

一般化スペクトル理論と蔵本モデルのダイナミクス

九州大学 MI 研究所 (Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University)

千葉逸人 (Hayato CHIBA)

chiba@imi.kyushu-u.ac.jp

Nov 14, 2012

1 序文

線形作用素のスペクトル理論は関数解析における中心的な話題の一つであり、特に微分方程式の解の漸近挙動を調べるための主要な道具である。次の線形微分方程式を考えよう。

$$\frac{du}{dt} = Tu. \tag{1.1}$$

ここで u はあるベクトル空間 X の元、 T は X 上の線形作用素である。 X が有限次元のときは、これは線形常微分方程式に他ならない。この場合、よく知られているように、解の漸近挙動は T のスペクトル、すなわち固有値の集合によって完全に特徴づけられる。例えば全ての固有値が左半面に含まれているならば、任意の解は指数的に 0 に収束する。一方、 X が無限次元ベクトル空間のときはどうだろうか。適当なクラスの X と T に対しては、有限次元の場合と同様に T のスペクトルが解の漸近挙動を決定するが、スペクトルだけでは捉えられない挙動を持つ方程式も数多く知られている。例えば T のスペクトルが全て左半面に含まれているにも関わらず解が指数的に発散するような例が存在する。また、 T が左半面にまったくスペクトルを持たないにも関わらず、解がある種の指数的減衰を示すことがある。このような例は、プラズマ物理においては Landau 減衰として古くからよく知られている [4]。ここでの目的は Gelfand の 3 つ組と呼ばれる線形位相空間の組を導入することで線形作用素のスペクトルの概念を一般化し、これを微分方程式の解の漸近挙動の研究に応用することである。

この節では、どのようにして Gelfand の 3 つ組が導入され、それが微分方程式の研究に用いられるのか、そのアイデアを具体例と共に示したい。 $L^2(\mathbf{R})$ 上で ix を乗じる掛け算作用素を $M: \phi(x) \mapsto ix\phi(x)$ とおく。 M のスペクトルは連続スペクトルのみからなり、それは虚軸全体となる: $\sigma(M) = i\mathbf{R}$ 。スペクトルの定義から、レゾルベント作用素 $(\lambda - M)^{-1}$ は右半面と左半面では λ についての関数として正則であるが、虚軸上では ($L^2(\mathbf{R})$ 上の作用素として) 値が確定しない。ところが、収束や発散は空間の位相の選び方に依存する概念である (ガウス分布は、分散を 0 に持っていく極限において、普通の関数としては発散するが、超関数の位相ではデルタ関数に収束することを思い出そう)。 $L^2(\mathbf{R})$ とは異なる位相を導入することにより、レゾルベントを虚軸上でも収束させることができるだろうか。

これを見るために、適当な関数 $\phi, \psi \in L^2(\mathbf{R})$ をとって内積 $((\lambda - \mathcal{M})^{-1}\phi, \psi)$ を考える。

$$((\lambda - \mathcal{M})^{-1}\phi, \psi) = \int \frac{1}{\lambda - ix} \phi(x)\psi(x)dx.$$

λ が右半面にあるときには右辺の積分は確定するが、これを虚軸に近づけていくと、 $1/(\lambda - ix)$ という因子のため、少なくとも被積分関数は発散する。しかし被積分関数が発散していても、積分値は広義積分として存在し得る。この場合、実は ϕ, ψ が連続関数であれば次の値

$$\lim_{\operatorname{Re}(\lambda) \rightarrow +0} \int \frac{1}{\lambda - ix} \phi(x)\psi(x)dx.$$

が確定する。ここからさらに λ を左半面へ向かって連続的に動かそう。 ϕ, ψ が実軸の近傍の適当な領域で正則ならばそれが可能であり、 $((\lambda - \mathcal{M})^{-1}\phi, \psi)$ の右半面から左半面への解析接続は

$$\int \frac{1}{\lambda - ix} \phi(x)\psi(x)dx + 2\pi\phi(i\lambda)\psi(i\lambda)$$

で与えられる。以下では説明の簡単のために ϕ と ψ は整関数であるとしよう。以上の考察から、

$$R(\lambda; \phi, \psi) = \begin{cases} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\lambda - ix} \psi(x)\phi(x)dx + 2\pi\psi(i\lambda)\phi(i\lambda) & (\operatorname{Re}(\lambda) < 0), \\ \lim_{\operatorname{Re}(\lambda) \rightarrow +0} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\lambda - ix} \psi(x)\phi(x)dx & (\lambda \in i\mathbf{R}), \\ \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\lambda - ix} \psi(x)\phi(x)dx & (\operatorname{Re}(\lambda) > 0), \end{cases}$$

によって関数 R を定めると、 ϕ と ψ が整関数ならば R は λ について整関数となる。そこで X を $L^2(\mathbf{R})$ の部分空間であるクラスの整関数からなるものとし、 X' を X の双対空間、すなわち X 上の連続線形汎関数全体がなすベクトル空間としよう。関数 $\phi \in X$ を選ぶごとに複素数値 $R(\lambda; \phi, \psi)$ が定まるから、写像 $\phi \mapsto R(\lambda; \phi, \psi)$ は X 上の線形汎関数を定める。この線形汎関数を $R(\lambda; \bullet, \psi)$ と表す。 X の位相はこの線形汎関数が連続であるように選ばれているものとする。すると、写像 $\psi \mapsto R(\lambda; \bullet, \psi)$ は X から X' への線形写像 $A(\lambda)$ を定める：

$$\langle A(\lambda)\psi | \phi \rangle = \begin{cases} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\lambda - ix} \psi(x)\phi(x)dx + 2\pi\psi(i\lambda)\phi(i\lambda) & (\operatorname{Re}(\lambda) < 0), \\ \lim_{\operatorname{Re}(\lambda) \rightarrow +0} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\lambda - ix} \psi(x)\phi(x)dx & (\lambda \in i\mathbf{R}), \\ \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\lambda - ix} \psi(x)\phi(x)dx & (\operatorname{Re}(\lambda) > 0). \end{cases} \quad (1.2)$$

ここで X' と X のペアリングに Dirac の記法 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ を用いた。左側が汎関数，右側がテスト関数である。定義の仕方から， λ が右半面にあるときは $A(\lambda) = (\lambda - M)^{-1}$ である。そこで， $A(\lambda)$ を M の一般化レゾルベントと呼ぼう。今示したことをまとめよう：

M のレゾルベント $(\lambda - M)^{-1}$ は， $L^2(\mathbf{R})$ から $L^2(\mathbf{R})$ への作用素だと思えば虚軸上で発散するが， X から X' への作用素だと思えば虚軸でも確定し， λ について (X' -値の) 整関数である。

