数理解析研究所講究録
第 1827 巻 2013 年 1-17

ハミルトン系の非可積分性の証明

大阪大学・大学院基礎工学研究科　柴山允瑠
Mitsuru Shibayama
Graduate School of Engineering Science
Osaka University

概要

ハミルトン力学系の可積分性を判定することは, 大変重要な問題である. 本稿では, 関連する研究の概要を述べ, その後新しい結果である 2 自由度系の斉次ポテンシャルをもつハミルトン力学系の非可積分性の証明を紹介する. その証明は McGehee による特異点のブローアップ法を用いており, そのようなアプローチ自体がこれまでなかったものである.

1　ハミルトン系とその可積分性

$\mathcal{D}$ を $\mathbb{R}^{2k}$ の開集合とし, $H:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ を滑らかな関数とする.

$$\frac{dq_k}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_k},\quad \frac{dp_k}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_k}\quad (k=1,\ldots,n) \tag{1}$$

の形で表される微分方程式を Hamilton の正準方程式, あるいは Hamilton 力学系といい, 関数 H を Hamiltonian という. このとき, n を自由度という. Hamilton の正準方程式は多くの分野で現れる. 元来は力学の一つの定式化であって, n 次元的に運動する質点 (系) の質量, 位置, 運動量をそれぞれ $m_1,\ldots,m_n$, $q_1,\ldots,q_n,p_1,\ldots,p_n$ とし, ポテンシャルエネルギーを $U(q_1,\ldots,q_n)$ としたとき, 力学の運動方程式

$$m_k\frac{d^2q_k}{dt^2}=-\frac{\partial U}{\partial q_k}\quad (k=1,\ldots,n)$$

は

$$H=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2m_k}p_k^2+U(q_1,\ldots,q_n)$$

を Hamiltonian の正準方程式と同じである.

$2n$ 次正方行列 M がシンプレクティック行列であるとは,

$${}^tMJM=J,\quad J=\begin{pmatrix}0 & E_n\\ -E_n & 0\end{pmatrix}$$

を満たすことである.

変数変換

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \tag{2}$$

の各点での Jacobi 行列がシンプレクティック行列になるとき, この変数変換を正準変換という. ここで,

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

である. 他の変数についても同様. また, 変数変換 (2) に対して,

$$\sum_k d\xi_k \wedge d\eta_k = \sum_k dp_k \wedge dq_k$$

を満たすことが, 正準変換であることの必要十分条件である. 正準変換の作り方は, 位置変数の変換 $q = q(\eta)$ を与えて, 正準変換になるように $p = p(\xi, \eta)$ を決める方法 (点変換) や, 関数 $S(\eta, q)$(母関数, 生成関数) を与えて

$$dS = \sum_k (\xi_k d\eta_k - p_k dq_k)$$

により定める方法がある ([2, 7] 参照).

微分方程式 (1) を正準変換 $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ で変換すると,

$$\frac{d\eta_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \xi_k}, \quad \frac{d\xi_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \eta_k} \quad (k = 1, \ldots, n)$$

となる. つまり, 変換しても Hamilton 力学系になる.

$\mathbb{R}^{2n}$ 上の関数 F, G について, ポアソン括弧と呼ばれる関数を

$$\{F, G\} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial G}{\partial q_k} - \frac{\partial F}{\partial q_k} \frac{\partial G}{\partial p_k} \right)$$

により定義する.

Hamilton 力学系において, $\mathbb{R}^{2n}$ 上の関数 F が, 全ての解に対して一定であるとき, F を第一積分あるいは保存量という. 恒等的に $\{H, F\} = 0$ となることは, F が第一積分であるための必要十分条件である.

自由度 n の Hamilton 力学系において, n 個の第一積分 $F_1, \ldots, F_n$ が存在し, $dF_1, \ldots, dF_n$ が稠密な開集合上で一次独立で, $\{F_i, F_j\} = 0 (i, j = 1, \ldots, n)$ が成り立つとき, この Hamilton 力学系は可積分であるという.

定理 1 (Liouville-Arnold). *可積分 Hamilton 力学系において, 第一積分を $F_1, \ldots, F_n (= H)$ とする. ある $c_i \in \mathbb{R} (i = 1, \ldots, n)$ に対して $\cap_{i=1}^{n} F^{-1}(c_i)$ が連結かつコンパクトで, その上で $dF_1, \ldots, dF_n$ が一次独立であれば, $\cap_{i=1}^{n} F^{-1}(c_i)$ のある近傍 N への正準変換*

$$\begin{pmatrix} I \\ \theta \end{pmatrix} \in U(\subset \mathbb{R}^n) \times \mathbb{T}^n \mapsto \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in N$$

が存在して, 座標 $\begin{pmatrix} I \\ \theta \end{pmatrix}$ においては H は I のみの関数になる.

この定理の証明は, [2, 11, 7] などにある. この定理が適用できるとき, 変数 $\begin{pmatrix} I \\ \theta \end{pmatrix}$ を用いると微分方程式は

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I_i}, \quad \frac{dI_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta_i} = 0$$

となる. 従って, I は一定. それを $I_0 \in \mathbb{R}^n$ とする. これから, $\theta = \frac{\partial H}{\partial I}(I_0)t + d$ の形として解が得られる. よって, 解の振る舞いはよく分かる. 従って, Hamilton 力学系が可積分かどうかを判定するのは非常に重要な問題である.

2 古典的結果

2.1 Bruns の定理

この節では, 古典的な結果を紹介する. Bruns [4] は, 3 体問題には既知の第一積分 (エネルギー, 角運動量の各成分, 運動量の各成分) に独立で, 代数関数で表される第一積分は存在しないことを示した.

実は Bruns の証明には誤りがあり, Poincaré [27] がそれを補完した. その後, 様々な枠組みへの拡張やその証明の誤りおよび修正が繰り返された [6, 36, 9, 33].

Bruns の定理は次に述べる Poincaré の定理ほど有名ではない. しかし, 歴史的に第一積分の非存在を示そうとしたおそらく最初の結果であることと, 既知の第一積分の多くが代数関数であることから, 重要な定理であるといえる.

