_F)$ 加群とみなすことができる. $\rho'|\Gamma=\rho|\Gamma$ ゆえ, V の Γ 加群としての構造は前と同じである.

$$\mathrm{PGL}(2,\mathcal{O}_F)/\mathrm{PSL}(2,\mathcal{O}_F) \cong E_F/E_F^2 \cong \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$$

が成り立つ. 共役により $\mathrm{PGL}(2,\mathcal{O}_F)$ は Γ に外部自己同型として作用し, $H^2(\Gamma,V)$ はこの作用で 4 個の部分空間の直和に分解する.

$$\nu=\begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \delta=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく. $\mathrm{PGL}(2,\mathcal{O}_F)$ は $\mathrm{PSL}(2,\mathcal{O}_F)$ と ν, δ によって生成される. まず ν の作用を調べよう. $f \in Z^2(\Gamma, V)$ に対し $\widetilde{e}f \in Z^2(\Gamma, V)$ を

$$(5.4) \qquad \widetilde{e}f(\gamma_1,\gamma_2) = \nu^{-1}f(\nu\gamma_1\nu^{-1},\nu\gamma_2\nu^{-1}), \qquad \gamma_1,\gamma_2 \in \Gamma$$

によって定義する. $\widetilde{e}$ は $H^2(\Gamma, V)$ の自己同型 e を誘導する. $\nu^2 = \mu$ ゆえ, $\widetilde{e}^2$ は μ による内部自己同型から得られる. 故に $e^2 = 1$ である. (5.4) により f が parabolic 2-cocycle ならば $\widetilde{e}f$ も parabolic 2-cocycle であることがわかる. 故に e の作用によって分解

$$H^2(\Gamma,V) = H^2(\Gamma,V)^+ \oplus H^2(\Gamma,V)^-, \quad H^2_P(\Gamma,V) = H^2_P(\Gamma,V)^+ \oplus H^2_P(\Gamma,V)^-$$

が得られる. ここに

$$H^2(\Gamma,V)^\pm = \{c \in H^2(\Gamma,V) \mid ec = \pm c\},\ H^2_P(\Gamma,V)^\pm = \{c \in H^2_P(\Gamma,V) \mid ec = \pm c\}$$

である. この分解は

$$f = \frac{1}{2}\big[(1+\widetilde{e})f + (1-\widetilde{e})f\big], \qquad f \in Z^2(\Gamma,V)$$

によって得られている.

$$\overline{\Gamma}^* = \{\gamma \in \mathrm{GL}(2,\mathcal{O}_F) \mid \det(\gamma) = \epsilon^n, n \in \mathbf{Z}\}, \qquad \Gamma^* = Z\overline{\Gamma}^*/Z$$

とおく. Γ^* は Γ と ν で生成され $[\Gamma^* : \Gamma] = 2$ である.

$$\mathrm{Res} : H^2(\Gamma^*,V) \longrightarrow H^2(\Gamma,V), \qquad T : H^2(\Gamma,V) \longrightarrow H^2(\Gamma^*,V)$$

を制限写像と transfer 写像とする.

命題 5.6. *(1)* $\mathrm{Res}(H^2(\Gamma^*,V)) = H^2(\Gamma,V)^+$.

(2) $T(H^2(\Gamma,V)^+) = H^2(\Gamma^*,V)$.
(3) $\mathrm{Ker}(T) = H^2(\Gamma,V)^-$.

証明は容易であるから省略する. 実際の計算には cohomology 群 $H^2(\Gamma^*,V)$ のほうが $H^2(\Gamma,V)$ よりも扱いやすい. δ の作用により $H^2(\Gamma^*,V)$ を

$$H^2(\Gamma^*,V) = H^2(\Gamma^*,V)^+ \oplus H^2(\Gamma^*,V)^-$$

と分解する.

(5.7) まで σ, ν, τ は Γ^* を生成すると仮定する. (この仮定は $\mathcal{O}_F = \mathbf{Z}+\mathbf{Z}\epsilon$ ならば充たされる.) $\mathcal{F}^*$ は三文字 $\widetilde{\sigma}$, $\widetilde{\nu}$, $\widetilde{\tau}$ の上の自由群とする. $\mathcal{F}^*$ から Γ^* への全射準同型 π^* を

$$\pi^*(\widetilde{\sigma}) = \sigma, \qquad \pi^*(\widetilde{\nu}) = \nu, \qquad \pi^*(\widetilde{\tau}) = \tau$$

によって定義し R^* を π^* の核とする. (2.8) により

$$H^2(\Gamma^*, V) \cong H^1(R^*, V)^{\Gamma^*}/\mathrm{Im}(H^1(\mathcal{F}^*, V)) \tag{5.5}$$

を得る.

δ は σ, ν と可換で $\delta\tau\delta^{-1} = \tau^{-1}$ をみたす. $\mathcal{F}^*$ の自己同型 $x \mapsto x_\delta$ を $(\widetilde{\sigma})_\delta = \widetilde{\sigma}$, $(\widetilde{\nu})_\delta = \widetilde{\nu}$, $(\widetilde{\tau})_\delta = \widetilde{\tau}^{-1}$ により定義できる.

$$\pi^*(x_\delta) = \delta\pi^*(x)\delta^{-1}, \qquad x \in \mathcal{F}^*$$

がわかる. このとき次の命題が成り立つ.

命題 5.7. $f \in Z^2(\Gamma^*, V)$ をとる. $\varphi \in H^1(R^*, V)^{\Gamma^*}$ は f に対応する元とする. δ の $Z^2(\Gamma^*, V)$ への作用を $\widetilde{d}$ と書く. このとき $\widetilde{df}$ に対応する $H^1(R^*, V)^{\Gamma^*}$ の元 ψ は

$$\psi(r) = \delta^{-1}\varphi(r_\delta), \qquad r \in R^*$$

で与えられる.

$\varphi \in H^1(R^*, V)^{\Gamma^*}$ とする. $\varphi_\delta \in H^1(R^*, V)^{\Gamma^*}$ を

$$\varphi_\delta(r) = \delta^{-1}\varphi(r_\delta) \tag{5.6}$$

で定義する. このとき $(\varphi_\delta)_\delta = \varphi$ であり, $H^1(R^*, V)^{\Gamma^*}$ は δ の作用で固有値が ± 1 の固有空間の直和に分解する.

$$H^1(R^*, V)^{\Gamma^*} = H^1(R^*, V)^{\Gamma^*,+} \oplus H^1(R^*, V)^{\Gamma^*,-}. \tag{5.7}$$

次節で計算例を与える前に, ここまでに得られた結果をまとめておこう. l_1 と l_2 は非負の偶数で $l_1 \geq l_2$ とする. $\Omega \in S_{l_1+2,l_2+2}(\Gamma)$ をとる. $L(s, \Omega)$ と $R(s, \Omega)$ を (3.4) と (3.5) で定義する. 函数等式は (3.7) により

$$R(s, \Omega) = (-1)^{(l_1+l_2)/2} R(l_1 + 2 - s, \Omega)$$

である. 整数 m について $L(m, \Omega)$ が critical value である条件は

$$\frac{l_1 - l_2}{2} + 1 \leq m \leq \frac{l_1 + l_2}{2} + 1 \tag{5.8}$$

である. 函数等式の中心にある critical value は $L(l_1/2 + 1, \Omega)$ で, これは $(l_1 + l_2)/2$ が奇数ならば消える. (4.21) により

$$R(m, \Omega) = (-1)^m i^{(l_1-l_2)/2} (2\pi)^{(l_2-l_1)/2} P_{m-1, m-1-(l_1-l_2)/2} \tag{5.9}$$

である．ここに $P_{s,t}$ は (4.16) で定義される周期積分である．$f = f(\Omega) \in Z^2_P(\Gamma, V)$ を (4.10) で定義される parabolic 2-cocycle とする．このとき

$$f(\sigma,\mu) = -\int_{i\epsilon^{-1}}^{i\epsilon}\int_0^{i\infty}\mathfrak{d}(\Omega)$$

であり $-P_{m-1,m-1-(l_1-l_2)/2}$ は $f(\sigma,\mu)$ における $\mathbf{e}_{l_1+2-m}\otimes\mathbf{e}'_{(l_1+l_2)/2+2-m}$ の係数に等しい．(5.4) で定義される作用素 $\widetilde{e}$ によって

$$f^+ = (1+\widetilde{e})f, \qquad f^- = (1-\widetilde{e})f$$

とおく．このとき $f^\pm \in Z^2_P(\Gamma, V)$ であり

$$f^+(\sigma,\mu) = (1+\nu)f(\sigma,\mu), \qquad f^-(\sigma,\mu) = (1-\nu)f(\sigma,\mu) \tag{5.10}$$

が成り立つ．(5.1) により

$$\begin{aligned}&\nu(\mathbf{e}_{l_1+2-m}\otimes\mathbf{e}'_{(l_1+l_2)/2+2-m})\\ &= N(\epsilon)^{m-1-l_1/2}\mathbf{e}_{l_1+2-m}\otimes\mathbf{e}'_{(l_1+l_2)/2+2-m}\end{aligned} \tag{5.11}$$

