数理解析研究所講究録
第 1827 巻 2013 年 24-32

Random dynamics from time series

佐藤譲* (北海道大学・電子科学研究所 / 理学院数学専攻)
Yuzuru Sato (RIES / Department of Mathematics, Hokkaido University)

1 雑音誘起現象

雑音誘起現象とは、力学系の自然測度がノイズにより大幅に変化し、決定論極限で観測されなかったふるまいがノイズ存在下で観測されるようになる現象である。よく知られた雑音誘起現象である (a) 確率共鳴 [1, 2]、(b) ノイズ同期 [3, 4]、(c) 雑音誘起カオス [5, 6] は、いずれも緩急のついた運動を引き起こす不変多様体や、カオティックサドルといった不変集合と外部ノイズとの相互作用により生じる。

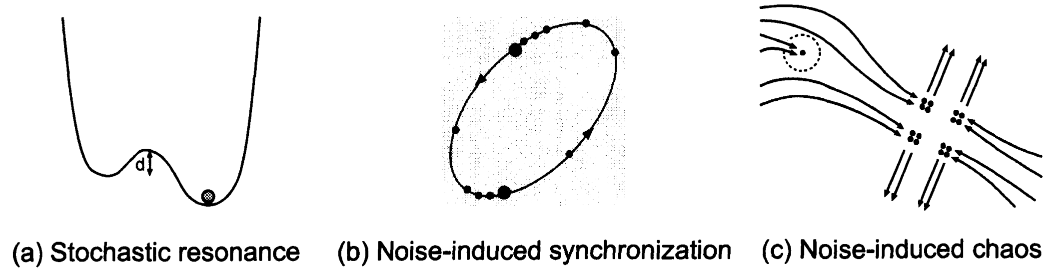

図 1: 雑音誘起現象の生じる力学系の状態空間の構造。(a) 確率共鳴: 勾配系のポテンシャルバリア。(b) ノイズ同期: 振動子系のリミットサイクル上の淀み構造。(c) 雑音誘起カオス: カオス的力学系のカオティックサドルと安定周期解。

とくに決定論的力学系がカオス的、あるいは潜在的にカオス的である場合、非自明な雑音誘起現象が生じることが知られている [14, 15, 16, 17, 18, 19]。この現象の数学的な解析は困難であり、ノイズ付き力学系についての力学系理論的な研究は

*ysato@math.sci.hokudai.ac.jp

少ない。一方、近年神経系 [7] や生体リズム [9]、流体乱流 [8] を含む様々な系で雑音誘起現象が実験的に観察されはじめており、ノイズの伴う力学系で生じる非線形現象が注目を集めている。現代的には Fokker-Planck 方程式や Perron-Frobenius 作用素に基づく静的な定常分布の解析だけでなく、ランダム力学系理論 [20] に基づく軌道束の動力学を含めた現象論構築が必要とされている。

本論文ではこのような視点に基づく実験データ解析とその意義について考察する。

2 リターンプロット

不規則時系列の解析法の一つとして、リターンプロットという方法がよく知られている。一次元の時系列データ $\{x_n\}$ に対して遅延座標 (x_n, x_{n+1}) を二次元表示し、x_n と x_{n+1} の間の因果構造 $x_{n+1} = f(x_n)$ を観察する、という極めて簡素な分析法である[1]。