X は $L^2(\mathbf{R})$ の稠密な部分空間であり，その埋め込みは連続であるとする。すると， $L^2(\mathbf{R})$ の双対空間は X' に連続的に埋め込める。ところが $L^2(\mathbf{R})$ は Hilbert 空間なので自分自身の双対と同型である。その同型対応を通して，

$$X \subset L^2(\mathbf{R}) \subset X' \quad (1.3)$$

なる空間の 3 つ組が得られる。これを Gelfand の 3 つ組，あるいは rigged Hilbert space という。

スペクトルの概念は次のようにして一般化される。一般に， \mathcal{H} を Hilbert 空間， T をその上の線形作用素とする。 T のスペクトルとは，レゾルベント $(\lambda - T)^{-1}$ の特異点集合のことであった。 T は連続スペクトルを持つと仮定しよう。上と同様の手続きにより，うまい空間 X を見つけることができ， X から X' への作用素としては $(\lambda - T)^{-1}$ が連続スペクトルを越えて解析接続 \mathcal{R}_λ を持つことが示せたとする。一般に， \mathcal{R}_λ の Riemann 面は非自明になり得る。するとこの解析接続 \mathcal{R}_λ が，最初の複素平面とは異なる Riemann 面のシート上に新たな特異点を持つかもしれない。これを一般化スペクトルと呼ぶことにする。定義上，一般化スペクトルは固有値とは異なるが，固有値に近い働きをされると考えられる。これが，通常のスぺクトル理論では分からなかった情報を提供してくれるのである。

特に，微分方程式の解の挙動へは次のようにして応用される。今，空間 X は Banach 空間で，作用素 T は C^0 半群 e^{Tt} を生成するとしよう。よく知られているように，半群は Laplace 逆変換の公式を用いて

$$e^{Tt} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-iy}^{x+iy} e^{\lambda t} (\lambda - T)^{-1} d\lambda \quad (1.4)$$

と表すことができる。ここで， x は T のスペクトルよりも右側にある適当な実数である (図 1(a))。

T が有限次元の行列や角域作用素の場合には，積分路を (例えば) 図 1(b) のように変形させることができ，解の漸近挙動を評価できる。ところが掛け算作用素 $M: \phi(x) \mapsto ix\phi(x)$ のように虚軸全体がスペクトルの場合は，虚軸全体が被積分関数 $e^{\lambda t} (\lambda - T)^{-1}$ の特異点なのだから，積分路を変形することができない。ここで， M に対しては，レゾルベントを X から X' への作用素だと思えば虚軸上の連続スペクトルを越えて左半面への解析接続 $A(\lambda)$

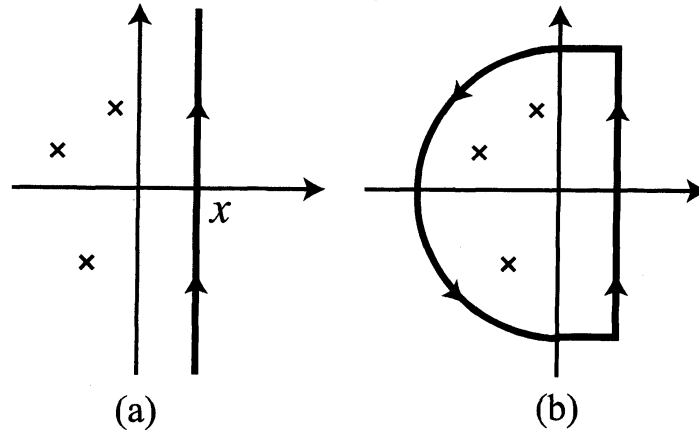


Fig. 1 積分路の変形. ×印は固有値を表す.

を持つことを思い出そう. すなわち, Laplace 逆変換の公式を

$$e^{Tt} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{x-iy}^{x+iy} e^{\lambda t} A(\lambda) d\lambda \quad (1.5)$$

と解釈し直す. そうすれば, 積分路を左半面 (正確には $A(\lambda)$ の 2 枚目の Riemann 面における左半面) へと伸ばすことができる. 一般化レゾルベントの特異点のことを一般化スペクトルと呼ぶのであった. 必要ならば留数定理を併用することで一般化スペクトルまわりの留数を拾いこむことにより, 解の漸近挙動を評価できるようになる.

非自明な例として

$$(T\phi)(x) = ix\phi(x) + K \int_{\mathbf{R}} \phi(x) dx \quad (1.6)$$

により $L^2(\mathbf{R}, g(x)dx)$ 上の作用素 T を定め, 対応する発展方程式 (1.1) を考えよう. ここで $K > 0$ は定数であり, g は標準正規分布だとしておく (正則関数ならば以下の議論は可能である). この形の積分方程式は, 結合振動子系の研究においてしばしば現れる [1, 2]. 詳細は 4 節で扱うが, T のスペクトルは次のようになっている. $K_c = \sqrt{2/\pi}$ とおく. 任意の K に対して, T の連続スペクトルは M のそれと同様に, 虚軸全体になっている. 固有値について, $K > K_c$ のときは右半面に唯一つの固有値 $\lambda = \lambda(K)$ が存在する. K を減らしていくとこの固有値の実部は単調に減少していき, $K = K_c$ において固有値は連続スペクトルに吸収されて消えてしまう. したがって $0 < K < K_c$ のときは T のスペクトルは虚軸上の連続スペクトルのみからなり, 通常のスぺクトル理論からは漸近挙動は分からない. そこで T の一般化スペクトルを計算してみると (すなわち, 適当な正則関数 ϕ, ψ に対して $((\lambda - T)^{-1}\phi, \psi)$ とその解析接続を計算し, その特異点を探すと), 左半面に一般化スペクトルが存在することが分かる. 実は消滅したように見える固有値は, 図 2 のように T の一般化レゾルベントの 2 枚目の Riemann 面のほうに潜り込んでいる. そこで Laplace 逆変換の公式において積分路を 2 枚目の Riemann 面のほうに変形させて留数定理を用いると,

(1.1) の解 $u(t)$ が X' の位相において指数的に減衰することが示せる。これは普通のスペクトル理論では分からなかったことである。この論説では線形方程式のみを扱うが、一般化スペクトル理論は非線形関数方程式の解析にも有効であり、今後様々な応用が期待される [1, 2].