を得る．

$N(\epsilon) = -1$ と仮定する．(5.11) により $l_1/2$ が偶数ならば，$f^+(\sigma,\mu)$ は奇数の m に対して $R(m,\Omega)$ についての情報を含み $f^-(\sigma,\mu)$ は偶数の m に対して $R(m,\Omega)$ についての情報を含んでいることがわかる．$l_1/2$ が奇数ならば，$f^+(\sigma,\mu)$ は偶数の m に対して $R(m,\Omega)$ についての情報を含み $f^-(\sigma,\mu)$ は奇数の m に対して $R(m,\Omega)$ についての情報を含んでいる．

6. 計算例

この節では $F = \mathbf{Q}(\sqrt{5})$ と仮定する．F の基本単数は $\epsilon = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ である．Γ^* の元 σ, ν, τ は関係

$$\sigma^2 = 1, \tag{i*}$$

$$(\sigma\tau)^3 = 1, \tag{ii*}$$

$$(\sigma\nu)^2 = 1, \tag{iii*}$$

$$\tau\nu\tau\nu^{-1} = \nu\tau\nu^{-1}\tau, \tag{iv*}$$

(v*) $$\nu^2\tau\nu^{-2} = \tau\nu\tau\nu^{-1}$$

をみたす．$\mathcal{F}^*$ は三文字 $\widetilde{\sigma}, \widetilde{\nu}, \widetilde{\tau}$ の上の自由群とする．全射準同型 $\pi^* : \mathcal{F}^* \longrightarrow \Gamma^*$ を $\pi^*(\widetilde{\sigma}) = \sigma$, $\pi^*(\widetilde{\nu}) = \nu$, $\pi^*(\widetilde{\tau}) = \tau$ によって定義し R^* は π^* の核とする．$\Gamma^* = \mathcal{F}^*/R^*$ である．このとき R^* は五個の元

(ĩ) $$\widetilde{\sigma}^2,$$

(ĩi) $$(\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau})^3,$$

(ĩii) $$(\widetilde{\sigma}\widetilde{\nu})^2,$$

(ĩv) $$\widetilde{\tau}\widetilde{\nu}\widetilde{\tau}\widetilde{\nu}^{-1}(\widetilde{\nu}\widetilde{\tau}\widetilde{\nu}^{-1}\widetilde{\tau})^{-1},$$

(ṽ) $$\widetilde{\nu}^2\widetilde{\tau}\widetilde{\nu}^{-2}(\widetilde{\tau}\widetilde{\nu}\widetilde{\tau}\widetilde{\nu}^{-1})^{-1}$$

とその共役で生成された群 R_0 を含む．$R^* = R_0$ で (i*) ~ (v*) が基本関係であることがわかる．証明については [Y5], [Y6] を参照されたい．しかしこの事実は以下の計算には必要ではない．

P^* は上半三角行列で表わされる元からなる Γ^* の部分群とする．$\mathcal{F}_{P^*}$ は $\widetilde{\nu}$ と $\widetilde{\tau}$ で生成される $\mathcal{F}^*$ の部分群とする．このとき $\pi^*|\mathcal{F}_{P^*} : \mathcal{F}_{P^*} \longrightarrow P^*$ は全射である．R_{P^*} をこの準同型の核とする．R_{P^*} は (ĩv), (ṽ) とその共役で生成されていることがわかる．

各 $\gamma \in \Gamma^*$ に対して $\widetilde{\gamma} \in \mathcal{F}^*$ を $\pi^*(\widetilde{\gamma}) = \gamma$ と選ぶ．具体的計算のためには $\widetilde{\gamma}$ の選び方を決めることが必要である．$\eta = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$ とおく．$\eta = \nu\tau\nu^{-1}$ である．$\widetilde{\eta} = \widetilde{\nu}\widetilde{\tau}\widetilde{\nu}^{-1}$ と決めておく．まず $p \in P$ とする．$p = \mu^a\tau^b\eta^c$ と書くことができて，この表示は一意的である．$\widetilde{p} = \widetilde{\mu}^a\widetilde{\tau}^b\widetilde{\eta}^c$ とおく．次に $p \in P^*$ とする．$p \in P$ または $p = \nu p_1$, $p_1 \in P$ である．後の場合は $\widetilde{p} = \widetilde{\nu}\widetilde{p_1}$ とおく．

Δ を $P\backslash\Gamma$ の完全代表系とする．Δ は $P^*\backslash\Gamma^*$ の完全代表系にもなっている．$\sigma \in \Delta$ と仮定する．$\gamma \in \Gamma^*$ が与えられたとき $\gamma = p\delta$, $p \in P^*$, $\delta \in \Delta$ と書き $\widetilde{\gamma} = \widetilde{p}\widetilde{\delta}$ と定義することにする．Δ の取り方をはっきり定め，各 $\delta \in \Delta$ に対して $\widetilde{\delta}$ を定義すればよい．Δ を定めることは，各剰余類 $P\gamma$, $\gamma \in \Gamma$ から一つの元を選ぶことと同値である．$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく．

(1) $P\gamma = P$ の場合．単位元 1 を代表元としてとる．$\mathcal{F}$ の単位元を $\widetilde{1}$ とする．

(2) $c \in E_F$ の場合．$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & d \end{pmatrix}$ の形の元を代表元としてとる（一意的）．

$$\widetilde{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & d \end{pmatrix}} = \widetilde{\sigma}\widetilde{\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

とおく.

(3) $c \neq 0$ かつ $c \notin E_F$ の場合. $\mathcal{O}_F$ はノルムの絶対値について Euclid 環であることに注意する ([HW], Theorem 247, p. 213 参照). 即ち各 $x, y \in \mathcal{O}_F$, $x \neq 0$ に対し $q, r \in \mathcal{O}_F$ があって

$$y = qx + r, \qquad |N(r)| < |N(x)|$$

が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ua & ub \\ u^{-1}c & u^{-1}d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+tc & b+td \\ c & d \end{pmatrix}$$

を用いる. まず左から $\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}$, $u \in E_F$ を γ に掛けて c を

$$c \gg 0, \qquad 1 \leq c'/c < \epsilon^4$$

と正規化する. 次に左から $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathcal{O}_F$ を γ に掛けて $|N(a)| < |N(c)|$ と仮定できる. このような t の取り方を明確化することは簡単ではない. 言い換えれば $|N(a)| < |N(c)|$ をみたす γ は与えられた剰余類の中に複数個ある. a の優先順位を次のように決める. $a = \alpha + \beta\epsilon$, $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$ とおく.

1. $|\alpha| + |\beta|$ が最小. 2. $|\alpha|$ が最小. 3. $|\beta|$ が最小. 4. $\alpha \geq 0$. 5. $\beta \geq 0$.

$\delta \in \Delta$ に対し $\widetilde{\delta}$ を次のように定める. $\delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおき $|N(c)|$ についての帰納法で定義する. $|N(c)| = 0$ または 1 のときは (1) と (2) で決めている. Δ の取り方から $|N(a)| < |N(c)|$ である. $\sigma^{-1}\delta = p_1\delta_1$, $p_1 \in P$, $\delta_1 \in \Delta$, $\delta_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ とおく. $|N(c_1)| = |N(a)| < |N(c)|$ である. $\widetilde{\delta} = \widetilde{\sigma}\widetilde{p_1}\widetilde{\delta_1}$ と定義する.

$f \in Z^2_P(\Gamma, V)$ は正規化された parabolic 2-cocycle とする. $f^* = \widetilde{T}(f)$ とおく. このとき $f^* \in Z^2(\Gamma^*, V)$ であり $f^*|\Gamma = f^+$ である. parabolic 条件

$$f^*(p\gamma_1, \gamma_2) = pf^*(\gamma_1, \gamma_2), \qquad p \in P^*,\ \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma^* \tag{6.1}$$

は容易に確かめられる.

$$H^2(\Gamma^*, V) \cong H^1(R^*, V)^{\Gamma^*}/\mathrm{Im}(H^1(\mathcal{F}^*, V)) \tag{6.2}$$

が成り立っている. $\varphi \in H^1(R^*, V)^{\Gamma^*}$ を f^* に対応する元とする. φ は次のように得られていた. $a \in C^1(\mathcal{F}^*, V)$ があって

$$a(g_1g_2) = g_1a(g_2) + a(g_1) - f^*(\pi^*(g_1), \pi^*(g_2)), \qquad g_1, g_2 \in \mathcal{F}^* \tag{6.3}$$

となる．このとき $\varphi = a|R^*$ である．(6.3) を $a(g)$, $g \in \mathcal{F}^*$ の値を g を word とみたときの長さについて, 帰納的に決めていくのに使うことができる．このとき $a(\widetilde{\sigma}) = a(\widetilde{\nu}) = a(\widetilde{\tau}) = 0$ と取ることができる．(6.1) により $f^*(p,\gamma) = 0$, $p \in P^*$, $\gamma \in \Gamma^*$ が成り立つから $a|\mathcal{F}_{P^*} = 0$ となる．特に

$$\varphi|R_{P^*} = 0 \tag{6.4}$$

を得る．(2.13) で示したように f^* に coboundary を加えることにより

$$f^*(\gamma_1,\gamma_2) = -\varphi(\widetilde{\gamma}_1\widetilde{\gamma}_2(\widetilde{\gamma_1\gamma_2})^{-1}) \tag{6.5}$$