2.2 Poincaré の定理

■**Poincaré の定理** Bruns の結果の数年後に, Poincaré [26] は後で示すような意味で, 可積分の摂動系は一般には非可積分であることを示した.

Poincaré の結果を紹介する. この証明は, [22, 26, 28, 42] にもある. 自由度 2 の場合に限って考える. より自由度の大きい場合の証明は [14] にある. $H_\mu(I,\theta)$ をパラメータ $\mu \in \mathbb{R}$(3 体問題のときは質量) をもつ Hamilton 力学系とし, $\mu = 0$ のとき可積分とする. μ についても H_μ は解析的とし,

$$H_\mu(I,\theta) = H_0(I) + \mu H_1(I,\theta) + \mu^2 H_2(I,\theta) + \dots$$

と展開しておく. H_0 の系は可積分なので, H_0 は始めから I のみによるように座標 $(I,\theta) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{T}^2$ を取っておく. $\mathrm{Hess}(H_0)$ は正則と仮定する. この条件をツイスト条件といい, 摂動論では本質的な役割を果たす. あとで, もう少し H_1 に対する仮定を課す.

Φ_μ を第一積分とし, μ についても解析的であるとする. 従って,

$$\Phi_\mu(I,\theta) = \Phi_0(I,\theta) + \mu\Phi_1(I,\theta) + \mu^2\Phi_2(I,\theta) + \dots$$

と展開できる．ポアソン括弧を用いると，

$$0 = \{H_\mu, \Phi_\mu\} = \{H_0, \Phi_0\} + \mu(\{H_0, \Phi_1\} + \{H_1, \Phi_0\}) + \dots$$

と表せる．これから，$\{H_0, \Phi_0\} = 0, \{H_0, \Phi_1\} + \{H_1, \Phi_0\} = 0, \dots$ が得られる．

まず，Φ_0 が I にしかよらないことを示す．θ について Fourier 級数展開して，

$$\Phi_0 = \sum_k \varphi_k(I) e^{i\langle k, \theta\rangle}$$

とおく．これを，$\{H_0, \Phi_0\} = 0$ に当てはめると，

$$\sum_k \left\langle k, \frac{\partial H_0}{\partial I} \right\rangle \varphi_k(I) e^{i\langle k, \theta\rangle} = 0$$

が得られる． これより，各 k について $\langle k, \frac{\partial H_0}{\partial I}\rangle \varphi_k(I) = 0$ が恒等的になりたつ． 恒等的に $\langle k, \frac{\partial H_0}{\partial I}\rangle = 0$ である場合を考える．これを I で微分すると，

$$\mathrm{Hess}(H_0) k = 0$$

が得られる．$\mathrm{Hess}(H_0)$ は正則だから，これが成り立つのは $k = 0$ の場合だけである．$k \neq 0$ のときは，$\varphi_k = 0$ でないといけない．すなわち，$\Phi_0 = \varphi_0(I)$ である．

次に，Φ_0 が H_0 のみの関数となることを示す．H_1, Φ_1 についても Fourier 展開して，

$$H_1 = \sum_k h_k(I) e^{i\langle k, \theta\rangle}$$
$$\Phi_1 = \sum_k \varphi_k(I) e^{i\langle k, \theta\rangle}$$

とおく．すると，

$$\left\langle k, \frac{\partial H_0}{\partial I} \right\rangle \varphi_k(I) = \left\langle k, \frac{\partial \Phi_0}{\partial I} \right\rangle h_k(I)$$

が成立する．

ここで，さらに，無限個の k(平行な k は同じと見なす) に対して $h_k(I)$ が $\langle k, \frac{\partial H_0}{\partial I}\rangle = 0$ なる I 上では恒等的には 0 にならないと仮定する．すると，そのような k に対して，$\langle k, \frac{\partial H_0}{\partial I}\rangle = 0$ なる I 上で，$\langle k, \frac{\partial \Phi_0}{\partial I}\rangle = 0$ となる．よって，$\frac{\partial \Phi_0}{\partial I}, \frac{\partial H_0}{\partial I}$ は k に垂直だから一次従属 (ここで自由度 2 という仮定を使っている)．つまり，

$$\frac{\partial(\Phi_0, H_0)}{\partial(I_1, I_2)} = 0. \tag{3}$$

これが無限個の曲線上で成立することと，解析性より，(3) は恒等的に成立する．よって，$\frac{\partial \Phi_0}{\partial I} = c(I)\frac{\partial H_0}{\partial I}$ と表せる．これは，Φ_0 と H_0 の勾配ベクトルが同じ向きであることを示しており，H_0 の等高線に接する方向には Φ_0 は変化しないことを意味する.Φ_0 は H_0 の等高面の連結成分で一定である．H_0 の値を変化させて等高面の連結成分の連続な族を考えると，そこでは $\Phi_0 = \psi(H_0)$ と表

せる．解析性より，この等号は大域的にも成り立つ．故に，Φ_0 は H_0 のみの関数 $\psi(H_0)$ でなければならない．

最後に，Φ が H のみの関数であることを示す．ここから，添字の μ は略す．$\Phi - \psi(H)$ を考えると，これは $\mu = 0$ で $\Phi_0 - \psi(H_0)$ である．よって，$\Phi - \psi(H)$ は μ で割り切れる．

$$\Phi - \psi(H) = \mu\Phi'$$

とおくと，Φ' も第一積分である．前と同様にして，

$$\Phi' = \Phi'_0 + \mu\Phi'_1 + \dots$$

と展開すると

$$\Phi'_0 = \psi'(H_0)$$

と表せる．そこで，

$$\Phi' - \psi'(H) = \mu\Phi''$$
$$\Phi'' - \psi''(H) = \mu\Phi'''$$

として，再び置きかられる．これらの関係式から，

$$\begin{aligned}\Phi &= \psi(H) + \mu\Phi' \\ &= \psi(H) + \mu(\psi'(H) + \mu\Phi'') \\ &= \psi(H) + \mu\psi'(H) + \mu^2(\psi''(H) + \mu\Phi''') \\ &= \psi(H) + \mu\psi'(H) + \mu^2\psi''(H) + \dots\end{aligned}$$