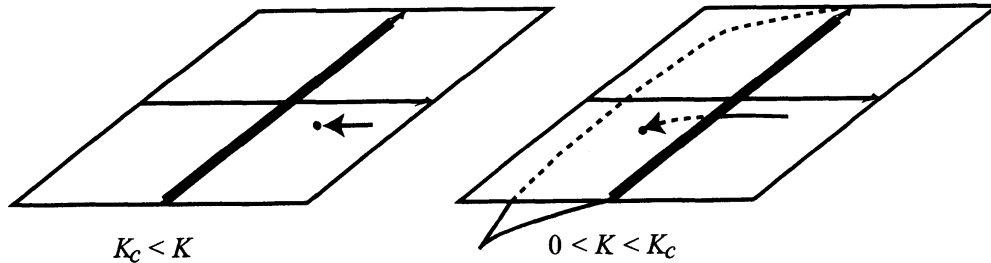


Fig. 2 パラメータ K を減らしていったときの固有値の動き. $K > K_c$ のときは普通の意味での固有値として存在しているが, $0 < K < K_c$ のときは複素平面とは異なる Riemann 面のシート上にあり, 一般化固有値になる.

次の節から, 以上のアイデアを抽象的な状況で厳密化していく. この論説を通して $D(\cdot)$ と $R(\cdot)$ はそれぞれ作用素の定義域, 値域を表すものとする.

2 Gelfand の 3 つ組

X を \mathbb{C} 上の局所凸 Hausdorff 線形位相空間, X' をその双対空間とする. X' は X 上の連続な歪線形汎関数の全体がなすベクトル空間である. $\mu \in X'$ と $\phi \in X$ に対し, $\mu(\phi)$ を Dirac の記法を用いて $\langle \mu | \phi \rangle$ と表すことにする. 任意の $a, b \in \mathbb{C}$, $\phi, \psi \in X$ と $\mu, \xi \in X'$ に対し, 等式

$$\langle \mu | a\phi + b\psi \rangle = \bar{a}\langle \mu | \phi \rangle + \bar{b}\langle \mu | \psi \rangle, \quad (2.1)$$

$$\langle a\mu + b\xi | \phi \rangle = a\langle \mu | \phi \rangle + b\langle \xi | \phi \rangle, \quad (2.2)$$

が成り立つ. 双対空間 X' にはいくつかの位相の入れ方があり, 最もよく使われるのは弱位相 (弱*位相) と強位相 (強*位相) である. 各 $\phi \in X$ に対して $\langle \mu_j | \phi \rangle \rightarrow \langle \mu | \phi \rangle$ が成り立つとき, 点列 $\{\mu_j\} \subset X'$ は $\mu \in X'$ に弱収束すると言う. 一方, X の任意の有界集合上で一様に $\langle \mu_j | \phi \rangle \rightarrow \langle \mu | \phi \rangle$ であるとき, $\{\mu_j\} \subset X'$ は $\mu \in X'$ に強収束すると言う.

\mathcal{H} を Hilbert 空間, (\cdot, \cdot) をその上の内積とする. X は \mathcal{H} の稠密な部分空間であって \mathcal{H} への埋め込みは連続であるとする. このとき, 双対をとれば \mathcal{H}' が X' に連続に埋め込まれることが分かるが, Hilbert 空間は自分自身の双対と同型であるから, その同型対応を通して $\mathcal{H} \subset X'$ とできる.

定義 2.1. 局所凸 Hausdorff 線形位相空間 X が Hilbert 空間 \mathcal{H} の稠密な部分空間であり,

X の位相が \mathcal{H} の位相よりも強いとき, 3 つ組

$$X \subset \mathcal{H} \subset X' \quad (2.3)$$

を **rigged Hilbert space**, あるいは **Gelfand の 3 つ組** という. 自然な埋め込み $i: \mathcal{H} \rightarrow X'$ は次のように定義される; $\psi \in \mathcal{H}$ に対して $i(\psi)$ を $\langle \psi |$ と書くことにし, それは

$$i(\psi)(\phi) = \langle \psi | \phi \rangle = (\psi, \phi), \quad \phi \in X \quad (2.4)$$

によって定義される.

埋め込み $i: \mathcal{H} \rightarrow X'$ が単射であるための必要十分条件は X が \mathcal{H} の稠密な部分空間であることであり, また i が (弱位相でも強位相でも) 連続であるための必要十分条件は X の位相が \mathcal{H} の位相よりも強いことである (Trèves [9]). したがって定義 2.1 の状況では i は連続かつ単射である. Gelfand の 3 つ組は, Schwartz 超関数の理論を一般化する目的で Gelfand によって導入された [5]. 実際, $X = C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$, $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R}^m)$ のときには Gelfand の 3 つ組は普通の Schwartz 超関数の理論に帰着される.

3 一般化スペクトル理論

Gelfand の 3 つ組に基づいた線形作用素のスペクトル理論を展開しよう. 省いた証明は全て Chiba [3] を参照せよ.

3.1 一般化固有値

\mathcal{H} を \mathbf{C} 上の Hilbert 空間, H を \mathcal{H} 上で稠密に定義された自己共役作用素とし, $\{E(B)\}_{B \in \mathcal{B}}$ をそのスペクトル測度とする: すなわち, H は $H = \int_{\mathbf{R}} \omega dE(\omega)$ とスペクトル表現できる. K を \mathcal{H} 上稠密に定義された作用素とする. ここでの目的は作用素 $T := H + K$ の性質を調べることである. 例えば Schrödinger 作用素に応用したいときは H はラプラシアン, K はポテンシャルである.

$\Omega \subset \mathbf{C}$ を上半面に含まれる単連結領域とし, その閉包と実軸の共通部分を区間 \tilde{I} とする. \tilde{I} から端点を除いて得られる开区間を I とする (図 3). 与えられた作用素 $T = H + K$ に対し, 以下の条件を満たす \mathbf{C} 上の局所凸線形位相空間 $X(\Omega)$ が存在すると仮定する.

- (X1) $X(\Omega)$ は \mathcal{H} の稠密な部分空間である.
- (X2) $X(\Omega)$ の位相は \mathcal{H} の位相よりも強い.
- (X3) $X(\Omega)$ は準完備樽型空間である.

仮定 (X1), (X2) より, Gelfand の 3 つ組

$$X(\Omega) \subset \mathcal{H} \subset X(\Omega)' \quad (3.1)$$

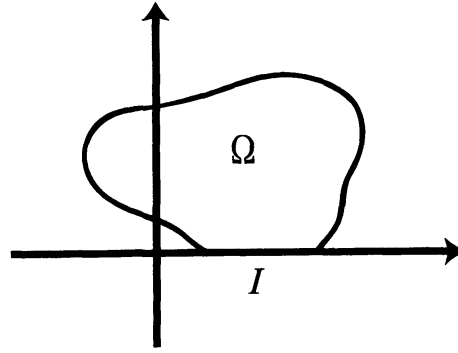


Fig. 3 $E[\psi, \phi](\omega)$ が正則であるような領域 Ω .