と仮定してよい．(6.4) を用いて f^* が parabolic 条件 (6.1) をみたすことが確かめられる．$\widetilde{\mu^{-1}\sigma} = \widetilde{\mu^{-1}}\widetilde{\sigma}$, $\widetilde{\mu^{-1}}\widetilde{\mu} \in R_{P^*}$ であるから

$$\begin{aligned} f^*(\sigma,\mu) &= -\varphi(\widetilde{\sigma}\widetilde{\mu}\widetilde{\sigma}^{-1}\widetilde{\mu}) = -\varphi(\widetilde{\sigma}\widetilde{\mu}\widetilde{\sigma}^{-2}\widetilde{\sigma}\widetilde{\mu}) = -\varphi(\widetilde{\sigma}\widetilde{\mu}\widetilde{\sigma}^{-2}(\widetilde{\sigma}\widetilde{\mu})^{-1}\widetilde{\sigma}\widetilde{\mu}\widetilde{\sigma}\widetilde{\mu}) \\ &= -\sigma\mu\varphi(\widetilde{\sigma}^{-2}) - \varphi(\widetilde{\sigma}\widetilde{\mu}\widetilde{\sigma}\widetilde{\mu}) = -\varphi((\widetilde{\sigma}\widetilde{\mu})^2) + \sigma\mu\varphi(\widetilde{\sigma}^2). \end{aligned}$$

となる．

$$\begin{aligned} &\varphi((\widetilde{\sigma}\widetilde{\mu})^2) = \varphi(\widetilde{\sigma}\widetilde{\nu}^2\widetilde{\sigma}\widetilde{\nu}^2) = \varphi(\widetilde{\sigma}\widetilde{\nu}\widetilde{\sigma}\widetilde{\nu}\widetilde{\nu}^{-1}\widetilde{\sigma}^{-1}\widetilde{\nu}\widetilde{\sigma}\widetilde{\nu}^2) \\ &= \varphi(\widetilde{\sigma}\widetilde{\nu}\widetilde{\sigma}\widetilde{\nu}) + \varphi(\widetilde{\nu}^{-1}\widetilde{\sigma}^{-2}\widetilde{\nu}) + \varphi(\widetilde{\nu}^{-1}\widetilde{\sigma}\widetilde{\nu}\widetilde{\sigma}\widetilde{\nu}^2) = (1+\nu^{-1})\varphi((\widetilde{\sigma}\widetilde{\nu})^2) - \nu^{-1}\varphi(\widetilde{\sigma}^2) \end{aligned}$$

であるから

$$f^*(\sigma,\mu) = -(1+\nu^{-1})\varphi((\widetilde{\sigma}\widetilde{\nu})^2) + (\sigma\mu+\nu^{-1})\varphi(\widetilde{\sigma}^2) \tag{6.6}$$

を得る．φ は $\mathcal{F}^*$ の元 $(\tilde{\mathrm{i}}) \sim (\tilde{\mathrm{v}})$ の上でとる値によって定まる．(6.4) により, φ は元 $(\tilde{\mathrm{iv}})$ と $(\tilde{\mathrm{v}})$ の上では値 0 をとる．$\sigma\varphi(\widetilde{\sigma}^2) = \varphi(\widetilde{\sigma}^2)$ に注意する．$h \in H^1(\mathcal{F}^*, V)$ を $h(\widetilde{\sigma}) = -\varphi(\widetilde{\sigma}^2)/2$, $h(\widetilde{\nu}) = 0$, $h(\widetilde{\tau}) = 0$ ととって $h|R^*$ を φ に加えることで $\varphi(\widetilde{\sigma}^2) = 0$ と仮定できる．この操作の後で φ は依然 (6.4) をみたしている．

φ に $h|R^*$ を加える手順を分析しよう．$S, T, U \in V$ に対し

$$h(\widetilde{\sigma}) = S, \qquad h(\widetilde{\tau}) = T, \qquad h(\widetilde{\nu}) = U$$

をみたす $h \in H^1(\mathcal{F}^*, V)$ がある．h が元 $(\tilde{\mathrm{iv}})$ と $(\tilde{\mathrm{v}})$ で消える条件はそれぞれ

$$(1+\tau\nu-\nu-\nu\tau\nu^{-1})T + (\tau-1)(1-\nu\tau\nu^{-1})U = 0, \tag{6.7}$$

$$(\nu^2-1-\tau\nu)T + (1+\nu-\nu^2\tau\nu^{-1}-\tau)U = 0 \tag{6.8}$$

である．また

$$h(\widetilde{\sigma}^2) = (1+\sigma)S \tag{6.9}$$

である.

$$A = \varphi((\widetilde{\sigma}\widetilde{\nu})^2), \qquad B = \varphi((\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau})^3)$$

とおく.

$$\sigma\nu A = A, \qquad \sigma\tau B = B \tag{6.10}$$

を注意しておく. 目的は A を決めることである.

次に Hecke 作用素を考察する. $g^* = T(\varpi)f^*$ とおく. ここに g^* は本質的に (4.28) で定義されるが詳しく書けば次の通り.

$$\Gamma^* \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \Gamma^* = \sqcup_{i=1}^{d} \Gamma^* \beta_i$$

を剰余類分解とする. 置換 j, $k \in S_d$ を (4.27) で定めて

$$g^*(\gamma_1, \gamma_2) = c \sum_{i=1}^{d} \beta_i^{-1} f^*(\beta_i \gamma_1 \beta_{j(i)}^{-1}, \beta_{j(i)} \gamma_2 \beta_{k(j(i))}^{-1})$$

である. $\psi \in H^1(R^*, V)^{\Gamma^*}$ を g^* に対応する元とする. 命題 2.4 により ψ は次の公式で与えられる.

$$\begin{aligned} &\psi(\widetilde{\gamma}_1\widetilde{\gamma}_2 \cdots \widetilde{\gamma}_m) \\ &= c \sum_{i=1}^{d} \beta_i^{-1} \varphi(\widetilde{\beta_i \gamma_1 \beta_{q_1(i)}^{-1}} \widetilde{\beta_{q_1(i)} \gamma_2 \beta_{q_2(i)}^{-1}} \cdots \widetilde{\beta_{q_{m-1}(i)} \gamma_m \beta_{q_m(i)}^{-1}}). \end{aligned} \tag{6.11}$$

ここに $\gamma_j = \sigma$ または $\gamma_j \in P^*$ で $\gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_m = 1$ である. (命題 2.4 において $G \mapsto \Gamma^*$, $M \mapsto V$, $R \mapsto R^*$, $g_j \mapsto \gamma_j$ とする. 他の記号は同じである.)

例 6.1. $T(2)$ を考えよう.

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\beta_4 = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon^2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \beta_5 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と取れる. (6.11) により

$$\psi((\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau})^3) = c(\beta_3^{-1} Z_3 + \beta_4^{-1} Z_4)$$

を得る. ここに

$$Z_3 = \varphi((\widetilde{\begin{pmatrix} \epsilon & -\epsilon^2 \\ 2 & -\epsilon^2 \end{pmatrix}} \widetilde{\tau})^3), \qquad Z_4 = \varphi((\widetilde{\begin{pmatrix} \epsilon^2 & -\epsilon^2 \\ 2 & -\epsilon \end{pmatrix}})^3) \tag{6.12}$$

である．$\gamma \in \Gamma^*$ に対する $\widetilde{\gamma}$ の取り方から

$$\widetilde{\begin{pmatrix} \epsilon & -\epsilon^2 \\ 2 & -\epsilon^2 \end{pmatrix}} = \widetilde{\sigma} \widetilde{\begin{pmatrix} \epsilon^{-1} & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}} \widetilde{\begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{-2} \widetilde{\sigma} \widetilde{\begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{-1}$$

となる．よって (6.4) を用いて

$$Z_3 = \varphi((\widetilde{\sigma} \widetilde{\begin{pmatrix} \epsilon^{-1} & -2 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}} \widetilde{\sigma} \widetilde{\begin{pmatrix} 1 & -\epsilon^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}})^3)$$

を得る．同様にして

$$Z_4 = \varphi((\widetilde{\sigma} \widetilde{\begin{pmatrix} \epsilon^{-2} & -2 \\ 0 & \epsilon^2 \end{pmatrix}} \widetilde{\sigma} \widetilde{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}})^3)$$

がわかる．

P^* と σ は Γ^* を生成するから，R^* の任意の元は $(\tilde{\text{i}})$, $(\widetilde{\text{iv}})$, $(\tilde{\text{v}})$ を用い $\widetilde{\sigma}$ による共役をとることで

$$r = \widetilde{\sigma}\widetilde{p}_1\widetilde{\sigma}\widetilde{p}_2 \cdots \widetilde{\sigma}\widetilde{p}_m$$

と書ける．ここに $p_i \in P^*$, $1 \leq i \leq m$, $\sigma p_1 \sigma p_2 \cdots \sigma p_m = 1$ である．このような元を m 項関係とよぶ．以下 (6.13a) から (6.18) までの公式は容易に証明される．

$$\varphi((\widetilde{\sigma}\widetilde{\nu}^n)^2) = (1 + \nu^{-1} + \cdots + \nu^{1-n})A, \qquad n \geq 1, \tag{6.13a}$$

$$\varphi((\widetilde{\sigma}\widetilde{\nu}^{-n})^2) = -(\nu + \nu^2 + \cdots + \nu^n)A, \qquad n \geq 1, \tag{6.13b}$$

$t \in E_F$ に対して

$$B(t) = \varphi(\widetilde{\sigma} \widetilde{\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \widetilde{\sigma} \widetilde{\begin{pmatrix} 1 & t^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \widetilde{\sigma} \widetilde{\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \widetilde{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}})$$