となり，Φ は H のみの関数となる．つまり，H に独立な第一積分は存在しない.(証明終)

■3 体問題への応用 Poincaré の定理の 3 体問題へ適用した結果が，「3 体問題は解けない」といわれるもとになった．その点について，少し詳しく述べておく．

平面 3 体問題において，質点の質量を $1-\mu, \mu, 0$ とする．すると，質量を持つ 2 質点 (例えば太陽，木星) は残りの 1 質点 (小惑星) の影響を受けないので，Kepler 問題に従い，楕円軌道を描く．そこで，太陽と木星が円運動である場合を考える．すると，小惑星の運動のみが問題となる．太陽と木星が常に x 軸上にあるような回転座標系をとると，小惑星の運動はハミルトニアン

$$H_\mu = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - p_x y + p_y x - \frac{1-\mu}{\sqrt{(x+\mu)^2 + y^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2}}$$

の正準方程式に従う．

制限 3 体問題で，さらに $\mu = 0$ とすると小惑星の運動も Kepler 問題に帰着するので可積分である．これで，可積分系の摂動系になった．実は，この問題では，仮定として必要なツイスト条件が成立しない．しかし，H_μ の代わりに H_μ^2 のハミルトン系を考えると，ツイスト条件が成立する．H_μ から H_μ^2 に変えることは，時間変数を変換したことに対応し，力学系の本質的な構造には影響ない．

H_1 に対する仮定を満たすことは易しくないが確認できて, Poincaré の定理が適用できることがわかる.([26, 36] 参照).

少し話がそれるが, Kepler 問題がツイスト条件を満たさないことは, 摂動論としては様々な問題を引き起こす. KAM 理論の太陽系モデルへの応用が困難であったのも, それが原因である ([5, 30] を見よ). Kepler 問題が超可積分系であるという事実にも関連する. 制限 3 体問題で $\mu = 0$ の場合は, 自由度よりも 1 つ多くの第一積分が存在する. このような場合は, 上の操作でツイスト条件を満たすようにできる. しかし, 太陽系モデルで惑星間の相互作用を 0 とした場合は, 自由度よりもはるかに多くの第一積分が存在するため, そのような方法ではツイスト条件を満たすようにはできないのである. つまり, 第一積分が多過ぎることが, 解析の妨げになっているのである.

3 Kovalevski の研究から微分 Galois 理論へ

Bruns, Poincaré の結果が得られていたほぼ同時期に, Kovalevski [12, 13] ([38, 8] も参照) は剛体の運動方程式について可積分となる新たなパラメータを発見した. その可積分系は Kovalevski のコマと呼ばれている. その方法は, 特異点を持つ解の解析接続性に着目するものであった. その研究の流れは, Ziglin [44, 45] , 吉田春夫 [39, 40] らにより継続された. さらに, Morales-Ruiz, Ramis [19, 20] により始まった微分 Galois 理論 ([34, 21, 16, 24] などを参照) の応用による非可積分性の証明法は, 近年盛んに研究されており, 強い結果が得られている. この方面の研究については, [25, 35, 41, 42, 43, 3] など多くの優れた文献がある.

ここでは, 斉次ハミルトン系 (正確に言うと斉次ポテンシャルを持つハミルトン系) に対する結果のみ, 簡単に紹介する. 斉次ポテンシャルを持つハミルトニアン

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\|\mathbf{p}\|^2 + U(\mathbf{q}) \qquad ((\mathbf{p},\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$$
$$U(\lambda\mathbf{q}) = \lambda^\beta U(\mathbf{q}) \qquad (\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, \lambda > 0).$$

を考える. ポテンシャル U について, $\nabla U(\mathbf{c}) = \mathbf{c}$ を満たす点 $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ を U の Darboux 点という. Darboux 点 $\mathbf{c}$ における U の Hesse 行列の固有値を吉田係数という. $U(\mathbf{c})$ が β 次の斉次ハミルトン系であることから, 吉田係数の 1 つは $\beta - 1$ であることが容易に分かる.

Morales-Ramis 理論は, 可積分ハミルトン系の吉田係数になりうる数のリストを挙げている. 例えば, $\beta = -1$ の場合, Moreles-Raims によると, 可積分ハミルトン系の吉田係数は

$$\{-\frac{1}{2}p(p-3) \mid p \in \mathbb{Z}\} = \{1, 0, -2, -5, -9, \dots\}.$$

に含まれる数になる.

可積分ハミルトン系は, 全ての Darboux 点における全ての吉田係数が Morales-Ramis のリストに属する. これは, 強力な結果で全ての質量に対し 3 体問題の非可積分性も証明されている ([15]). n 体問題の Darboux 点は, 中心配置 (central configuration) と呼ばれている. 3 体問題の場合, 正 3 角形配置と直線配置がある. それらの配置の吉田係数を全て評価することで非可積分性が示され

る. 直線配置は存在は容易に分かるのだが, その配置が明確に定まるものではない. それにも関わらず Maciejewski と Przybylska[15] は吉田係数をうまく評価し, 非可積分性を導いたのである.

余談ながら, 中心配置の存在が全て分かっているのは, 3 体問題までである. 4 体問題の場合は, 有限種類であることが近年示された ([10], [1] も見よ). 5 体以上では有限かどうかも分かっていないが, n が増えるに従って膨大になっていく ([23, 37]). 中心配置の数を調べること, 存在が分かっている中心配置の正確な配置を調べることなど, 中心配置の研究自体が天体力学の中で伝統的に研究されてきた重要な問題の 1 つである.

4 特異点のブローアップによる判定

4.1 主結果

この節では, 最近の筆者の結果 [31] を紹介する. McGehee [17] による特異点のブローアップ法を用いて, 斉次ポテンシャルをもつハミルトン系の非可積分性を証明する. [29] にもブローアップを用いた直線 3 体問題の非可積分性の証明はあるが, 3 体問題の特殊性をかなり用いていた. ここでは, より一般的なハミルトニアンに適用可能な結果を紹介する.