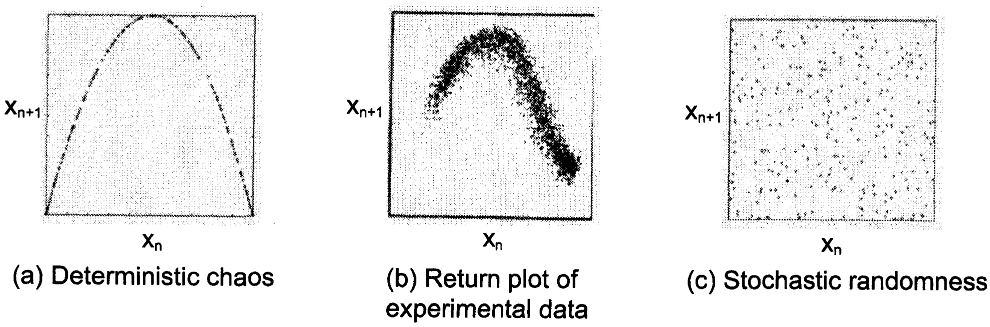

図 2: 時系列のリターンプロット。(a) 一次元写像のカオス $x_{n+1} = f(x_n)$。(b) 非線形現象の実験時系列のリターンプロット [24]。(c) 因果構造のないランダム系列。

図 2(a) のように不規則時系列の生成規則 f が大幅に圧縮可能であったなら、その系はカオス的であるとみてよい。図 2(b) のように圧縮不能であるならランダム系列であるか、あるいは高次元の因果構造を持っている可能性がある。このような観点からのカオス力学系研究としては Kolmogorov/Martin-Röf ランダムネスに関する Brudno complexity[11]、時系列のランダム性検定の研究として Wayland test[12]

[1] 力学系理論における Poincare 面、再帰写像などの数学的基礎づけは、直接は議論できない。出発点は時系列データであり、現象の背景知識はあっても、具体的な発展方程式はわかっていない。通常 Poincare 面や Time-T 写像などの存在を仮定して解析が行われる。

などがある。そもそもカオス研究は不規則運動の決定論記述 [10] という動機を持って始まったので、この切り口は自然である。この考え方をさらに進めたものが埋め込み理論 [13] であり、これは後の非線形時系列解析論へと発展した。こういった研究はとくに基礎方程式が不明な系 (あるいは基礎方程式からの演繹的分析があまり意味をなさない大規模系) の現象論的解析に貢献した。リターンプロットはまた、数学の世界でしか興味を持たれていなかった一次元写像の動力学の実在性を、多くの科学者に認識させた。

リターンプロットで図 2(a) のような構造が得られたなら、少数自由度力学系による現象論モデルの構築を試みてもよいだろう。一方図 2(c) のような図が得られた場合、確率論や確率過程論的なアプローチが妥当である。前者は決定論的理想極限での記述であり、後者は確率論的理想極限での記述である。一方で現実の非線形現象の実験時系列データから構築されたリターンプロットは、ほとんど常に、図 2(b) のような (a), (c) 両者の中間の構造を持っている。どう考えればよいか。リターンプロットは変数変換でデータ表示を変えただけのもの (あるいはデータそのもの) であり、その因果関係の同定は観察する側にゆだねられている。図 2(b) にみてとれる因果関係の「厚み」を無視して、対象を低次元の力学系 $x_{n+1} = f(x_n)$ で近似し、分岐や統計性などを解析してもよいかもしれない。しかしマクロな非線形現象としてのカオスは下位の大自由度力学系の集団運動として観察される場合がほとんどである。この集団運動が低次元的な様相を示していたとしても、例えばシステムへのミクロな外力に対する振る舞いを、そのモデルに基づいて本当に正しく理解できるかどうか不安が残る。

ここでは、モデルを

$$x_{n+1} = f(x_n, \xi_n) \tag{1}$$

というランダム力学系で与える。変数 ξ_n はある確率分布に従う確率変数であり、大きなゆらぎ幅を持っていてもよい。変数 ξ_n は通常、スケールの異なるダイナミクスからの寄与、不定な外力、観測ノイズ、実験ノイズ、連続近似の有限ゆらぎなどと解釈される。因果関係 f は例えば多スケール計測された高次元データから同定される。システムが線形であることを仮定すればこれは確率過程の推定の問題となり、確率的記述の範疇に収まる。完全な決定論的記述としての大自由度系モデリングは原理的に可能ではあるが、高次元の時空構造の埋め込み解析はほぼ不可能である。以上の議論に基づいて決定論変数が少数であるようなランダム力