とおく．このとき $B(1) = B$ であり，

$$B(-t) = -\sigma \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} B(t) - \begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \varphi((\widetilde{\sigma} \widetilde{\begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}})^2), \tag{6.14}$$

$$\begin{aligned} B(\epsilon t) =& \nu^{-1} B(t) \\ &+ \left[1 + \sigma \begin{pmatrix} 1 & \epsilon t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma \begin{pmatrix} 1 & \epsilon^{-1} t^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \sigma \begin{pmatrix} 1 & \epsilon t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma \right] A, \end{aligned} \tag{6.15}$$

$$B(t) = \sigma \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B(t^{-1}) + \varphi((\widetilde{\sigma}\widetilde{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}})^2) \tag{6.16}$$

が成り立つ．この公式により $B(t)$ を A と B で表すことができる．$B(t)$ を用いて三項関係 r に対する公式を得る．

$$\begin{aligned} &\varphi(\widetilde{\sigma}\widetilde{\begin{pmatrix} u_1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}\widetilde{\sigma}\widetilde{\begin{pmatrix} u_2 & x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}\widetilde{\sigma}\widetilde{\begin{pmatrix} u_3 & x_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}) \\ &= \begin{pmatrix} u_1^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B(u_1^{-1}x_1) + \varphi((\widetilde{\sigma}\widetilde{\begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}})^2) \\ &+ \begin{pmatrix} u_3^{-1} & -u_3^{-1}x_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sigma\varphi((\widetilde{\sigma}\widetilde{\begin{pmatrix} u_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}})^2). \end{aligned} \tag{6.17}$$

$r \in R^*$ は m 項関係, $m \geq 4$ とする．$p_i = \begin{pmatrix} u_i & x_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $u_i \in E_F$, $x_i \in \mathcal{O}_F$, $1 \leq i \leq m$ と書ける．ある i について $x_i = 0$ ならば $\varphi(r)$ は $(m-2)$ 項関係に帰着する．ある i について $x_i \in E_F$ ならば $\varphi(r)$ は $(m-1)$ 項関係に帰着する．例えば $x_1 \in E_F$, $m \geq 4$ のとき

$$\begin{aligned} &\varphi(\widetilde{\sigma}\widetilde{\begin{pmatrix} u_1 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}\widetilde{\sigma}\widetilde{\begin{pmatrix} u_2 & x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}\widetilde{\sigma}\widetilde{\begin{pmatrix} u_3 & x_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}\widetilde{\sigma}\cdots\widetilde{\sigma}\widetilde{\begin{pmatrix} u_m & x_m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}) \\ &= \begin{pmatrix} u_1^{-1}u^{-1} & -u_1^{-1} \\ 0 & u \end{pmatrix} \varphi(\widetilde{\sigma}\widetilde{\begin{pmatrix} 1 & -u^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}\widetilde{\begin{pmatrix} u_2 & x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}\widetilde{\sigma}\widetilde{\begin{pmatrix} u_3 & x_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}\widetilde{\sigma} \\ &\qquad \cdots\widetilde{\sigma}\widetilde{\begin{pmatrix} u_m & x_m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}\widetilde{\begin{pmatrix} u_1^{-1}u^{-1} & -u_1^{-1} \\ 0 & u \end{pmatrix}}) \\ &+ \begin{pmatrix} u_1^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B(u) + \varphi((\widetilde{\sigma}\widetilde{\begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}})^2) \end{aligned} \tag{6.18}$$

が成り立つ．ここに $u = u_1^{-1}x_1$ である．

実際の計算には分解 (5.7) を使うのが便利である．$\varphi \in H^1(R^*, V)^{\Gamma^*,+}$ と仮定する．このとき

$$\begin{aligned} &-\varphi((\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau})^3) = \varphi(\widetilde{\tau}^{-1}\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau}^{-1}\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau}^{-1}\widetilde{\sigma}) = \tau^{-1}\varphi((\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau}^{-1})^3) \\ &= \tau^{-1}\varphi(((\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau})^3)_\delta) = \tau^{-1}\delta\varphi((\widetilde{\sigma}\widetilde{\tau})^3) \end{aligned}$$

であるから

$$(\delta\tau + 1)B = 0$$

を得る．同様にして

$$(\delta - 1)A = 0$$

がわかる.

計算機を用いて次の事実が確かめられる.

実験事実 6.2. $0 \leq l_2 \leq l_1 \leq 20$ とする. φ が δ の作用でプラス空間にあり (6.4) をみたすという状況を保ちつつ, $h|R^*$, $h \in H^1(\mathcal{F}^*, V)$ を φ に加えて $B = 0$ とできる.

よって問題は $A = \varphi((\widetilde{\sigma}\widetilde{\nu})^2)$ に対する制約条件を見出すことである. 自明な制約条件 $(\sigma\nu - 1)A = 0$ に注意する. $x = \begin{pmatrix} \epsilon & -\epsilon^2 \\ 2 & -\epsilon^2 \end{pmatrix} \tau$ とおき (6.12) で定義される Z_3 を考える. 明らかに $xZ_3 = Z_3$ が成り立つ. 公式 (6.13a) ~ (6.18) を使うと Z_3 は A で表されることがわかる. よって $xZ_3 = Z_3$ は A についての制約条件であるが, この条件を同じ記号 $xZ_3 = Z_3$ で表す. そこで

$$Z_A^+ = \{\mathbf{v} \in V \mid (\sigma\nu - 1)\mathbf{v} = 0,\ (\delta - 1)\mathbf{v} = 0,\ xZ_3 = Z_3\} \tag{6.19}$$

とおく.

線型写像

$$\zeta^+ : Z_A^+ \longrightarrow \mathbf{C}^{l_2+1} \tag{6.20}$$

を次のように定義する. $\mathbf{v} \in Z_A^+$ をとる. $(l_1 - l_2)/2 + 1 \leq m \leq (l_1 + l_2)/2 + 1$ に対して, $\mathbf{e}_{l_1+2-m} \otimes \mathbf{e}'_{(l_1+l_2)/2+2-m}$ の $(1 + \nu^{-1})\mathbf{v}$ における係数を $\zeta^+(\mathbf{v})$ の $(l_1 + l_2)/2 + 2 - m$ 番目の係数とする. (この意味は (6.6) を参照.)

例 6.3. $l_1 = 8$, $l_2 = 4$ ととる. このとき $\dim S_{10,6}(\Gamma) = 1$ である. $\zeta^+(Z_A^+)$ は一次元であり ${}^t(4, 0, 1, 0, 4)$ のスカラー倍からなることがわかる. よって

$$R(7, \Omega)/R(5, \Omega) = 4, \qquad \Omega \in S_{10,6}(\Gamma).$$

を得る.

例 6.4. 例 6.3 と同様にして次の値を得る.

$$R(9, \Omega)/R(7, \Omega) = 6, \qquad \Omega \in S_{14,6}(\Gamma).$$

$$R(6, \Omega)/R(4, \Omega) = \frac{25}{6}, \qquad \Omega \in S_{8,8}(\Gamma).$$

$$R(8, \Omega)/R(6, \Omega) = 7, \qquad \Omega \in S_{12,8}(\Gamma).$$

$$R(10, \Omega)/R(8, \Omega) = \frac{720}{11}, \qquad \Omega \in S_{12,10}(\Gamma).$$

この例に現れるカスプ形式の空間は全て一次元である.

$\dim S_{l_1+2,l_2+2}(\Gamma) > 1$ の場合を扱うには Hecke 作用素を使う必要がある. このために $H^1(\mathcal{F}^*, V)$ から Z_A^+ への寄与を考える. $h \in H^1(\mathcal{F}^*, V)$ をとり

$$h(\widetilde{\sigma}) = S, \qquad h(\widetilde{\nu}) = U, \qquad h(\widetilde{\tau}) = T$$

とおく. $h|R^*$ が元 $(\tilde{\text{i}})$, $(\tilde{\text{ii}})$, $(\tilde{\text{iv}})$, $(\tilde{\text{v}})$ で消えることを要求する. このための条件は

$$(6.21) \qquad (\sigma+1)S=0,$$

$$(6.22) \qquad \{(\sigma\tau)^2+\sigma\tau+1\}(\sigma T+S)=0$$

と (6.7), (6.8) である.

$$h((\widetilde{\sigma}\widetilde{\nu})^2)=(\sigma\nu+1)(\sigma U+S)$$

である. 条件

$$(6.23) \qquad (\delta-1)(\sigma\nu+1)(\sigma U+S)=0$$

を課す. B_A^+ は S, T, U が関係 (6.7), (6.8), (6.21), (6.22), (6.23) をみたす V のベクトルを走ったとき $(\sigma\nu+1)(\sigma U+S)$ で生成される V の部分空間とする. $B_A^+\subset Z_A^+$ であり, 第 5 節の結果から

$$(6.24) \qquad \zeta^+(B_A^+)=\{0\} \quad \text{if } l_1\neq l_2, \qquad \dim\zeta^+(B_A^+)\leq 1 \quad \text{if } l_1=l_2$$

がわかる. 計算機を用いて次の事実が確かめられる.

実験事実 6.5. $0\leq l_2\leq l_1\leq 20$ とする. このとき $\dim S_{l_1+2,l_2+1}(\Gamma)=\dim Z_A^+/B_A^+$.