次数 $\beta(\in \mathbb{Z})$ の斉次ポテンシャルをもつ 2 自由度系のハミルトニアンを考える:

$$\begin{aligned} H(\mathbf{p},\mathbf{q}) &= \frac{1}{2}\|\mathbf{p}\|^2 + U(\mathbf{q}) \qquad ((\mathbf{p},\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2) \\ U(\lambda \mathbf{q}) &= \lambda^\beta U(\mathbf{q}) \qquad (\mathbf{q} \in \mathbb{R}^2, \lambda > 0). \end{aligned} \tag{4}$$

$V(\theta) = U(\cos\theta, \sin\theta)$ とおく.

定理 2 (Shibayama [31]). 次を仮定する:

1. $\beta \neq -2, 0$;
2. V は 3 つの臨界点を持つ: $\frac{\partial V}{\partial \theta}(\theta_l) = 0$ $(l = -1, 0, 1)$ かつ $\theta_{-1} < \theta_0 < \theta_1$;
3. $[\theta_{-1}, \theta_1]$ 上で $V(\theta) < 0$;
4. $(\theta_{-1}, \theta_0) \cup (\theta_0, \theta_1)$ 上で $\dfrac{\partial V}{\partial \theta}(\theta) \neq 0$;
5. $\dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}(\theta_{\pm 1}) < 0$;
6. $-\dfrac{1}{8}(\beta+2)^2 V(\theta_0) < \dfrac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}(\theta_0)$.

このとき, (4) は H に独立な有理型第一積分を持たない.

注意 1. $\beta = -2$ の場合は, 定理から除外されていた. この場合,

$$G(\mathbf{p},\mathbf{q}) = (\mathbf{q}\cdot\mathbf{p})^2 - 2\|\mathbf{q}\|^2 H(\mathbf{p},\mathbf{q})$$

が第一積分になっている.

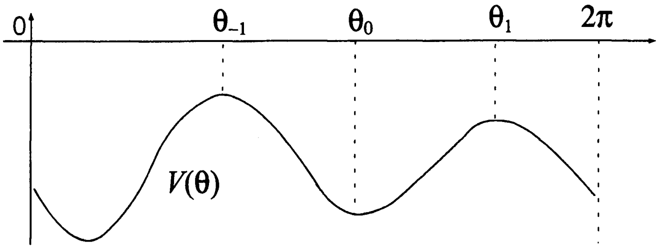

図 1　関数 $V(\theta)$ の概形

注意 2. $[\theta_{-1}, \theta_1]$ 上で $V(\theta) > 0$ の場合は，そのままでは定理の仮定を満たさない．しかし，時間 t を $\sqrt{-1}t$ に置き換えると，V が $-V$ に置き換わった方程式になる．

4.2 McGehee のブローアップ法

McGehee [17] は直線 3 体問題において，3 体衝突特異点をブローアップする手法を構築した．McGehee により考案された変換により，3 体衝突特異点に対応する多様体が現れ，その上でも微分方程式が定まる．その手法を一般の斉次ハミルトニアン (4) に拡張したものを以下で述べる．

まず，$\beta < 0$ の場合を考える．座標系 (r, θ, v, w) を

$$\mathbf{q} = r(\cos\theta, \sin\theta), \mathbf{p} = r^{\beta/2}(v(\cos\theta, \sin\theta) + w(-\sin\theta, \cos\theta))$$

により定め，時間変数 t も $dt = r^{1-\beta/2}d\tau$ により新しい時間変数 τ に変換する．写像 $(r, \theta, v, w) \mapsto (\mathbf{p}, \mathbf{q})$ は解析的である．この座標 (r, θ, v, w) を McGehee 座標という．McGehee 座標では，微分方程式

$$\frac{dr}{d\tau} = rv \tag{5}$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = w \tag{6}$$

$$\frac{dv}{d\tau} = -\frac{\beta}{2}v^2 + w^2 - \beta V(\theta) \tag{7}$$

$$\frac{dw}{d\tau} = -\left(\frac{\beta}{2} + 1\right) vw - \frac{\partial V}{\partial \theta}(\theta) \tag{8}$$

になる．$\beta < 0$ だから，$\mathbf{q} = \mathbf{0}$ は元の正準方程式においては特異点である．しかし，この変換された微分方程式 (5)-(8) では，それに対応する $r = 0$ は特異点でなくなっている．

エネルギーは

$$H = r^{\beta}\left(\frac{v^2 + w^2}{2} + V(\theta)\right). \tag{9}$$

である．エネルギーを定数 $h \neq 0$ に固定する．すると，3 つの式 (6), (7), (8) だけを考えれば良い．r はエネルギーの式から得られる．

$$\mathcal{M}=\left\{(\theta,v,w)\mid \frac{v^2+w^2}{2}+V(\theta)=0\right\}$$

は不変集合である. r が 0 に近づくとき, (θ,v,w) は $\mathcal{M}$ に近づく. n 体問題の場合, $\mathcal{M}$ は全衝突に対応するので衝突多様体と呼ばれている.

$\beta>0$ の場合も, ほぼ同じである. $R=r^{-1}$ とおくと (5) が

$$\dot{R}=-Rv \tag{10}$$

になる. エネルギーは

$$H=R^{-\beta}\left(\frac{v^2+w^2}{2}+V(\theta)\right). \tag{11}$$

である. 方程式は $R=0$ にも拡張される. エネルギーを 0 以外の値に固定すると, $R\to 0$ のとき, 同じ式で定義される不変集合 $\mathcal{M}$ に収束する. β の正負に関わらず考える方程式は (6), (7), (8) なので, 以下では区別せずに述べる.

$\mathcal{M}$ 上の力学系は, $\beta\neq -2$ ならば次の意味で擬勾配的という性質をもつ. $\mathcal{M}$ 上では,

$$\frac{dv}{d\tau}=\left(\frac{\beta}{2}+1\right)w^2\begin{cases}\geq 0 & (\beta>-2)\\ \leq 0 & (\beta<-2)\end{cases}$$

が成り立つこつが容易に分かる. 従って, $\beta\neq -2$ ならば, 解に沿って v の値は単調に増加する.