学系モデリングを考察しよう。

このランダム力学系モデル (1) で決定論変数と確率変数 (x_n, ξ_n) をデータからどう定めるか。これは重要な問題であるが、一般に非線形な大自由度系では決定論変数と確率変数の分離は困難である[2]。適当な方法である程度は主要変数を同定できるかもしれないが、スケール干渉があるような大自由度系で、低次元の因果関係をなす変数群をデータから精密に絞りこむのは容易ではない[3]。

第1節で述べた雑音誘起現象は、ノイズの起源を考慮にいれれば、決定論変数と確率変数の分離記述が自明でない場合に生じる現象である、ともいえる。この観点から考えると、注目しているスケールでの観測量 x_n とそれ以外の不定要因の相互作用についてランダム力学系モデル (1) を立て、x_n の動力学を雑音誘起現象として分析する、というアプローチが有効な解析法になると期待されよう。このアプローチには、ランダム力学系の分岐や確率的安定性 [21]、物理的に意味のある不変量の概念化とその計量、計算機実験の方法と擬軌道追跡性、現象論構築と普遍性の考察など、現在までほとんど研究されてこなかった理論や概念、手法などが必要となる。近年みいだされた多様な雑音誘起現象が体系的に理解されれば、詳細にすぎる大自由度決定論記述と、粗すぎる確率的記述の中間の記述力を持つ理論が得られるのではないだろうか。とくに集団運動の動力学に興味があり、システムの詳細に興味が無い場合、このアプローチが有効である可能性が高い。

3 実験時系列データからのランダム力学系の抽出

ここで大自由度系の実験データで第2節の方法がある程度うまくいった研究例を紹介する。いずれも単純な低次元の雑音誘起現象に基づいて解析された。

1. 回転流体系の時系列解析 [8].

一つの円筒内で側面を固定し底面のみ回転させる回転流体系において、速い回転流れの表面の形状がゆっくりと不規則に変動するスイッチン

[2] そもそもデータから決定論変数と確率変数が容易に分離可能ならば、その系は大自由度系でないか、非線形系でないかのどちらかであろう。

[3] これは意味のある別の統計学的問題となるかもしれないが、あるデータのランダム性を厳密に判定するのは究極的に不可能であることに注意するべきである。仮にこの同定ができたとしても、モデルを解析するためにやはりランダム力学系の現象論が必要になり、とくに現象の普遍性を追求する場合には、データに過度に忠実な精密モデルを構成してもあまり意味がない。

グ現象を解析する。間欠的流れの中に生じた表面運動を特徴づける量として表面中心部の底面からの高さ x、高さ x に依存する回転速度場の乱れの強さ $\epsilon(x)$ を同時計測し、x の時系列のリターンプロットから以下のランダム間欠性写像モデルを構成した。

$$x_{n+1} = f(x_n) + \epsilon(x_n)\xi_n, \tag{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} A\left[\frac{1}{1+e^{-\beta_1(x-p)}} - \frac{1}{1+e^{\beta_1 p}} + \frac{1}{1+e^{-\beta_2(x-q)}} - \frac{1}{1+e^{\beta_2 q}}\right] & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}, \tag{3}$$

$$\epsilon(x) = B\left[\frac{e^{\beta_3 r} - e^{-\beta_3(x-r)}}{(1+e^{-\beta_3(x-r)})(1+e^{\beta_3 r})} + \frac{1-e^{-\beta_4 x}}{2(1+e^{-\beta_4 x})} + \delta\right]. \tag{4}$$

ξ_n は回転系乱流部からの撹乱で白色ガウス雑音 $N(0,1)$ である。このランダム力学系は、遅い決定論項と早い確率項の干渉が生じる多スケール系の間欠的ダイナミクスのモデルである。パラメーターは例えば $A = 0.38, B = 0.04, \beta_1 = 200, \beta_2 = -20, \beta_3 = 15, \beta_4 = 50, p = 0.0215, q = 0.39, r = 0.4, \delta = 10^{-8}$ とした。乱流部からの撹乱の大きさ B の変化にともなう表面運動の分岐を解析し、実験で観察されている乱れの強さのヒステリシスを再現した。詳細は文献を参照されたい。

2. 生体リズムの時系列解析 [9].