この事実は $A=\varphi((\widetilde{\sigma}\widetilde{\nu})^2)$ に課せられた制約条件が十分であることを意味している.

例 6.6. $l_1=12$, $l_2=8$ ととる. $\dim S_{14,10}(\Gamma)=2$ である. (6.11) を用いて $T(2)$ の Z_A^+/B_A^+ への作用を計算することにより固有値は $-2560\pm 960\sqrt{106}$ であることがわかる. 固有値 $-2560+960\sqrt{106}$ に属する Z_A^+/B_A^+ の固有ベクトルをとり ζ^+ で写せば, $0\neq\Omega\in S_{14,10}(\Gamma)$, $\Omega|T(2)=(-2560+960\sqrt{106})\Omega$ に対し

$$R(11,\Omega)/R(7,\Omega)=1616-76\sqrt{106}, \qquad R(9,\Omega)/R(7,\Omega)=\frac{58}{3}-\frac{5}{6}\sqrt{106}$$

を得る. $0\neq\Omega\in S_{14,10}(\Gamma)$, $\Omega|T(2)=(-2560-960\sqrt{106})\Omega$ に対しては

$$R(11,\Omega)/R(7,\Omega)=1616+76\sqrt{106}, \qquad R(9,\Omega)/R(7,\Omega)=\frac{58}{3}+\frac{5}{6}\sqrt{106}$$

を得る. 本稿では解説しないが, minus part の元 f^- を用いて計算すると $0\neq\Omega\in S_{14,10}(\Gamma)$, $\Omega|T(2)=(-2560+960\sqrt{106})\Omega$ に対しては

$$R(10,\Omega)/R(8,\Omega)=50-\sqrt{106},$$

$0 \neq \Omega \in S_{14,10}(\Gamma)$, $\Omega|T(2) = (-2560 - 960\sqrt{106})\Omega$ に対しては

$$R(10, \Omega)/R(8, \Omega) = 50 + \sqrt{106}$$

を得る．$\Omega \in S_{14,10}(\Gamma)$ は Hecke 作用素の共通固有函数とする．(6.8) により $L(m, \Omega)$ が critical value である範囲は $3 \leq m \leq 11$ である．函数等式は $L(s, \Omega) = L(14 - s, \Omega)$ であるから, critical line の右側にある全ての critical value を扱ったことになる．

例 6.7. $l_1 = l_2 = 18$ ととる．$\dim S_{20,20}(\Gamma) = 7$ である．(6.11) を用いて $T(2)$ の Z_A^+/B_A^+ への作用を計算すると $T(2)$ の固有多項式は

$$\begin{aligned}&(X - 97280)^2(X + 840640)(X^4 - 1286780X^3 + 19006483200X^2\\&+ 27181090390835200X - 22979876427231395840000)\end{aligned}$$

であることがわかる．ここに四次の既約因子は $S_{20}(\Gamma_0(5), (\frac{}{5}))$ からの base change 部分に対応する．$X + 840640$ は $S_{20}(\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}))$ からの base change 部分に対応する．因子 $(X - 97280)^2$ は非 base change 部分に対応する．$\Omega \in \dim S_{20,20}(\Gamma)$ は非 base change 部分に属する Hecke 作用素の共通固有函数とする．plus part について計算して

$$R(18, \Omega)/R(10, \Omega) = 39355680000, \qquad R(16, \Omega)/R(10, \Omega) = 33163650,$$
$$R(14, \Omega)/R(10, \Omega) = \frac{1266460}{27}, \qquad R(12, \Omega)/R(10, \Omega) = \frac{26075}{216}.$$

を得る．minus part について計算して

$$R(17, \Omega)/R(11, \Omega) = \frac{111006792000}{803}, \qquad R(15, \Omega)/R(11, \Omega) = \frac{54618434}{365},$$
$$R(13, \Omega)/R(11, \Omega) = \frac{453159}{1606}.$$

を得る．non base change 部分は二次元で本質的に二つの Hecke 作用素の共通固有函数があるが, これらの比は同じである．この事実については [Y6], p. 424 を参照されたい．

7. 補足

(1) $L(s, \Omega)$ の特殊値の計算法として, 志村 [Sh3] に始まる Rankin-Selberg 積分と微分作用素を用いる方法がある．これと本稿で述べた cohomological な計算法の比較については [Y6], 第八節を参照されたい．
(2) Ω から得られた 2-cocycle の成分を周期と呼ぶ．$L(s, \Omega)$ の特殊値と関係しない周期について本稿の方法で若干の情報が得られる．[Y6], 第九節を参照されたい．

References

[B] D. Blasius, Hilbert modular forms and the Ramanujan conjecture, Noncommutative geometry and number theory, 35–56, Aspects Math., 37, Vieweg, 2006.

[BW] A. Borel and N. Wallach, Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups, Ann. Math. Studies 94, Princeton University Press, 1980.

[CE] H. Cartan and S. Eilenberg, Homological algebra, Princeton University Press, 1956.

[DG] K. Doi and K. Goto, On the L-series associated with modular forms, Memoirs of Institute of Science and Engineering, Ritsumeikan Univ. 52 (1993), 1–19 (in Japanese).

[DHI] K. Doi, H. Hida and H. Ishii, Discriminant of Hecke fields and twisted adjoint L-values for $GL(2)$, Inv. Math. 134 (1998), 547–577.

[DI] K. Doi and H. Ishii, Hilbert modular L-values and discriminant of Hecke's fields, Memoirs of Institute of Science and Engineering, Ritsumeikan Univ. 53 (1994), 1–12.

[E] B. Eckman, Cohomology of groups and tranfer, Ann. of Math. 58 (1953), 481–493.

[Ha] G. Harder, Eisenstein cohomology of arithmetic groups. The case GL_2, Inv. Math. 89 (1987), 37–118.

[Hi1] H. Hida, On abelian varieties with complex multiplication as factors of the abelian variety attached to Hilbert modular forms, Japanese J. Math. 5 (1979), 157–208.

[Hi2] H. Hida, p-ordinary cohomology groups for SL(2) over number fields, Duke Math. J. 69 (1993), 259–314.

[Hi3] H. Hida, On the critical values of L-functions of GL(2) and GL(2) $\times$ GL(2), Duke Math. J. 74 (1994), 431–529.

[HW] G. H. Hardy and E. M. Wright, An introduction to the theory of numbers, Oxford University Press, fifth edition, 1979.

[JL] H. Jacquet and R. P. Langlands, Automorphic forms on $GL(2)$, Lecture notes in mathematics 114, Springer-Verlag, 1970.

[K] A. G. Kurosh, The theory of groups, English edition, two volumes, Chelsea, 1955, 1956.

[KS] M. Kuga and G. Shimura, On vector differential forms attached to automorphic forms, J. Math. Soc. Japan, 12 (1960), 258–270 (= Collected Papers of Goro Shimura I, [60a]).

[Mac] A. M. Macbeath, Groups of homeomorphisms of a simply connected space, Ann. of Math. 79 (1964), 473–488.

[Man] Y. I. Manin, Periods of parabolic forms and p-adic Hecke series, Math. USSR Sbornik 21 (1973), 371–393.

[MM] Y. Matsushima and S. Murakami, On vector valued harmonic forms and automorphic forms on symmetic Riemannian manifolds, Ann. of Math. 78 (1963), 365–416.

[MS] Y. Matsushima and G. Shimura, On the cohomology groups attached to certain vector valued differential forms on the product of the upper half plane, Ann. of Math. 78 (1963), 417–449 (= Collected Papers of Goro Shimura I, [63c]).

[PARI2] PARI/GP, version `2.3.4`, Bordeaux, 2008, http://pari.math.u-bordeaux.fr/.

[Sc] O. Schreier, Die Untergruppen der freie Gruppen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 5 (1927), 161–183.

[Se1] J-P. Serre, Corps locaux, deuxième édition, Hermann, 1968.

[Se2] J-P. Serre, Cohomologie des groupes discrets, Ann. of Math. Studies 70 (1971), 77–169 (=Œuvre II, 88).

[Shi] H. Shimizu, On discontinuous groups operating on the product of the upper half planes, Ann. of Math. 77 (1963), 33–71.

[Sh1] G. Shimura, Sur les intégrales attachées aux formes automorphes, J. Math. Soc. Japan 11 (1959), 291–311 (= Collected Papers I, [59c]).

[Sh2] G. Shimura, Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions, Iwanami Shoten and Princeton University Press, 1971.

[Sh3] G. Shimura, The special values of the zeta functions associated with cusp forms, Comm. pure and applied Math. 29 (1976), 783–804 (=Collected Papers II, [76b]).

[Sh4] G. Shimura, The special values of the zeta functions associated with Hilbert modular forms, Duke Math. J. 45 (1978), 637–679 (=Collected Papers III, [78c]).

[Sh5] G. Shimura, The critical values of certain Dirichlet series attached to Hilbert modular forms, Duke Math. J. 63 (1991), 557–613 (=Collected Papers IV, [91]).

[Sh6] G. Shimura, Eisenstein series and zeta functions on symplectic groups, Inv. Math. 119 (1995), 539–584 (=Collected Papers IV, [95a]).

[Sh7] G. Shimura, Arithmeticity in the theory of automorphic forms, Math. Surveys and Monogr. vol. 82, American Mathematical Society, 2000.