θ_c を V の臨界点とする. つまり, $\frac{\partial V}{\partial\theta}(\theta_c)=0$ が成立する. このとき, $(\theta,v,w)=(\theta_c,\pm\sqrt{2V(\theta_c)},0)$ は (6), (7), (8) の平衡点である. (6), (7), (8) の $(\theta,v,w)=(\theta_c,\pm\sqrt{2V(\theta_c)},0)$ における線形化方程式は

$$\frac{d}{d\tau}\begin{pmatrix}\delta\theta\\ \delta v\\ \delta w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & \mp\beta\sqrt{2V(\theta_c)} & 0\\ \frac{\partial^2V}{\partial\theta^2}(\theta_c) & 0 & \mp\left(\frac{\beta}{2}+1\right)\sqrt{2V(\theta_c)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta\theta\\ \delta v\\ \delta w\end{pmatrix}.$$

である. 固有値は, $\lambda_1=\mp\beta\sqrt{2V(\theta_c)}$ と λ_2,λ_3 であり, λ_2,λ_3 は

$$\lambda^2\mp\left(\frac{\beta}{2}+1\right)\sqrt{2V(\theta_c)}\lambda+\frac{\partial^2V}{\partial\theta^2}(\theta_c)=0$$

の根である. λ_1 に対応する固有ベクトルは平衡点において $\mathcal{M}$ に直交しており, λ_2,λ_3 の固有ベクトルは $\mathcal{M}$ に接する.

4.3 定理の証明

$\Phi(\mathbf{p},\mathbf{q})$ が (4) の有理型関数の第一積分であるとする. ポテンシャルが斉次であることから, $(\mathbf{p}(t),\mathbf{q}(t))$ が解ならば $(c^\beta\mathbf{p}(c^{\beta-2}t),c^2\mathbf{q}(c^{\beta-2}t))$ も解である. ここで, $c>0$ は任意の定数である. よって, $\Phi(c^\beta\mathbf{p},c^2\mathbf{q})$ もまた第一積分である. この式を c について Laurent 展開する:

$$\Phi(c^\beta\mathbf{p},c^2\mathbf{q})=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c^kf_k(\mathbf{p},\mathbf{q}). \tag{12}$$

(12) の c に bc を代入すると，

$$\Phi(b^\beta c^\beta \mathbf{p}, b^2 c^2 \mathbf{q}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b^k c^k f_k(\mathbf{p},\mathbf{q})$$

が得られる．また (12) の c に b, $\mathbf{p}$ と $\mathbf{q}$ にそれぞれ $c^\beta \mathbf{p}$ と $c^2\mathbf{q}$ を代入すると，

$$\Phi(b^\beta c^\beta \mathbf{p}, b^2 c^2 \mathbf{q}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b^k f_k(c^\beta \mathbf{p}, c^2\mathbf{q})$$

が得られる．以上より，任意の $c>0$ について

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} b^k f_k(c^\beta \mathbf{p}, c^2\mathbf{q}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b^k c^k f_k(\mathbf{p},\mathbf{q})$$

が成り立つので

$$f_k(c^\beta \mathbf{p}, c^2\mathbf{q}) = c^k f_k(\mathbf{p},\mathbf{q})$$

が成立する．さらに，任意の $c>0$ について，

$$0 = \frac{d}{dt}\Phi(c^\beta \mathbf{p}, c^2\mathbf{q}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c^k \frac{d}{dt} f_k(\mathbf{p},\mathbf{q})$$

だから，

$$\frac{d}{dt} f_k(\mathbf{p},\mathbf{q}) = 0$$

となり，$f_k(\mathbf{p},\mathbf{q})$ は第一積分である．

以上のことから Φ は

$$\Phi(c^\beta \mathbf{p}, c^2\mathbf{q}) = c^\rho \Phi(\mathbf{p},\mathbf{q}) \tag{13}$$

を満たすと仮定できる．

Ψ を Φ を McGehee 座標で表したものとする．すなわち，

$$\Psi(r,\theta,v,w) = \Phi(r^{-\beta/2}(v\cos\theta - w\sin\theta), r^{-\beta/2}(v\sin\theta + w\cos\theta), r\cos\theta, r\sin\theta)$$

とおく．McGehee の変換 $(r,\theta,v,w)\mapsto(\mathbf{p},\mathbf{q})$ は解析的で，Φ は有理型だから Ψ も有理型である．また，(13) は Ψ が

$$\Psi(r,\theta,v,w) = r^{\rho/2}\Psi(1,\theta,v,w)$$

を満たすことに対応する．

平衡点を

$$D_l^\pm = (\theta_l, \pm\sqrt{-2V(\theta_l)}, 0) \qquad (l=-1,0,1)$$

と表す．

$$z = \frac{v^2+w^2}{2} + V(\theta)$$

とし, D_l^- の近傍では座標系 (θ, z, w) を用いる. この座標系は D_l^- の近傍で解析的である. 局所的には曲面 $\mathcal{M}$ は平面 $z=0$ に対応する. この座標系で, エネルギーは

$$H = r^{\beta} z$$

と表される.

$$g(\theta, z, w) = \Psi(1, \theta, -\sqrt{2z - w^2 - 2V(\theta)}, w)$$

とおく. g を $z=0$ において z について Laurent 展開すると

$$\Phi(r, \theta, -\sqrt{2z - w^2 - 2V(\theta)}, w) = r^{\rho/2} \sum_{k=\nu}^{\infty} \gamma_k(\theta, w) z^k$$

と表せる. ν は整数で, $\gamma_\nu(\theta, w)$ は恒等的には 0 でないとする. エネルギーは $h \neq 0$ に固定するので,

$$\begin{aligned}\Phi(r, \theta, -\sqrt{2z - w^2 - 2V(\theta)}, w) &= \left(\frac{h}{z}\right)^{\frac{\rho}{2\beta}} \sum_{k=\nu}^{\infty} \gamma_k(\theta, w) z^k \\ &= \left(\frac{h}{z}\right)^{\frac{\rho}{2\beta}} z^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{k+\nu}(\theta, w) z^k\end{aligned}$$

と表せる. この流れは, 座標系 (θ, z, w) が定義できる範囲だけで定まっていれば十分である.