が定義できる. 樽型空間の定義は難しいのでここでは述べないが (線形位相空間の用語については Tréves [9] を参照せよ), 任意の Fréchet 空間, Banach 空間, Hilbert 空間は樽型である. Fréchet 空間以外では, C^∞ などに代表される Montel 空間も樽型である. 樽型空間においては Banach-Steinhaus の定理が成り立ち, 特に樽型空間に値をとる正則関数に対しては通常の数論の道具はそのまま使える [3].

次に, H のスペクトル測度 $E(B)$ に対して次の正則性条件を課す.

(X4) 任意の $\phi \in X(\Omega)$ に対してスペクトル測度 $(E(B)\phi, \phi)$ は区間 I 上で絶対連続であり, その密度関数を $E[\phi, \phi](\omega)$ と表すとき, これは領域 $\Omega \cup I$ への解析接続を持つ.

(X5) 各 $\lambda \in I \cup \Omega$ に対し, 双線形形式 $E[\cdot, \cdot](\lambda) : X(\Omega) \times X(\Omega) \rightarrow \mathbf{C}$ は各個連続である.

仮定 (X4) と偏極恒等式から, 任意の $\phi, \psi \in X(\Omega)$ に対して $(E(B)\phi, \psi)$ が I 上絶対連続であることが分かるので, その密度関数を $E[\phi, \psi](\omega)$ と書く:

$$d(E(\omega)\phi, \psi) = E[\phi, \psi](\omega)d\omega, \quad \omega \in I. \quad (3.2)$$

このとき, 関数 $E[\phi, \psi](\omega)$ は $\omega \in I \cup \Omega$ について正則である. 絶対連続であることは I 上でしか仮定しないが, 簡単のため上式の記法を任意の $\omega \in \mathbf{R}$ に対して用いる.

$iX(\Omega)$ を $X(\Omega)$ の $X(\Omega)'$ への埋め込みとする. 線形作用素 $A(\lambda) : iX(\Omega) \rightarrow X(\Omega)'$ を

$$\langle A(\lambda)\psi | \phi \rangle = \begin{cases} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\lambda - \omega} E[\psi, \phi](\omega)d\omega + 2\pi\sqrt{-1}E[\psi, \phi](\lambda) & (\lambda \in \Omega), \\ \lim_{y \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{x + \sqrt{-1}y - \omega} E[\psi, \phi](\omega)d\omega & (\lambda = x \in I), \\ \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\lambda - \omega} E[\psi, \phi](\omega)d\omega & (\text{Im}(\lambda) < 0), \end{cases} \quad (3.3)$$

によって定義すると, λ についての関数 $\langle A(\lambda)\psi | \phi \rangle$ は領域 $\{\text{Im}(\lambda) < 0\} \cup \Omega \cup I$ で正則であることが示せる. 特に $\text{Im}(\lambda) < 0$ なるときは $\langle A(\lambda)\psi | \phi \rangle = ((\lambda - H)^{-1}\psi, \phi)$ であるから, $A(\lambda)$ は普通の意味での H のレゾルベントと一致している. したがって $A(\lambda)$ は, $X(\Omega)'$ に

値をとる作用素として、レゾルベント $(\lambda - H)^{-1}$ を下半面から Ω へ解析接続したものになっている。たとえ H が実軸上に連続スペクトルを持っていてもこれが可能であることに注意せよ。1 節においては虚軸をはさんで右から左への解析接続を構成したが、この違いはもちろん本質的ではない。 $A(\lambda)$ は $iX(\Omega)$ から $X(\Omega)'$ への作用素としては連続作用素でないが、 $X(\Omega)'$ に弱位相を入れたとき、 $A(\lambda) \circ i: X(\Omega) \rightarrow X(\Omega)'$ は連続作用素になる。

最後の仮定を述べるための記号の準備をしよう。 Q を $X(\Omega)$ 上稠密に定義された線形作用素とする。その双対作用素 $Q': D(Q') \rightarrow X(\Omega)'$ は次のように定義される； Q' の定義域 $D(Q')$ は $X(\Omega)$ から \mathbb{C} への写像 $\phi \mapsto \langle \mu | Q\phi \rangle$ が連続になるような $\mu \in X(\Omega)'$ の全体であり、その作用は $\langle Q'\mu | \phi \rangle = \langle \mu | Q\phi \rangle$ で定義される。次に、 Q が H 上稠密に定義された作用素のとき、Hilbert 空間の意味での Q の共役作用素 Q^* は $(Q\phi, \psi) = (\phi, Q^*\psi)$ で定義される。もし Q^* が $X(\Omega)$ 上稠密に定義されているならば、その双対 $(Q^*)'$ が定義できるので、これを Q^\times と書く。このとき $Q^\times = (Q^*)'$ は $i \circ Q = Q^\times \circ i|_{D(Q)}$ を満たし、 Q の自然な拡張になっている。便宜上、 Q^\times のことを単に双対作用素と呼ぶ。作用素 H と K に対しては次を仮定する。

(X6) H は $X(\Omega)$ 上稠密に定義された作用素である。すなわち、 $X(\Omega)$ の稠密な部分空間 Y が存在して $HY \subset X(\Omega)$ が成り立つ。

(X7) K は H -有界であり、かつ K^* は $X(\Omega)$ 上稠密に定義された作用素である。

(X8) 任意の $\lambda \in \{\text{Im}(\lambda) < 0\} \cup I \cup \Omega$ に対して $K^\times A(\lambda) iX(\Omega) \subset iX(\Omega)$ 。

仮定 (X6) と (X7) より、 $H^\times, K^\times, T^\times$ が $X(\Omega)'$ 上で稠密に定義できることが示せる。特に $D(H^\times)$ は $iD(H)$ を含む。 K, T に対しても同様。もし H, K が $X(\Omega)$ 上の連続作用素ならば、 H^\times, K^\times および T^\times は $X(\Omega)'$ 上の連続作用素になるが、一般にはこれは仮定しない。 K が H -有界であるとは、 $K(\lambda - H)^{-1}$ が \mathcal{H} 上の有界作用素であることをいう。 $A(\lambda)$ は $(\lambda - H)^{-1}$ の解析接続であったから、(X8) はある意味において (X7) の解析接続バージョンだと言える。

以上の準備のもと、まずは T の一般化固有値を定義しよう。普通の意味での T の固有値、固有関数は $(\lambda - T)v = 0$ で定義されるが、 $T = H + K$ であるからこれは $(id - (\lambda - H)^{-1}K)v = 0$ と変形できる。 $X(\Omega)'$ における $(\lambda - H)^{-1}$ の解析接続が $A(\lambda)$ であったことに注意して、次の定義を設ける。

定義 3.1. ある $\lambda \in \Omega \cup I \cup \{\lambda | \text{Im}(\lambda) < 0\}$ に対して方程式

$$(id - A(\lambda)K^\times)\mu = 0 \quad (3.4)$$

が非自明な解 $\mu \in X(\Omega)$ を持つとき、 λ を T の一般化固有値、 μ をその一般化固有関数という。

上式に K^\times を作用させると

$$(id - K^\times A(\lambda))K^\times \mu = 0 \quad (3.5)$$

を得る. もし $K^\times \mu = 0$ ならば (3.4) より $\mu = 0$ なので, λ が一般化固有値であるための必要十分条件は $id - K^\times A(\lambda)$ が $iX(\Omega)$ 上単射であることである. ここで, 仮定 (X8) より作用素 $K^\times A(\lambda)$ が $iX(\Omega)$ 上で well-defined であることに注意せよ.