[Si1] C. L. Siegel, Discontinuous groups, Ann. of Math. 44(1943), 674–689 (= Gesammelte Abhandlungen III, No. 43).

[Si2] C. L. Siegel, Lectures on advanced analytic number theory, Tata Institute, 1961.

[Su] M. Suzuki, Group Theory I, Grundlehren der mathematischen Wissenshaften 247, Springer Verlag, 1982.

[Sw] R. W. Swan, Generators and relations for certain special linear groups, Advances in Math. 6 (1971), 1–77.

[V] L. N. Vaseršteín, On the group SL_2 over Dedekind rings of arithmetic type, Math. USSR Sbornik 18 (1972), 321–332.

[Y1] H. Yoshida, On the zeta functions of Shimura varieties and periods of Hilbert modular forms, Duke Math. J. 75 (1994), 121–191.

[Y2] H. Yoshida, On a conjecture of Shimura concerning periods of Hilbert modular forms, Amer. J. Math. 117 (1995), 1019–1038.

[Y3] H. Yoshida, Absolute CM-periods, Math. Surveys and Monogr. vol. 106, American Mathematical Society, 2003.

[Y4] H. Yoshida, Cohomology and L-values, nt/1012.4573.

[Y5] H. Yoshida, On some problems concerning discrete subgroups, Commentarii Mathematici Univ. Sancti Pauli 60 (2011), 231–253.

[Y6] H. Yoshida, Cohomology and L-values, Kyoto J. Math., 52 (2012), 369–432.

E-mail: hyoshida111@gmail.com

例 6.3 を計算する PARI プログラム

```
{f(i,j,l,a,b,c,d)=local(u=max(j-i,0),t=min(l+1-i,j-1),x);
x=sum(s=u,t,binomial(l+1-i,s)*binomial(i-1,j-1-s)*
a^(l+1-i-s)*b^s*c^(s+i-j)*d^(j-1-s));x}
{mm(i,n)=ceil(i/n)}
{nn(i,n)=i-(mm(i,n)-1)*n}
{rr(g)=local(x,a,b,c,d,ca,cb,cc,cd,m,n);a=g[1,1];ca=conj(a);b=
g[1,2];cb=conj(b);c=g[2,1];cc=conj(c);d=g[2,2];cd=conj(d);m=
l1+1;n=l2+1;x=matrix(m*n,m*n,i,j,f(mm(i,n),mm(j,n),l1,a,b,c,d)*
f(nn(i,n),nn(j,n),l2,ca,cb,cc,cd));x}
{r(g)=local(x,a,b,c,d,ca,cb,cc,cd,m,n);a=g[1,1];ca=conj(a);b=
g[1,2];cb=conj(b);c=g[2,1];cc=conj(c);d=g[2,2];cd=conj(d);y=
(a*d-b*c)^(l1/2)*(ca*cd-cb*cc)^(l2/2);m=l1+1;n=l2+1;x=matrix(m*
n,m*n,i,j,f(mm(i,n),mm(j,n),l1,a,b,c,d)*f(nn(i,n),nn(j,n),l2,ca,cb,cc,cd));
x=if(y,x*(1/y),rr([0,0;0,0]));x}
{add(x,y)=local(a=length(x[1,]),b=length(y[1,]),c=length(x[,1]),z);z=
matrix(c,a+b);for(i=1,c,for(j=1,a,z[i,j]=x[i,j]));for(i=1,c,for(j=
a+1,a+b,z[i,j]=y[i,j-a]));z}
{add3(x,y,z)=add(add(x,y),z)}
{add4(x,y,z,w)=add(add3(x,y,z),w)}
{add5(x,y,z,w,t)=add(add4(x,y,z,w),t)}
{vadd(x,y)=mattranspose(add(mattranspose(x),mattranspose(y)))}
{dia(x,y)=local(a=length(x[1,]),b=length(y[1,]),z);z=matrix(a+
b,a+b);for(i=1,a,for(j=1,a,z[i,j]=x[i,j]));for(i=1,a,for(j=
a+1,a+b,z[i,j]=0));for(i=a+1,a+b,for(j=1,a,z[i,j]=0));for(i=
a+1,a+b,for(j=a+1,a+b,z[i,j]=y[i-a,j-a]));z}
{vc(x)=local(a=length(x[1,]),z);z=matrix(4,a);for(i=1,2,for(j=
1,a,z[i,j]=x[i+2,j]));for(i=3,4,for(j=1,a,z[i,j]=x[i-2,j]));z}
{ep(u)=local(n,z);e=quadgen(5);for(i=-40,40,if(u-(1-2*i+
4*floor(i/2))*(e^(floor(i/2)))==0,n=i;break));z=[1-2*n+4*
floor(n/2),floor(n/2)];z}
{max4(a,b,c,d)=max(max(max(a,b),c),d)}
{clean(p)=local(a=length(p[1,]),q);q=[0,0;0,0;0,0;0,0];
for(i=1,a,q=if(max4(abs(p[1,i]),abs(p[2,i]),abs(p[3,i]),abs(p[4,i])),
add(q,[p[1,i];p[2,i];p[3,i];p[4,i]]),q));q}
{a2(n)=local(k,k1,m,z,z1,z2,ze,w);e=quadgen(5);k=abs(n);k1=
k;if(n,k=k1,k=1);m=(sign(n)+1)/2;z=matrix(2,2*k);ze=
matrix(2,2*k);for(i=1,2,for(j=1,2*k,ze[i,j]=0));for(j=1,k,z[1,2*
j-1]=e^(-sign(n)*(j-m)));for(j=1,k,z[1,2*j]=0);for(j=
```

```
1,k,z[2,2*j-1]=0);for(j=1,k,z[2,2*j]=1);z1=vadd(z,ze);z2=
vadd(ze,z);if(m,z=z1,z=z2);if(n,w=z,w=[0,0;0,0;0,0;0,0]);w}
{b3(d,n)=local(w,w1,z,z1,ze,s,test,x);e=quadgen(5);ze=matrix(2,2);
for(i=1,2,for(j=1,2,ze[i,j]=0));z1=[e^(-n),0;0,1];s=[0,1;-1,0];w1=
s*[1,0;0,e^(-n)];z=vadd(z1,ze);w=vadd(ze,w1);test=sign(d)+1;x=
if(test,z,w);x}
{a3(d,n)=local(m,z,ze,zze,z1,z2,zz,w,w1,w2,nu,s,s1,s2,test1,test2,uu);
e=quadgen(5);m=abs(n);ze=[0,0;0,0];zze=[0,0;0,0;0,0;0,0];z1=
zze;nu=[e,0;0,1];s=[0,1;-1,0];
for(i=0,m-1,z1=add4(dia(nu^(-1),nu^(-1))*z1,vadd([1,0;0,1],ze),vadd(s*
[1,e^(i+1);0,1]*s*[1,e^(-i-1);0,1],ze),vadd(ze,s*[1,e^(i+1);0,1]*
s)));uu=s*[1,e^(-m);0,1];z2=add(dia(uu,uu)*z1,a2(-2*m));test1=
sign(n)+1;if(test1,z=z1,z=z2);if(n,z=z,z=zze);s1=s*
[e^n,0;0,e^(-n)];w1=dia(s1,s1)*z;w1=vc(w1);s2=[e^(-n),0;0,e^n];w2=
dia(s2,s2)*a2(-2*n);w2=vc(w2);w=add(w1,w2);test2=sign(d)+
1;if(test2,zz=z,zz=w);zz}
{nor(p)=local(m=length(p[1,])/2,q);q=matrix(2,2*m);for(j=
1,m,q[1,2*j-1]=p[1,2*j-1]/p[2,2*j]);for(j=1,m,q[1,2*j]=
p[1,2*j]/p[2,2*j]);for(j=1,m,q[2,2*j]=1);q}
{ra3(p)=local(a,b,c,s,t1,t2,u1,u2,u3,x1,x2,x3,z1,z2,z3);s=[0,1;-1,0];
p=nor(p);u1=p[1,1];u2=p[1,3];u3=p[1,5];x1=p[1,2];x2=p[1,4];x3=
p[1,6];t1=[u1^(-1),0;0,1];a=ep(x1/u1);b=ep(u1);c=ep(u2);z1=
dia(t1,t1)*a3(a[1],a[2]);z2=a2(b[2]);t2=[1,-x3/u3;0,1]*[u3^(-1),0;0,1]*
s;z3=dia(t2,t2)*a2(c[2]);z=add3(z1,z2,z3);z}
{rb3(p)=local(a,s,t1,u1,u2,u3,x1,x2,x3);s=[0,1;-1,0];p=nor(p);u1=
p[1,1];u2=p[1,3];u3=p[1,5];x1=p[1,2];x2=p[1,4];x3=p[1,6];t1=
[u1^(-1),0;0,1];a=ep(x1/u1);z=dia(t1,t1)*b3(a[1],a[2]);z}
{sel0(v)=local(a=length(v),k);k=0;for(i=1,a,if(v[i]==0,k=
i;break));k}
{sel1(v)=local(a=length(v),k);k=0;e=quadgen(5);
for(i=1,a,if(abs(norm(v[i]))==1,k=i;break));k}
{cut(k,p)=local(m=length(p[1,])/2,q);q=matrix(2,2*m);for(i=
1,2,for(j=1,2*(m-k+1),q[i,j]=p[i,2*k+j-2]));for(i=1,2,for(j=
2*(m-k+1)+1,2*m,q[i,j]=p[i,j-2*m+2*k-2]));q}
{res(k,p)=local(s,z);s=[0,1;-1,0];z=[1,0;0,1];for(i=1,k-1,z=
z*s*[p[1,2*i-1],p[1,2*i];p[2,2*i-1],p[2,2*i]]);z}
{ra4e(p)=local(adj,s,u,uu,v,v2,t1,t2,x,k0,k1,q,qq,w1,w2,w3,z,z1,z2,z3);
e=quadgen(5);p=nor(p);x=vector(4);for(j=1,4,x[j]=p[1,2*
j]);k0=sel1(x);k1=max(1,k0);q=cut(k1,p);adj=res(k1,p);u=
vector(4);for(j=1,4,u[j]=q[1,2*j-1]);for(j=1,4,x[j]=q[1,2*
j]);uu=x[1]/u[1];v=ep(uu);t1=[u[1]^(-1),0;0,1];z1=dia(t1,t1)*
```