ここからは, β によって, 議論が若干異なる. β で正負で, 平衡点の $\mathcal{M}$ に直交する方向の固有値の符号が変わる. また, $\beta > -2$ か $\beta < -2$ で, $\mathcal{M}$ 上で擬勾配的となる向きが変わる.

以下では, $\beta = -1$ の場合の証明を述べる. z の最低次数 $\nu - \frac{\rho}{2\beta}$ の値に関して場合分けをして示す.

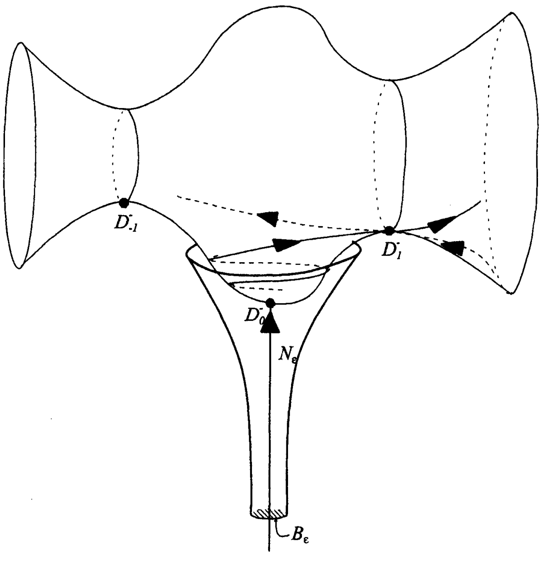

図 2　B_ε と N_ε

■$\nu - \frac{\rho}{2\beta} < 0$ の場合　$P \in W^s(D_0^-)\backslash\mathcal{M}$ をとる. Let $a = \Psi(P)$ とする. P の小さな近傍

$$B_\varepsilon = \{Q \in \mathbb{R}^3 \mid |P - Q| < \varepsilon\} \qquad (0 < \varepsilon \ll 1)$$

をとり, 各 $Q \in B_\varepsilon$ に対して

$$a - 1 \leq \Psi(Q) \leq a + 1 \tag{14}$$

が成立するとする. $\varphi_\tau(\theta, z, w)$ を微分方程式の流れ (flow) とすると, 第一積分は解にそって保存されるので, (14) は

$$N_\varepsilon = \{\varphi_\tau(Q) \mid \tau \geq 0, Q \in B_\varepsilon\}.$$

の点でも成立する. 関数の連続性より, (14) は N_ε の閉包 $\overline{N}_\varepsilon$ でも成立する. $\overline{N}_\varepsilon$ は $W^u(D_0^-)$ を含む. $W^u(D_0^-)$ は $\mathcal{M}$ の開部分集合である. z は Q が $\mathcal{M}$ に近づくとき, 0 に近づく. 従って, γ_μ は $W^u(D_0^-)$ 上で 0 でないといけない. 解析性より $\gamma_\nu(\theta, w)$ が恒等的に 0 であることがわかる. 従って, $\nu - \frac{\rho}{2\beta} < 0$ ではない.

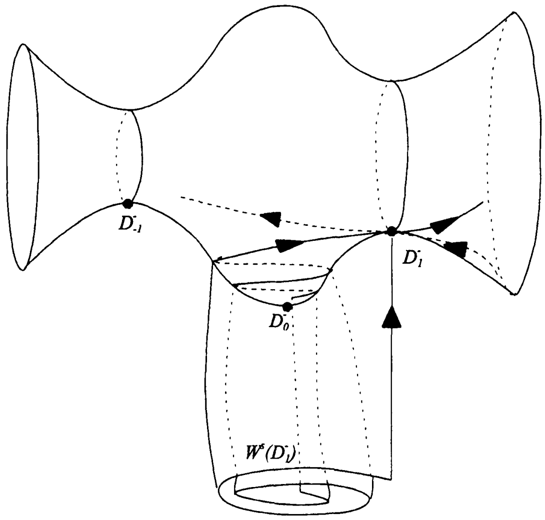

図 3　D_1^- の安定多様体

■$\nu - \frac{\rho}{2\beta} > 0$ の場合　$V(\theta_1) \leq V(\theta_{-1})$ の場合を考える. 不等式の向きが逆の場合も, まったく同様である. $Q \in W^s(D_1^-)\backslash\mathcal{M}$ を任意にとる. Q を通る軌道に関する第一積分の値は c とする. つまり,

$$\Psi(\varphi_\tau(Q)) = c$$

が任意の τ について成立する. τ が $+\infty$ に発散するときに, その z 成分は 0 に収束する. 従って, c は 0 でないといけない. よって, $g(Q)$ は各 $Q \in W^s(D_1^-)\backslash\mathcal{M}$ において 0 である. $W^s(D_1^-)\backslash\mathcal{M}$ の閉包は $W^s(D_1^-)$ を含む. 連続性から $g(Q)$ は $W^s(D_1^-)$ 上で 0 である.

$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}(\theta_1) < 0$ だから, 平衡点 D_1^- は双曲的で, $\mathcal{M}$ 上に 1 次元の安定多様体と 1 次元の不安定多様体をもつ. 定理の 6 番目の仮定から, D_0^- 近傍の $\mathcal{M}$ 上での振る舞いは, 安定フォーカスである. $\mathcal{M}$

上の流れは擬勾配的であることから, $W^u(D_1^-)\cap\mathcal{M}$ は D_0^- に巻き付きながら収束する. g はその渦巻き線の上で 0 である. 再び解析性より, $\gamma_\nu(\theta,w)\equiv 0$ が導かれる. 従って, $\nu-\frac{\rho}{2\beta}>0$ でない.

■$\nu-\frac{\rho}{2\beta}=0$ の場合 γ_ν は $W^s(D_1^-)$ 上である定数 c である. $\Phi-c$ もまた第一積分であり, $z=0$ で恒等的に 0 である. もし $\Psi-c$ が恒等的に 0 でないとすると, $\Psi-c$ を z についてある有限位数の零点である. 従って, $\Psi-c$ を考えると $\nu-\frac{\rho}{2\beta}>0$ の場合に帰着する.