定理 3.2. λ を T の一般化固有値, μ をその一般化固有関数とすると,

$$T^\times \mu = \lambda \mu \quad (3.6)$$

が成り立つ.

証明の概略. 作用素解析により, $D(\lambda - H^\times) \supset R(A(\lambda))$ かつ $(\lambda - H^\times)A(\lambda) = id : iX(\Omega) \rightarrow iX(\Omega)$ が示せる. したがって

$$(\lambda - H^\times)(id - A(\lambda)K^\times)\mu = (\lambda - H^\times - K^\times)\mu = (\lambda - T^\times)\mu = 0$$

を得る. ■

この定理より, λ は双対作用素 T^\times の普通の意味での固有値であることが分かる. ただし, 一般に一般化固有値の集合は T^\times の固有値の集合よりも真に小さい. 双対空間 $X(\Omega)'$ はあまりに大きすぎるため, 典型的には \mathbb{C} 全体が T^\times の固有値になり得る. 一般化固有値の集合は, T のスペクトルよりは情報を多く持っているが T^\times のスペクトルほど荒っぽくない, ちょうど良い集合になっている.

3.2 $A(\lambda)$ の性質

さらに詳しい議論をする前に, $A(\lambda)$ の性質を詳しく見ておくと都合が良い. $n = 1, 2, \dots$ に対し, 線形作用素 $A^{(n)}(\lambda) : iX(\Omega) \rightarrow X(\Omega)'$ を

$$\langle A^{(n)}(\lambda)\psi | \phi \rangle = \begin{cases} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{(\lambda - \omega)^n} E[\psi, \phi](\omega) d\omega + 2\pi \sqrt{-1} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \Big|_{z=\lambda} E[\psi, \phi](z), & (\lambda \in \Omega), \\ \lim_{y \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{(x + \sqrt{-1}y - \omega)^n} E[\psi, \phi](\omega) d\omega, & (\lambda = x \in I), \\ \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{(\lambda - \omega)^n} E[\psi, \phi](\omega) d\omega, & (\text{Im}(\lambda) < 0) \end{cases} \quad (3.7)$$

で定義する. 部分積分により, $\langle A^{(n)}(\lambda)\psi | \phi \rangle$ は $((\lambda - H)^{-n}\psi, \phi)$ の下半面から Ω への解析接続になっていることを示すのは容易である. $A^{(1)}(\lambda)$ はこれまで通り $A(\lambda)$ とも書く.

命題 3.3. 任意の自然数 $j \geq n \geq 0$ に対し, 作用素 $A^{(j)}(\lambda)$ は次を満たす.

(i) $(\lambda - H^\times)^n A^{(j)}(\lambda) = A^{(j-n)}(\lambda)$, ただし $A^{(0)}(\lambda) := id$.

(ii) $A^{(j)}(\lambda)(\lambda - H^\times)^n = A^{(j-n)}(\lambda)$.

特に $(\lambda - H^\times)\mu \in iX(\Omega)$ なるとき $A(\lambda)(\lambda - H^\times)\mu = \mu$.

$$(iii) \frac{d^j}{d\lambda^j} \langle A(\lambda)\psi | \phi \rangle = (-1)^j j! \langle A^{(j+1)}(\lambda)\psi | \phi \rangle, \quad j = 0, 1, \dots.$$

(iv) 任意の $\psi \in X(\Omega)$ に対し, $A(\lambda)\psi$ は

$$A(\lambda)\psi = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^j A^{(j+1)}(\lambda_0)\psi, \quad (3.8)$$

と展開され, 右辺は $X(\Omega)'$ の強位相で収束する.

証明の概略. (i),(ii) は作用素解析を用いて示せ, (iii) は $A(\lambda)$ の定義から直接確認できる. $\langle A(\lambda)\psi | \phi \rangle$ は正則なので, (iii) より

$$\langle A(\lambda)\psi | \phi \rangle = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^j \langle A^{(j+1)}(\lambda_0)\psi | \phi \rangle, \quad (3.9)$$

と展開できるが, これは $A(\lambda)\psi$ が弱正則であることを意味する. ところが $X(\Omega)$ は樽型空間であるから, Banach-Steinhaus の定理を用いれば任意の弱正則関数は強正則であることが示せて, (iv) が従う. ■

一般化固有値の固有空間と重複度を定義しよう. 普通のスペクトル理論では, 固有値 λ の固有空間は方程式 $(\lambda - T)^n v = 0$ の解の全体として定義される. 例えば $n = 2$ のときは, これは

$$(\lambda - H - K)(\lambda - H - K)v = (\lambda - H)^2 (id - (\lambda - H)^{-2} K(\lambda - H)) \circ (id - (\lambda - H)^{-1} K)v = 0.$$

と整理される. $(\lambda - H)^2$ で割ると

$$(id - (\lambda - H)^{-2} K(\lambda - H)) \circ (id - (\lambda - H)^{-1} K)v = 0.$$

ここで $(\lambda - H)^{-n}$ の解析接続が $A^{(n)}(\lambda)$ であったから, 発見的には次の方程式

$$(id - A^{(2)}(\lambda)K^\times(\lambda - H^\times)) \circ (id - A(\lambda)K^\times)\mu = 0.$$

を考えたい. そこで, 線形作用素 $B^{(n)}(\lambda) : D(B^{(n)}(\lambda)) \subset X(\Omega)' \rightarrow X(\Omega)'$ を

$$B^{(n)}(\lambda) = id - A^{(n)}(\lambda)K^\times(\lambda - H^\times)^{n-1} \quad (3.10)$$

で定義しよう. このとき, 上の方程式は $B^{(2)}(\lambda)B^{(1)}(\lambda)\mu = 0$ と書ける. $B^{(n)}(\lambda)$ の定義域は $A^{(n)}(\lambda)K^\times(\lambda - H^\times)^{n-1}$ の定義域である. 次の等式

$$(\lambda - H^\times)^k B^{(j)}(\lambda) = B^{(j-k)}(\lambda)(\lambda - H^\times)^k, \quad j > k \quad (3.11)$$

は容易に示すことができる. このようにして次の定義に到達する.