自転車のペダリング運動時の心拍-呼吸生理計測において、音楽傾聴時に生じるペダリング運動と心拍の位相差 θ の同期-非同期遷移現象を解析した。不定外力と生体内ノイズを二つの異なる確率変数で記述し、θ の時系列のリターンプロットからランダム円写像モデルを構成した。

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega' + \xi_n - \eta_n \frac{K}{2\pi}\cos(4\pi\theta_n) \pmod{1}. \tag{5}$$

ξ_n は生体ノイズで白色ガウス雑音 $N(0,\sigma^2)$、η_n は音楽入力で二値雑音 $\mathrm{Prob}[\eta=0] = p,\ \mathrm{Prob}[\eta=1] = 1-p$ である。このランダム力学系は、不定外力を受ける大規模振動子系の同期-非同期ダイナミクスのモデルである。パラメーターは例えば $\omega' = 0.15,\ K = 0.8,\ \sigma = 0.05,\ p = 0.28$ とした。位相差の回転数を計測して実験との定性的一致を確認し、二値雑音の p 値の変化にともなって同期-非同期遷移が生じるメカニズムを解析した。詳細は文献を参照されたい。

近年の実験技術の進歩にともない、大自由度系の多スケール計測データが比較的容易に手に入るようになってきている。こういった実験時系列データに基づいて、ランダム力学系モデルを構成することを通して、ランダム力学系の非線形現象論を深化させていきたい。

4 まとめと展望

この研究からランダム力学系で普遍性を持つ複雑現象の探索という新たな問題も提起される。それらは大自由度力学系の集団運動のある種の「射影」になっているはずである。カオスは決定論力学系の概念であり、低次元カオスとストレンジアトラクタについてはかなりの部分が数学的に解明されている。一方でランダム力学系のストレンジアトラクタの物理的性質はそれほど明らかになっておらず、数値実験を含むランダムストレンジアトラクタの性質の具体的な解析 [22, 23] は、今後のランダム非線形現象研究の milestone となる可能性がある。

現状では、ランダム力学系理論は力学系理論とエルゴード理論の形式的な拡張と体系構築に終始し、諸分野への応用例がほとんどないため[4]、数理科学としての迫力に欠ける理論にとどまっている。力学系理論の非線形現象への具体的な応用が、力学系理論自体の数学的発展に貢献したように、本稿で考察したような現象論的アプローチが、ランダム力学系理論への有意義なフィードバックを起こすことも期待できるだろう。

ランダム力学系理論の情報理論、計算論、制御論的問題への応用にも興味が持たれる。カオスの情報理論 [24] はランダム力学系理論に基づいて再考察されてよい問題である。ランダムネスや計算複雑性の研究でもこのアプローチに基づく発展があるかもしれない [25]。制御系への応用に関しては、ノイズ付き力学系の部分的な制御 (Partial control) に関する研究がなされている [26]。

この問題の考察にあたり、データの提供と有意義な議論をしていただいた共同研究者の田坂裕司氏 (北海道大学)、飯間信氏 (広島大学)、北城圭一氏 (理科学研究所)、松本和宏氏 (ヤマハ発動機) に感謝します。

[4]力学系が全て縮小的である縮小写像系 (Iterated function systems) の理論が例外であるが、限定的にすぎる。

参考文献

[1] R. Benzi, G. Parisi, A. Sutera, and A. Vulpiani, "Stochastic resonance in climatic change," *Tellus*, **34**, p10-16 (1982).

[2] L. Gammaitoni, P. Hanggi, P. Jung, F. Marchesoni, "Stochastic resonance," *Reviews of Modern Physics*, **70:1**, p223-287 (1998).