$\beta>0,\beta<-2$ の場合は, 基本的に同じである. 結局は, 第一積分があれば, 平衡点の安定多様体か不安定多様体上で 0 になることが分かり, それらの多様体の振る舞いから第一積分がないことがわかる.

4.4 応用

■二等辺 3 体問題 平面 3 体問題において 2 質点は等質量であるとする. 等質量の 2 質点が y 軸に対して常に対称的な位置にあり, 残りの質点は常に y 軸上にある運動のみを考える (図 4). この

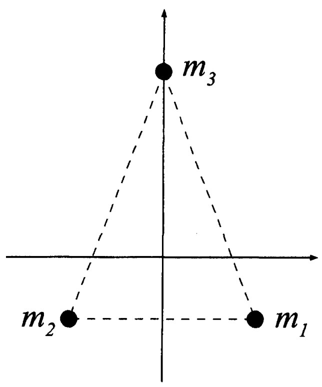

図 4 二等辺 3 体問題

ような運動のみに限定して考えた 3 体問題を二等辺 3 体問題という.

等質量の 2 質点の質量を m とし, 常に y 軸上に位置する質点の質量を αm とする. この問題は, ハミルトニアン

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q})=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)-\frac{1}{q_1}-\frac{4\alpha^{3/2}}{\sqrt{\alpha q_1^2+(\alpha+2)q_2^2}}$$

に関するハミルトン系である.

これに対して, 定理 2 を適用することで, 次が得られる.

定理 3. *$\alpha<\frac{55}{4}$ ならば, 二等辺 3 体問題は有理型の第一積分を持たない.*

実際に, $\alpha<\frac{55}{4}$ の場合は, 無限個のヘテロクリニック軌道が存在するなど, 複雑なダイナミクスになっている [18, 32].

■対称 4 次ポテンシャル ハミルトニアン

$$H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2) - \frac{1}{4}(q_1^4+q_2^4) - \frac{\varepsilon}{2}q_1^2q_2^2, \tag{15}$$

を考える. これは, 吉田春夫氏の本や論文 [39, 42, 43] にある例である. 可積分性の判定基準の良さを調べるのに大変適した例である. この例に定理 2 を応用することで, 次が得られる.

定理 4. $\varepsilon < -\frac{1}{8}$ か $\varepsilon > \frac{25}{7}$ であれば, ハミルトニアン (15) は有理型の第一積分を持たない.

4.5 Morales-Ramis 理論との比較

いくつかの点に関して, Morales-Ramis 理論との比較をしてみる.

■ポテンシャルの次数 定理 2 では, ポテンシャル次数 β に関して $\beta=-2,0$ の場合を除外していた. Morales-Ramis 理論の斉次ハミルトン系への応用 [20] では $\beta=-2,0,2$ の場合が除外される. 注意 1 より, $\beta=-2$ の場合は可積分なので, 除外されて当然である. $\beta=0$ の場合は, どちらの結果も何も示していない. $\beta=2$ の場合については, Morales & Ramis[20] は何も示さなかったが, 定理 2 は適用できる. 最近, Maciejewski 氏により Morales-Ramis 理論を発展させ高次の変分方程式を解析することで, $\beta=2$ の場合の可積分系は, ある非共鳴条件のもとで線形の場合に限ることが最近示された (未出版?). 定理 2 では, そこまでは強い主張ではないが, 証明の中で $\beta=2$ が特に困難となるような特殊性は全くない.

■関数のクラス Morales-Ramis 理論は, 関数論を本質的に使うので, ハミルトニアンや存在の有無が問われる第一積分は複素関数としての有理型関数に限られる. 定理 2 では, ハミルトニアンや第一積分は, 実数の範囲で有理型であればよい.

■吉田係数 自由度 2 の斉次ハミルトン系の場合, V で述べると, Darboux 点に対応する点では

$$\frac{\partial V}{\partial \theta}(\theta_c) = 0$$

が成立している. その点での非自明な吉田係数は

$$\lambda = \beta^{-1}V(\theta_c)^{-1}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}(\theta_c) + 1$$

である.

定理 2 では, 仮定 6 は λ を用いると

$$-\frac{1}{8}(\beta+2)^2 > (\lambda-1)\beta,$$

と表せる. 定理の述べ方を変えると, ハミルトニアンが可積分で, 定理 2 の仮定 1-5 を満たしていると

$$-\frac{1}{8}(\beta+2)^2 \le (\lambda-1)\beta. \tag{16}$$

が成立する．

各 β について，定理 2 から得られる (16) と Morales-Ramis のリストを比べてみると，後者の方が狭い．つまり，この観点では，Morales-Ramis の方がよい．例えば，$\beta = -1$ の場合，Moreles-Raims によると，可積分ハミルトン系の吉田係数は

$$\{-\frac{1}{2}p(p-3) \mid p \in \mathbb{Z}\} = \{1, 0, -2, -5, -9, \ldots\}.$$

に含まれる数であった．定理 2 では，仮定 2-5 のもとで，可積分ハミルトン系の吉田係数は 9/8 未満である．

二等辺 3 体問題の場合だと，Morales-Ramis 理論を適用すると，全ての α に対して第一積分の非存在がいえる．対称 4 次ポテンシャルのときは，Morales-Ramis 理論を適用すると，$\varepsilon \neq 0, 1, 3$ の場合，第一積分の非存在がいえる．同じ結果は Ziglin 解析でも得られる [39]．$\varepsilon = 0, 1, 3$ の場合は可積分であることが分かっている．

■証明法 Morales-Ramis 理論では，関数論の枠組みで考え，解の解析接続から現れる群構造を通して，非可積分性が示される．非可積分性であるということは，おそらくカオス的な現象が起こっているはずだが，そのような力学系に関する情報は何も与えてくれない．

一方，ブローアップによる証明では，安定多様体や不安定多様体の振る舞いが本質的な役割を果たしている．安定多様体や不安定多様体は力学系の構造と深く関わる．従って，力学系的性質と深く関連する証明となっていると言える．

謝辞 本研究は住友財団 基礎科学研究助成 (No. 111153 『特異点のブローアップによる可積分性の判定』) と日本学術振興会 科学研究費助成 若手研究 (B) (No. 40467444 『変分法による多体問題の研究』) の支援を受けた．

参考文献

[1] A. Albouy & V. Kaloshin, Finiteness of central configurations of five bodies in the plane, *Ann. of Math. (2)*, **176** (2012), 535–588.