定義 3.4. T の一般化固有値 λ に従属する一般固有空間を

$$V_\lambda = \bigcup_{m \geq 1} \text{Ker } B^{(m)}(\lambda) \circ B^{(m-1)}(\lambda) \circ \dots \circ B^{(1)}(\lambda). \quad (3.12)$$

で定義し, $\dim V_\lambda$ を λ の重複度という.

特に $\text{Ker } B^{(1)}(\lambda)$ の元は定義 3.1 で定義した一般化固有関数である. 定理 3.2 と同様にして次が示せる.

定理 3.5. 任意の $\mu \in V_\lambda$ に対してある自然数 M が存在して $(\lambda - T^\times)^M \mu = 0$.

一般には V_λ は普通の意味での固有空間 $\bigcup_{m \geq 1} \text{Ker } (\lambda - T^\times)^m$ の部分空間である. 双対空間 $X(\Omega)'$ は大きすぎるため, 典型的には $\bigcup_{m \geq 1} \text{Ker } (\lambda - T^\times)^m$ は無限次元であるが, 後で分かるように V_λ は有限次元になることが多い.

3.3 一般化レゾルベント

$R_\lambda = (\lambda - T)^{-1}$ を, 作用素 T のレゾルベントとする. 簡単な計算から

$$R_\lambda \psi = (\lambda - H)^{-1} \left(id - K(\lambda - H)^{-1} \right)^{-1} \psi \quad (3.13)$$

が分かるが, $X(\Omega)'$ における $(\lambda - H)^{-1}$ の解析接続が $A(\lambda)$ であったから, 次の定義を得る. 以下では $\hat{\Omega} = \Omega \cup I \cup \{\lambda \mid \text{Im}(\lambda) < 0\}$ とおく.

定義 3.6. 逆写像 $(id - K^\times A(\lambda))^{-1}$ が存在するとき, T の一般化レゾルベント $\mathcal{R}_\lambda : iX(\Omega) \rightarrow X(\Omega)'$ を

$$\mathcal{R}_\lambda = A(\lambda) \circ (id - K^\times A(\lambda))^{-1} = (id - A(\lambda)K^\times)^{-1} \circ A(\lambda), \quad \lambda \in \hat{\Omega} \quad (3.14)$$

で定義する. 2 番目の等式は $(id - A(\lambda)K^\times)A(\lambda) = A(\lambda)(id - K^\times A(\lambda))$ から従う. ここで $id - K^\times A(\lambda)$ が $iX(\Omega)$ 上単射であることと $id - A(\lambda)K^\times$ が $\mathbb{R}(A(\lambda))$ 上で単射であることは同値であることに注意しよう.

$A(\lambda)$ は連続でないから \mathcal{R}_λ も連続でないが, $A(\lambda) \circ i$ は連続であったから $\mathcal{R}_\lambda \circ i : X(\Omega) \rightarrow X(\Omega)'$ が連続かどうか問うことには意味がある.

定義 3.7. 次の 2 条件を満たす $\lambda \in \hat{\Omega}$ の全体を一般化レゾルベント集合 $\hat{\rho}(T)$ という; λ のある近傍 $V_\lambda \subset \hat{\Omega}$ が存在して

(i) 任意の $\lambda' \in V_\lambda$ に対して $\mathcal{R}_{\lambda'} \circ i$ は稠密な定義域を持つ $X(\Omega)$ から $X(\Omega)'$ への連続作用素である. ただし $X(\Omega)'$ には弱位相を入れる.

(ii) 各 $\psi \in X(\Omega)$ に対し, 集合 $\{\mathcal{R}_{\lambda'} \circ i(\psi)\}_{\lambda' \in V_\lambda}$ は $X(\Omega)'$ の有界集合である*¹.

*¹ Banach-Steinhaus の定理より弱有界集合は強有界なので, 位相を特定する必要はない.

集合 $\hat{\sigma}(T) := \hat{\Omega} \setminus \hat{\rho}(T)$ を T の一般化スペクトルという. 一般化点スペクトル $\hat{\sigma}_p(T)$ を $id - K^\times A(\lambda)$ が単射でないような $\lambda \in \hat{\sigma}(T)$ の全体とする (これは一般化固有値の全体である). 一般化剰余スペクトル $\hat{\sigma}_r(T)$ を $\mathcal{R}_\lambda \circ i$ の定義域が $X(\Omega)$ の稠密な部分空間にならないような $\lambda \in \hat{\sigma}(T)$ の全体とする. 一般化連続スペクトルを $\hat{\sigma}_c(T) = \hat{\sigma}(T) \setminus (\hat{\sigma}_p(T) \cup \hat{\sigma}_r(T))$ で定義する.

定義より $\hat{\rho}(T)$ は開集合となる. $\hat{\rho}(T)$ の定義の仕方は普通のスペクトル理論より複雑に見えるが, これは $X(\Omega)$ が Banach 空間でないことに起因するものである. 普通のスペクトル理論においても, 空間が Banach でないときにはレゾルベント集合は上と同様のやり方で定義される [10, 7]. $X(\Omega)$ が Banach 空間のときには $\hat{\rho}(T)$ の定義は慣れ親しんだものと一致するであろう.

定理 3.8.

- (i) 任意の $\psi \in X(\Omega)$ に対し, $\mathcal{R}_\lambda i\psi$ は $\hat{\rho}(T)$ において $X(\Omega)'$ -値の正則関数である.
- (ii) $\text{Im}(\lambda) < 0$ のとき $\mathcal{R}_\lambda \circ i = i \circ (\lambda - T)^{-1}$.

定理の (ii) は, $\text{Im}(\lambda) < 0$ のとき任意の $\psi, \phi \in X(\Omega)$ に対して $\langle \mathcal{R}_\lambda \psi | \phi \rangle = \langle (\lambda - T)^{-1} \psi, \phi \rangle$ が成り立つことを意味している. したがって $\langle \mathcal{R}_\lambda \psi | \phi \rangle$ は $\langle (\lambda - T)^{-1} \psi, \phi \rangle$ の下半面から上半面への解析接続を与える.