$a3(v[1],v[2]);v2=ep(u[1]);z2=a2(v2[2]);t2=[1/u[1],0;0,1]*[1/uu,0;0,uu]*$
$[1,-uu;0,1];w1=[1,-1/uu;0,1]*[u[2],x[2];0,1];w2=[u[3],x[3];0,1];w3=$
$[u[4],x[4];0,1]*[1/u[1],0;0,1]*[1/uu,0;0,uu]*[1,-uu;0,1];qq=add3(w1,w2,w3);$
$z3=dia(t2,t2)*ra3(qq);z=add3(z1,z2,z3);z=dia(adj,adj)*z;z=$
$clean(z);z\}$
$\{ra4n(p)=local(k0,k1,q,adj,u,v1,v2,x,t,z,z1,z2,z3);e=quadgen(5);p=$
$nor(p);x=vector(4);for(j=1,4,x[j]=p[1,2*j]);k0=sel0(x);k1=$
$max(1,k0);q=cut(k1,p);adj=res(k1,p);u=vector(4);for(j=1,4,u[j]=$
$q[1,2*j-1]);for(j=1,4,x[j]=q[1,2*j]);v1=ep(u[1]);z1=a2(v1[2]);t=$
$[u[1]\hat{}(-1),0;0,1]*[u[2],x[2];0,1];v2=ep(u[3]);z2=dia(t,t)*a2(v2[2]);z=$
$add(z1,z2);z=dia(adj,adj)*z;z=clean(z);z\}$
$\{ra4(p)=local(k0,k1,x,z,z1,z2);p=nor(p);x=vector(4);for(j=1,4,x[j]=$
$p[1,2*j]);k0=sel0(x);k1=sel1(x);z1=if(k1,ra4e(p),0);z2=if(k0,ra4n(p),0);$
$z=if(k1,z1,z2);z\}$
$\{rb4(p)=local(adj,s,u,uu,v,v2,t1,t2,x,k0,k1,q,qq,w1,w2,w3,z,z1,z2,z3);e=$
$quadgen(5);p=nor(p);x=vector(4);for(j=1,4,x[j]=p[1,2*j]);k0=$
$sel1(x);k1=max(1,k0);q=cut(k1,p);adj=res(k1,p);u=vector(4);for(j=$
$1,4,u[j]=q[1,2*j-1]);for(j=1,4,x[j]=q[1,2*j]);uu=x[1]/u[1];v=$
$ep(uu);t1=[u[1]^{(}-1),0;0,1];z1=dia(t1,t1)*b3(v[1],v[2]);t2=[1/u[1],0;0,1]*$
$[1/uu,0;0,uu]*[1,-uu;0,1];w1=[1,-1/uu;0,1]*[u[2],x[2];0,1];w2=$
$[u[3],x[3];0,1];w3=[u[4],x[4];0,1]*[1/u[1],0;0,1]*[1/uu,0;0,uu]*[1,-uu;0,1];qq=$
$add3(w1,w2,w3);z3=dia(t2,t2)*rb3(qq);z=add(z1,z3);z=dia(adj,adj)*$
$z;z=if(k0,z,[0,0;0,0]);z=clean(z);z\}$
$\{ra5e(p)=local(adj,s,u,uu,v,v2,t1,t2,x,k0,k1,q,qq,w1,w2,w3,w4,z,z1,z2,z3);$
$e=quadgen(5);p=nor(p);x=vector(5);for(j=1,5,x[j]=p[1,2*$
$j]);k0=sel1(x);k1=max(1,k0);q=cut(k1,p);adj=res(k1,p);u=$
$vector(5);for(j=1,5,u[j]=q[1,2*j-1]);for(j=1,5,x[j]=q[1,2*$
$j]);uu=x[1]/u[1];v=ep(uu);t1=[u[1]\hat{}(-1),0;0,1];z1=dia(t1,t1)*$
$a3(v[1],v[2]);v2=ep(u[1]);z2=a2(v2[2]);t2=[1/u[1],0;0,1]*[1/uu,0;0,uu]*$
$[1,-uu;0,1];w1=[1,-1/uu;0,1]*[u[2],x[2];0,1];w2=[u[3],x[3];0,1];w3=$
$[u[4],x[4];0,1];w4=[u[5],x[5];0,1]*[1/u[1],0;0,1]*[1/uu,0;0,uu]*[1,-uu;0,1];qq=$
$add4(w1,w2,w3,w4);z3=dia(t2,t2)*ra4(qq);z=add3(z1,z2,z3);z=$
$dia(adj,adj)*z;z=clean(z);z\}$
$\{ra5n(p)=local(adj,s,u,v,t1,x,k0,k1,q,qq,w1,w2,w3,z,z1,z2);$
$e=quadgen(5);p=nor(p);x=vector(5);for(j=1,5,x[j]=p[1,2*$
$j]);k0=sel0(x);k1=max(1,k0);q=cut(k1,p);adj=res(k1,p);u=$
$vector(5);for(j=1,5,u[j]=q[1,2*j-1]);for(j=1,5,x[j]=q[1,2*$
$j]);v=ep(u[1]);z1=a2(v[2]);t1=[1/u[1],0;0,1]*[u[2],x[2];0,1];w1=$
$[u[3],x[3];0,1];w2=[u[4],x[4];0,1];w3=[u[5],x[5];0,1]*[1/u[1],0;0,1]*$
$[u[2],x[2];0,1];qq=add3(w1,w2,w3);z2=dia(t1,t1)*ra3(qq);z=add(z1,z2);$
$z=dia(adj,adj)*z;z=clean(z);z\}$

$\{ra5(p) = local(k0, k1, z, z1, z2); p = nor(p); x = vector(5); for(j = 1, 5, x[j] = p[1, 2*j]); k0 = sel0(x); k1 = sel1(x); z1 = if(k1, ra5e(p), 0); z2 = if(k0, ra5n(p), 0); z = if(k1, z1, z2); z\}$

$\{rb5e(p) = local(adj, s, u, uu, v, v2, t1, t2, x, k0, k1, q, qq, w1, w2, w3, w4, z, z1, z2, z3); e = quadgen(5); p = nor(p); x = vector(5); for(j = 1, 5, x[j] = p[1, 2 * j]); k0 = sel1(x); k1 = max(1, k0); q = cut(k1, p); adj = res(k1, p); u = vector(5); for(j = 1, 5, u[j] = q[1, 2 * j - 1]); for(j = 1, 5, x[j] = q[1, 2 * j]); uu = x[1]/u[1]; v = ep(uu); t1 = [u[1]^(- 1), 0; 0, 1]; z1 = dia(t1, t1) * b3(v[1], v[2]); t2 = [1/u[1], 0; 0, 1]*[1/uu, 0; 0, uu]*[1, -uu; 0, 1]; w1 = [1, -1/uu; 0, 1]* [u[2], x[2]; 0, 1]; w2 = [u[3], x[3]; 0, 1]; w3 = [u[4], x[4]; 0, 1]; w4 = [u[5], x[5]; 0, 1]* [1/u[1], 0; 0, 1]*[1/uu, 0; 0, uu]*[1, -uu; 0, 1]; qq = add4(w1, w2, w3, w4); z2 = dia(t2, t2) * rb4(qq); z = add(z1, z2); z = dia(adj, adj) * z; z = clean(z); z\}$

$\{rb5n(p) = local(adj, s, u, v, t1, x, k0, k1, q, qq, w1, w2, w3, z, z1, z2); e = quadgen(5); p = nor(p); x = vector(5); for(j = 1, 5, x[j] = p[1, 2 * j]); k0 = sel0(x); k1 = max(1, k0); q = cut(k1, p); adj = res(k1, p); u = vector(5); for(j = 1, 5, u[j] = q[1, 2*j-1]); for(j = 1, 5, x[j] = q[1, 2*j]); t1 = [1/u[1], 0; 0, 1]*[u[2], x[2]; 0, 1]; w1 = [u[3], x[3]; 0, 1]; w2 = [u[4], x[4]; 0, 1]; w3 = [u[5], x[5]; 0, 1] * [1/u[1], 0; 0, 1] * [u[2], x[2]; 0, 1]; qq = add3(w1, w2, w3); z = dia(t1, t1)*rb3(qq); z = dia(adj, adj)* z; z = clean(z); z\}$