[2] V. I. アーノルド, 古典力学の数学的方法, 岩波書店, 1980.

[3] V. I. Arnol'd, V. V. Kozlov & A. I. Neishtadt, Dynamical systems. III., Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 3. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[4] H. Bruns, , Über die Integrale des Vielkörper-Problems, *Acta Math.*, **11** (1887), 25–96.

[5] J. Féjoz, Jacques Démonstration du 'théorème d'Arnold' sur la stabilité du système planétaire (d'après Herman), *Ergodic Theory Dynam. Systems* **24** (2004), 1521–1582.

[6] A. R. Forsyth, Theory of Differential Equations, Vol. 3 chap. 17, 1900.

[7] 深谷賢治, 解析力学と微分形式, 岩波書店, 2004.

[8] V. V. Golubev, Lectures on integration of the equations of motion of a rigid body about a fixed point. the Israel Program for Scientific Translations, 1960.

[9] Y. Hagihara, Celestial Mechanics 1, 1968.

[10] M. Hampton & R. Moeckel, Finiteness of relative equilibria of the four-body problem, *Invent. Math.* **163** (2006), 289–312.

[11] 伊藤秀一, 常微分方程式と解析力学, 共立出版, 1998.

[12] S. Kovalevskaya, Sur Le Probleme De La Rotation DÚn Corps Solide Autour DÚn Point Fixe, *Acta Math.*, **12** (1889), 177–232.

[13] S. Kowalevski, Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, *Acta Math.* **14** (1890), 81–93.

[14] V. V. Kozlov, Integrability and nonintegrability in Hamiltonian mechanics, *Russian Math. Surveys* **38** (1983), 1–76.

[15] A. J. Maciejewski & M. Przybylska, Non-integrability of the three-body problem, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* **110** (2011), 17–30.

[16] A. R. Magid, Lectures on Differential Galois Theory, University Lecture Series, vol. 7, AMS, 1994.

[17] R. McGehee, Triple Collision in the Collinear Three-Body Problem *Invent. Math.*, **27** (1974), 191–227.

[18] R. Moeckel, Heteroclinic phenomena in the isosceles three-body problem, *SIAM J. Math. Anal.* **15** (1984), 857–876.

[19] J. J. Morales-Ruiz, *Differential Galois Theory and Non-Integrability of Hamiltonian Systems*, Birkhaeuser Basel, 1999.

[20] J. J. Morales-Ruiz and J. P. Ramis, A Note on the Non-Integrability of Some Hamiltonian Systems with a Homogeneous Potential, *Methods Appl. Anal.*, **8** (2001), 113–120.

[21] 西岡久美子, 微分体の理論, 共立出版, 2010.

[22] 丹羽敏雄, 力学系, 紀伊国屋書店, 1981.

[23] J. I. Palmore, Classifying relative equilibria. I,*Bull. Amer. Math. Soc.,* **79**(1973) 904–908.

[24] M. van der Put & M. F. Singer Galois Theory of Linear Differential Equations, Springer, 2003.

[25] 大貫 義郎, 吉田 春夫, 力学, 岩波書店, 2001.

[26] H. Poincaré, *New methods of celestial mechanics.* Vol. 1. American Institute of Physics, 1993.

[27] H.Poincaré, Sur le methode de Bruns. *C.R. Acad. Sci. Paris.* **123** (1896), 1224–1228.

[28] 斎藤利弥, 解析力学講義, 日本評論社, 1991.

[29] M. Shibayama, Non-integrability of the collinear three-body problem, *Discrete and Continuous Dynamical Systems-A*, **30** (2011), 299–312.

[30] 柴山允瑠, 古典力学における線形と非線形, 数理科学 2011 年 11 月号.

[31] M. Shibayama, Non-integrability criterion for homogeneous Hamiltonian systems via blowing-up technique of singularities, preprint.
(available at http://www.sigmath.es.osaka-u.ac.jp/~shibayama/list.html)

[32] M. Shibayama & K. Yagasaki, Heteroclinic connections between triple collisions and relative periodic orbits in the isosceles three-body problem, *Nonlinearity*, **22** (2009), 2377–2403.

[33] E. Julliard Tosel, Bruns' theorem: the proof and some generalizations, *Celestial Mech. Dynam. Astronom.* **76** (2000), 241–281.

[34] 梅村浩, ガロア/偉大なる曖昧さの理論, 現代数学社, 2011.

[35] 梅野健, 積分不可能性判定条件, 数理科学 1995 年 6 月号.

[36] E. T. Whittaker, *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, Cambridge University Press, 1988.

[37] Z. Xia, Central configurations with many small masses, *J. Differential Equations*, **91** (1991), 168–179.

[38] 吉田春夫, コワレフスカヤのコマ, 数理科学 1981 年 1 月号

[39] H. Yoshida, Existence of Exponentially Unstable Periodic Solutions and the Non-Integrability of Homogeneous Hamiltonian Systems, *Phys. D*, **21** (1986), 163–170.

[40] H. Yoshida, A Criterion for the Non-existence of an Additional Integral in Hamiltonian Systems with a Homogeneous Potential, *Phys. D*, **29** (1987), 128–142.

[41] 吉田春夫, 微分ガロア理論による可積分性の必要条件, 数理科学 1999 年 8 月号

[42] 吉田春夫, 力学, 岩波書店, 2001.

[43] 吉田春夫, 力学の解ける問題と解けない問題, 岩波書店, 2005.

[44] S. L. Ziglin , Bifurcation of Solutions and the Nonexistence of First Integrals in Hamiltonian Mechanics. I. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, **16** (1982), 30–41, 96.

[45] S. L. Ziglin, Bifurcation of Solutions and the Nonexistence of First Integrals in Hamiltonian Mechanics. II. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, **17** (1983), 8–23.