[3] A. S. Pikovsky, in Nonlinear and Turbulent Processes in Physics, edited by R. Z. Sagdeev, Harwood, Singapore, p1601 (1984).

[4] J. Teramae and D. Tanaka, "Robustness of the Noise-Induced Phase Synchronization in a General Class of Limit Cycle Oscillators," *Phys. Rev. Lett.*, **93:20**, 204103 (2004).

[5] G. Mayer-Kress and H. Haken, "The influence of noise on the logistic model," *Journal of Statistical Physics*, **26**, p149-171 (1981).

[6] T. Tel and Y.-C. Lai, "Quasipotential approach to critical scaling in noise-induced chaos," *Physical Review*, **E 81**, 056208 (2010).

[7] Z. F. Mainen and T. J. Sejnowski, "Reliability of spike timing in neocortical neurons," *Science*, **268**, p1503-1506 (1995).

[8] Y. Tasaka and M. Iima, "Flow transitions in the surface switching of rotating fluid," *J. Fluid. Mech.*, **636**, p475 (2009); Y. Sato, M. Iima and Y. Tasaka, "Random dynamics from time-serieses of rotating fluid," Hokkaido University Preprint Series in Mathematics, #979 (2011).

[9] Y. Sato and K. Matsumoto, "Random dynamics from time-serieses of physiological rhythms," Hokkaido University Preprint Series in Mathematics, #1012 (2012); Y.Sato, K. Matsumoto, K. Kitajo, in preparation (2012).

[10] E. N. Lorenz, "Deterministic nonperiodic flow," *J. Atmospheric Sciences*, **20**, p130-141, (1963).

[11] A. A. Brudno, "Entropy and the complexity of the trajectories of a dynamical system," *Trans. Moscow Math. Soc.*, **2** p127-151 (1983).

[12] R. Wayland, D. Bromley, D. Pickett, and A. Passamante, "Recognizing determinism in a time series," *Phys. Rev. Lett.*, **70** p580-582 (1993).

[13] N. Packard, J. P. Crutchfield, J. D. Farmer, and R. S. Shaw, "Geometry from a time series," *Phys. Rev. Lett.*, **45:9**, p712-716 (1980).

[14] J. P. Crutchfield, J. D. Farmer, and B. A. Huberman, "Fluctuations and simple chaotic dynamics," *Physics Letters* **92:2**, p45-82 (1982).

[15] K. Matsumoto and I. Tsuda, "Noise-induced order," *Journal of Statistical Physics*, **31**, p87-106 (1983).

[16] A. Lasota and M. C. Mackey, "Noise and statistical periodicity," *Physica*, **D 28**, p143-154 (1987).

[17] 佐藤譲、「一次元写像の雑音誘起現象」、京都大学数理解析研究所講究録、1688、p137 (2009).

[18] Y. Sato and D. Albers, "Noise-induced bifurcation in one-dimensional map," in preparation, (2012).

[19] Y. Sato and Y. Iwata, "Noise-induced statistical periodicity in one-dimensional map," in preparation, (2012).

[20] A. Lasota and M. Mackey, "Chaos, Fractals, and Noise," Springer, (1991).

[21] L. S. Young, "Stochastic stability of hyperbolic attractors," *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **6**, p311-319, (1986).

[22] K. Lin and L.-S. Young, "Shear-induced chaos," *Nonlinearity*, **21**, p899-922 (2008).

[23] M. D. Chekroun, E. Simonnet, and M. Ghil, "Stochastic climate dynamics: Random attractors and time-dependent invariant measures," *Physica*, **D 240**, p1685-1700 (2011).

[24] R. Shaw, "The Dripping Faucet as a Model Chaotic System," Aerial Press, Santa Cruz, California, (1984).

[25] C. Moore and S. Mertens, "The Nature of Computation," Oxford University Press, (2011).

[26] S. Zambrano,M. A. F. Sanjuan, and J. A. Yorke, "Partial control of chaotic systems," *Phys. Rev.*, **E 77**, 055291(R) (2008).