証明の概略. $\psi_\lambda = i^{-1}(id - K^\times A(\lambda))^{-1}i(\psi)$ とおく. 簡単な計算から

$$\mathcal{R}_{\lambda+h}i(\psi) - \mathcal{R}_\lambda i(\psi) = (A(\lambda+h) - A(\lambda))i(\psi_\lambda) + \mathcal{R}_{\lambda+h} \circ i^{-1}K^\times(A(\lambda+h) - A(\lambda))i(\psi_\lambda)$$

が分かる. まず, $h \rightarrow 0$ でこれが $X(\Omega)'$ の弱位相で 0 に収束することを示したい. $A(\lambda) \circ i$ は λ について正則であったから第 1 項は難しくない. 第 2 項を評価するために $\mathcal{R}_{\lambda+h}i$ と $i^{-1}K^\times A(\lambda)i$ の評価が必要である. 前者について, 一般化レゾルベント集合の定義における (ii) の性質と Banach-Steinhaus の定理を用いれば, 写像の族 $\{\mathcal{R}_\lambda \circ i\}_{\lambda \in V_\lambda}$ が同程度連続であることが示せる. したがって $\mathcal{R}_{\lambda+h}i$ は $h \rightarrow 0$ で悪さをしない. 一方, $A(\lambda)$ の正則性から $i^{-1}K^\times A(\lambda)i$ が $X(\Omega)$ の位相で正則であることが示せる. したがって $\mathcal{R}_{\lambda+h}i(\psi)$ は $\mathcal{R}_\lambda i(\psi)$ に弱位相で収束することが分かる. 上式を h で割った後に同様の議論を繰り返せば, $\mathcal{R}_\lambda i(\psi)$ が弱位相で正則であることが示せる. ところが $X(\Omega)$ が樽型空間なので弱正則関数は自動的に強正則になる. ■

命題 3.9. 一般化レゾルベントは次の性質を持つ.

- (i) $(\lambda - T^\times) \circ \mathcal{R}_\lambda = id|_{iX(\Omega)}$
- (ii) $\mu \in X(\Omega)'$ が $(\lambda - T^\times)\mu \in iX(\Omega)$ を満たすときは $\mathcal{R}_\lambda \circ (\lambda - T^\times)\mu = \mu$.
- (iii) $T^\times \circ \mathcal{R}_\lambda = \mathcal{R}_\lambda \circ T^\times$.

この命題は命題 3.3 から容易に従う. 正確には (iii) は, 両辺の作用素が well-defined であるような定義域において成り立つ.

3.4 一般化射影

$\Sigma \subset \hat{\sigma}(T)$ を一般化スペクトルの有界な部分集合であって、単純閉曲線 $\gamma \subset \Omega \cup I \cup \{\lambda \mid \text{Im}(\lambda) < 0\}$ によって残りの一般化スペクトルと分離できるものとしよう。作用素 $\Pi_\Sigma : iX(\Omega) \rightarrow X(\Omega)'$ を

$$\Pi_\Sigma \phi = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_\gamma \mathcal{R}_\lambda \phi d\lambda, \quad \phi \in iX(\Omega), \quad (3.15)$$

で定義する。ここで積分は Pettis 積分として定義する*2。合成 $\Pi_\Sigma \circ \Pi_\Sigma$ が定義できないので Π_Σ は普通の意味での射影作用素ではないが、以下の一連の定理により、 Π_Σ を Σ に対する一般化射影と呼んでも差支えないであろう。

命題 3.10. $\Pi_\Sigma(iX(\Omega)) \cap (id - \Pi_\Sigma)(iX(\Omega)) = \{0\}$ であり、ベクトル空間の直和は

$$iX(\Omega) \subset \Pi_\Sigma(iX(\Omega)) \oplus (id - \Pi_\Sigma)(iX(\Omega)) \subset X(\Omega)' \quad (3.17)$$

を満たす。特に、任意の $\phi \in X(\Omega)$ に対してある $\mu_1, \mu_2 \in X(\Omega)'$ が存在して ϕ は

$$i(\phi) = \langle \phi \mid \mu_1 + \mu_2, \quad \mu_1 \in \Pi_\Sigma(iX(\Omega)), \mu_2 \in (id - \Pi_\Sigma)(iX(\Omega)) \quad (3.18)$$

と一意に分解される。

命題 3.11. Π_Σ は T^\times -不変である: $\Pi_\Sigma \circ T^\times = T^\times \circ \Pi_\Sigma$.

定理 3.12. λ_0 を孤立した一般化固有値とし、 Π_0 を λ_0 に対する一般化射影、 $V_0 = \bigcup_{m \geq 1} \text{Ker } B^{(m)}(\lambda_0) \circ \dots \circ B^{(1)}(\lambda_0)$ を λ_0 の一般固有空間とする。もし $\Pi_0 iX(\Omega)$ が有限次元ならば $\Pi_0 iX(\Omega) = V_0$.

通常のスเปクトル理論においては、これらの性質は射影の性質 $\Pi \circ \Pi = \Pi$ やレゾルベント方程式を用いて比較的容易に示すことができる。我々の場合には Π 同士や \mathcal{R}_λ 同士の合成が定義できない(したがってレゾルベント方程式も成り立たない)ので、証明は極めてテクニカルで煩雑になる。ここでは定理 3.12 の証明法について少しだけコメントを残すに留める。一般化レゾルベントの λ_0 まわりのローラン展開を $\mathcal{R}_\lambda = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^j E_j$ とおく。留数定理から $E_{-1} = -\Pi_0$ である。これを等式 $id = (\lambda - T^\times) \circ \mathcal{R}_\lambda$ に代入すれば、 $\{E_j\}_j$ に関する連立方程式を得る。これを整理することで E_{-1} が満たすべき性質を導いていく。

*2 一般に、 X を線形位相空間、 X' をその強双対空間、 S をコンパクト Hausdorff 空間、 μ を S 上の有限 Borel 測度とする。写像 $f : S \rightarrow X'$ について、もし任意の $\phi \in X$ に対して

$$\langle I(f) \mid \phi \rangle = \int_S \langle f \mid \phi \rangle d\mu \quad (3.16)$$

を満たす $I(f) \in X'$ が存在するならば f は Pettis 積分可能であるといい、 $I(f) = \int_S f d\mu$ を f の Pettis 積分という。 X が樽型かつ f が正則ならば Pettis 積分可能である [3].