$\{rb5(p) = local(k0, k1, z, z1, z2); p = nor(p); x = vector(5); for(j = 1, 5, x[j] = p[1, 2*j]); k0 = sel0(x); k1 = sel1(x); z1 = if(k1, rb5e(p), 0); z2 = if(k0, rb5n(p), 0); z = if(k1, z1, z2); z\}$

$\{ra6e(p) = local(adj, s, u, uu, v, v2, t1, t2, x, k0, k1, q, qq, w1, w2, w3, w4, w5, z, z1, z2, z3); e = quadgen(5); p = nor(p); x = vector(6); for(j = 1, 6, x[j] = p[1, 2 * j]); k0 = sel1(x); k1 = max(1, k0); q = cut(k1, p); adj = res(k1, p); u = vector(6); for(j = 1, 6, u[j] = q[1, 2 * j - 1]); for(j = 1, 6, x[j] = q[1, 2 * j]); uu = x[1]/u[1]; v = ep(uu); t1 = [u[1]^(- 1), 0; 0, 1]; z1 = dia(t1, t1) * a3(v[1], v[2]); v2 = ep(u[1]); z2 = a2(v2[2]); t2 = [1/u[1], 0; 0, 1]*[1/uu, 0; 0, uu]* [1, -uu; 0, 1]; w1 = [1, -1/uu; 0, 1]*[u[2], x[2]; 0, 1]; w2 = [u[3], x[3]; 0, 1]; w3 = [u[4], x[4]; 0, 1]; w4 = [u[5], x[5]; 0, 1]; w5 = [u[6], x[6]; 0, 1] * [1/u[1], 0; 0, 1] * [1/uu, 0; 0, uu]*[1, -uu; 0, 1]; qq = add5(w1, w2, w3, w4, w5); z3 = dia(t2, t2)* ra5(qq); z = add3(z1, z2, z3); z = dia(adj, adj) * z; z = clean(z); z\}$

$\{ra6n(p) = local(adj, s, u, v, t1, x, k0, k1, q, qq, w1, w2, w3, w4, z, z1, z2); e = quadgen(5); p = nor(p); x = vector(6); for(j = 1, 6, x[j] = p[1, 2 * j]); k0 = sel0(x); k1 = max(1, k0); q = cut(k1, p); adj = res(k1, p); u = vector(6); for(j = 1, 6, u[j] = q[1, 2 * j - 1]); for(j = 1, 6, x[j] = q[1, 2 * j]); v = ep(u[1]); z1 = a2(v[2]); t1 = [1/u[1], 0; 0, 1]*[u[2], x[2]; 0, 1]; w1 = [u[3], x[3]; 0, 1]; w2 = [u[4], x[4]; 0, 1]; w3 = [u[5], x[5]; 0, 1]; w4 = [u[6], x[6]; 0, 1]*[1/u[1], 0; 0, 1]*[u[2], x[2]; 0, 1]; qq = add4(w1, w2, w3, w4); z2 = dia(t1, t1)*ra4(qq); z = add(z1, z2); z = dia(adj, adj)* z; z = clean(z); z\}$

$\{ra6(p) = local(k0, k1, z, z1, z2); p = nor(p); x = vector(6); for(j = 1, 6, x[j] =$
$p[1, 2{*}j]); k0 = sel0(x); k1 = sel1(x); z1 = if(k1, ra6e(p), 0); z2 = if(k0, ra6n(p), 0);$
$z = if(k1, z1, z2); z\}$
$\{rb6e(p) = local(adj, s, u, uu, v, v2, t1, t2, x, k0, k1, q, qq, w1, w2, w3, w4, w5, z, z1, z2, z3);$
$e = quadgen(5); p = nor(p); x = vector(6); for(j = 1, 6, x[j] = p[1, 2 *$
$j]); k0 = sel1(x); k1 = max(1, k0); q = cut(k1, p); adj = res(k1, p); u =$
$vector(6); for(j = 1, 6, u[j] = q[1, 2 * j - 1]); for(j = 1, 6, x[j] = q[1, 2 *$
$j]); uu = x[1]/u[1]; v = ep(uu); t1 = [u[1]^(- 1), 0; 0, 1]; z1 = dia(t1, t1) *$
$b3(v[1], v[2]); t2 = [1/u[1], 0; 0, 1]{*}[1/uu, 0; 0, uu]{*}[1, -uu; 0, 1]; w1 = [1, -1/uu; 0, 1]{*}$
$[u[2], x[2]; 0, 1]; w2 = [u[3], x[3]; 0, 1]; w3 = [u[4], x[4]; 0, 1]; w4 = [u[5], x[5]; 0, 1]; w5 =$
$[u[6], x[6]; 0, 1]{*}[1/u[1], 0; 0, 1]{*}[1/uu, 0; 0, uu]{*}[1, -uu; 0, 1]; qq = add5(w1, w2, w3, w4, w5);$
$z2 = dia(t2, t2){*}rb5(qq); z = add(z1, z2); z = dia(adj, adj){*}z; z = clean(z); z\}$
$\{rb6n(p) = local(adj, s, u, v, t1, x, k0, k1, q, qq, w1, w2, w3, w4, z, z1, z2); e =$
$quadgen(5); p = nor(p); x = vector(6); for(j = 1, 6, x[j] = p[1, 2 * j]); k0 =$
$sel0(x); k1 = max(1, k0); q = cut(k1, p); adj = res(k1, p); u = vector(6); for(j =$
$1, 6, u[j] = q[1, 2 * j - 1]); for(j = 1, 6, x[j] = q[1, 2 * j]); t1 = [1/u[1], 0; 0, 1] *$
$[u[2], x[2]; 0, 1]; w1 = [u[3], x[3]; 0, 1]; w2 = [u[4], x[4]; 0, 1]; w3 = [u[5], x[5]; 0, 1]; w4 =$
$[u[6], x[6]; 0, 1]{*}[1/u[1], 0; 0, 1]{*}[u[2], x[2]; 0, 1]; qq = add4(w1, w2, w3, w4); z =$
$dia(t1, t1) * rb4(qq); z = dia(adj, adj) * z; z = clean(z); z\}$
$\{rb6(p) = local(k0, k1, z, z1, z2); p = nor(p); x = vector(6); for(j = 1, 6, x[j] =$
$p[1, 2{*}j]); k0 = sel0(x); k1 = sel1(x); z1 = if(k1, rb6e(p), 0); z2 = if(k0, rb6n(p), 0);$
$z = if(k1, z1, z2); z\}$

print(123)

$\{dev(p) = local(a = length(p[1,])/2, de); for(i = 1, a, de = de + r([p[1, 2 * i -$
$1], p[1, 2 * i]; p[2, 2 * i - 1], p[2, 2 * i]]) - r([p[3, 2 * i - 1], p[3, 2 * i]; p[4, 2 * i -$
$1], p[4, 2 * i]])); de\}$
$\{e = quadgen(5); l1 = 8; l2 = 4; k = (l1{+}1){*}(l2{+}1); sr = r([0, 1; -1, 0]); nur =$
$r([e, 0; 0, 1]); taur = r([1, 1; 0, 1]); idr = r([1, 0; 0, 1]); del = r([-1, 0; 0, 1]);$
$B1 = r([2, 0; 0, 1]); B2 = r([2, -1; 0, 1]); B3 = r([2, -e; 0, 1]); B4 = r([2, -e^2; 0, 1]); B5 =$
$r([1, 0; 0, 2]);$

print(345);

$ZA3 = ra6([1/e, -2, 1, -1/e, 1/e, -2, 1, -1/e, 1/e, -2, 1, -1/e; 0, e, 0, 1, 0, e, 0, 1, 0, e, 0, 1]);$
$ZA4 = ra6([e\hat{}(-2), -2, 1, -1, e\hat{}(-2), -2, 1, -1, e\hat{}(-2), -2, 1, -1;$
$0, e\hat{}2, 0, 1, 0, e\hat{}2, 0, 1, 0, e\hat{}2, 0, 1]);$
$A = idr{+}taur{*}nur{-}nur{-}nur{*}taur{*}nur\hat{}(-1); B = (taur{-}idr){*}(idr{-}nur{*}$
$taur{*}nur\hat{}(-1)); C = nur{*}nur - idr - taur{*}nur; D = idr + nur - nur{*}nur{*}$
$taur{*}nur\hat{}(-1) - taur; SS = sr{+}idr; xi = (sr{*}taur)^2{+}sr{*}taur{+}idr; XA =$
$xi * sr; XB = (sr * nur + idr) * sr; XC = sr * nur + idr;$

print(567);

$ma = [e, -e\hat{}2; 2, -e\hat{}2]{*}[1, 1; 0, 1]; print(ma\hat{}3); T = (r(ma){-}idr){*}dev(ZA3); U =$
$(del + idr) * (sr * nur + idr); A = T * U; X = matker(A); Y = U * X; W =$

$matimage(Y); W = (nur\hat{}(-1) + idr) * W; c = matrank(W); print(c);$
print("Results");
$YY = matrix(l2{+}1, c); dd = (l1{-}l2)/2; for(i = 1, l2{+}1, (for(j = 1, c, YY[i, j] = W[(i{+}dd{-}1){*}(l2{+}1){+}i, j]))); YY = matimage(YY); dim = matrank(YY); print(dim); for(j = 1, dim, print(YY[, j])); print(YY[1, 1]/YY[3, 1]); print("weight = "l1 + 2", "l2 + 2)\}$