3.5 半群

作用素 $\sqrt{-1}T = \sqrt{-1}(H+K)$ は \mathcal{H} 上の C^0 -半群 $e^{\sqrt{-1}Tt}$ を生成すると仮定する. Laplace 逆変換の公式よりこれは

$$(e^{\sqrt{-1}Tt}\psi, \phi) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x-\sqrt{-1}y}^{x-\sqrt{-1}y} e^{\sqrt{-1}\lambda t} ((\lambda - T)^{-1}\psi, \phi) d\lambda, \quad x, y \in \mathbf{R}, \quad (3.19)$$

で与えられる. ここで積分路は T のスペクトルよりも下方にある水平線である. 一般には T は実軸上に連続スペクトルを持っており, これを越えて積分路を変形することはできないため, 半群の $t \rightarrow \infty$ での漸近挙動を調べることは困難である. ところが定理 3.8 より, 積分路が下半面に含まれているときには, $\phi, \psi \in X(\Omega)$ に対しては

$$(e^{\sqrt{-1}Tt}\psi, \phi) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x-\sqrt{-1}y}^{x-\sqrt{-1}y} e^{\sqrt{-1}\lambda t} \langle \mathcal{R}_\lambda \psi | \phi \rangle d\lambda, \quad (3.20)$$

と書くことができる. 多くの場合, $\langle \mathcal{R}_\lambda \psi | \phi \rangle$ の特異点は離散的な一般化固有値のみからなるので, 上式を留数定理を用いて評価することができる. 留数の計算は一般化射影 Π_0 を用いてできる. 例えば λ_0 が重複度 M の一般化固有値ならば, そのまわりの留数は

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\gamma_0} e^{\sqrt{-1}\lambda t} \langle \mathcal{R}_\lambda \psi | \phi \rangle d\lambda = \sum_{k=0}^{M-1} e^{\sqrt{-1}\lambda_0 t} \frac{(-\sqrt{-1}t)^k}{k!} \langle (\lambda_0 - T^\times)^k \Pi_0 \psi | \phi \rangle,$$

で与えられる. 特に λ_0 が上半面の点ならば, この項は指数的に 0 に収束する. したがって, たとえ T が上半面に普通の意味での固有値を持たなくても ($\sqrt{-1}T$ が左半面に固有値を持たなくても), 一般化スペクトルの存在により $(e^{\sqrt{-1}Tt}\psi, \phi)$ が指数的に減衰することは可能である. ただし $e^{\sqrt{-1}Tt}\psi$ そのものが \mathcal{H} の位相で減衰するとは限らないことに注意しよう. 一般化固有値により引き起こされるこの種の指数的減衰は, プラズマ物理では Landau 減衰として古くから知られている他 [4], Schrödinger 方程式でもしばしば観察される [6, 8].

一般には減衰は過渡状態においてのみ起こる. そのことを見るために, λ_0 を一般化固有値, $\mu_0 \in X(\Omega)'$ をその一般化固有関数とする. $(e^{\sqrt{-1}Tt})^\times = ((e^{\sqrt{-1}Tt})^*)'$ を半群の双対作用素としよう. このとき $(e^{\sqrt{-1}Tt})^\times \mu_0 = e^{\sqrt{-1}\lambda_0 t} \mu_0$ が成り立つので, μ_0 を初期値にとれば解は本当に指数的に減衰するが, 一般には μ_0 は双対空間の元のため, 初期値の候補として適当でないかもしれない. ところが $X(\Omega)$ は $X(\Omega)'$ の稠密な部分空間であったから, 任意の $T > 0$ と $\varepsilon > 0$ に対してある関数 $\phi_0 \in X(\Omega)$ が存在して, $0 \leq t \leq T$ においては

$$|\langle (e^{\sqrt{-1}Tt})^\times \phi_0 | \psi \rangle - \langle (e^{\sqrt{-1}Tt})^\times \mu_0 | \psi \rangle| < \varepsilon,$$

が成り立つ. これはある有限の時間 $0 \leq t \leq T$ においては

$$(e^{\sqrt{-1}Tt}\phi_0, \psi) \sim e^{\sqrt{-1}\lambda_0 t} \langle \mu_0 | \psi \rangle, \quad (3.21)$$

が成り立つことを意味しているため、一般化固有値が解の過渡状態を与えることが分かる。次の節で示すようなある特別な場合には、 $t \rightarrow \infty$ でも解が指数的に減衰することがある。

4 応用例

4.1 結合振動子系で現れる積分方程式 [1, 2]

$g_1(z)$ を整関数であって実軸上の区間 $-1 < \omega < 1$ では $g_1(\omega) > 0$ なるものとする。実軸上で定義された非負値の関数 $g(\omega)$ を

$$g(\omega) = \begin{cases} 0 & (\omega < -1), \\ g_1(\omega) & (-1 < \omega < 1), \\ 0 & (\omega > 1), \end{cases} \quad (4.1)$$

で定義する。 $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R}, g(\omega)d\omega)$ を重み付き L^2 空間、 H を $(H\phi)(\omega) = \omega\phi(\omega)$ で定義される \mathcal{H} 上の掛け算作用素とする。 H のスペクトル $\sigma(H)$ は $\text{supp}(g) = [-1, 1]$ で与えられ、スペクトル測度は

$$(E(\omega)\psi, \phi) := E[\psi, \phi](\omega) = \begin{cases} 0 & (\omega < -1), \\ \psi(\omega)\overline{\phi(\omega)}g_1(\omega) & (-1 < \omega < 1), \\ 0 & (\omega > 1), \end{cases} \quad (4.2)$$

で与えられる。 X を $L^2(\mathbf{R}, g(\omega)d\omega)$ の稠密な部分空間であって、実軸と上半面で正則なあるクラスの関数からなるものとする。どのようなクラスからなるかや位相の入れ方は $g(\omega)$ の増大度などに依存するので、ここではまだ指定しない。各 $\psi, \phi \in X$ に対し、関数 $((\lambda - H)^{-1}\psi, \phi)$ の下半面から上半面への解析接続を考えよう。区間 $\omega < -1$ 、あるいは $\omega > 1$ を通した $E[\psi, \phi](\omega)$ の解析接続は恒等的に 0 であるから、これらの区間を通した $((\lambda - H)^{-1}\psi, \phi)$ の接続は $((\lambda - H)^{-1}\psi, \phi)$ 自身である。一方、区間 $-1 < \omega < 1$ を通した $((\lambda - H)^{-1}\psi, \phi)$ の下半面から上半面への解析接続は

$$\langle A(\lambda)\psi | \phi \rangle = \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\lambda - \omega} \psi(\omega)\overline{\phi(\omega)}g_1(\omega)d\omega + 2\pi\sqrt{-1} \cdot \psi(\lambda)\overline{\phi(\lambda)}g_1(\lambda), \quad (4.3)$$

で与えられる。より一般に、区間 $-1 < \omega < 1$ を通って点 $+1$ を時計回りに n 回まわって得られる $((\lambda - H)^{-1}\psi, \phi)$ の解析接続は

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\lambda - \omega} \psi(\omega)\overline{\phi(\omega)}g_1(\omega)d\omega + 2\pi\sqrt{-1}n \cdot \psi(\lambda)\overline{\phi(\lambda)}g_1(\lambda),$$

となる。点 -1 まわりでも同様である。したがって、レゾルベント $(\lambda - H)^{-1}$ の、 X から X' への作用素としての解析接続 $A(\lambda)$ の Riemann 面は、 ± 1 に対数的分岐点を持つことが分かる。次に $P_0(\omega) \equiv 1 \in L^2(\mathbf{R}, g(\omega)d\omega)$ とおいて、作用素 K を $(K\phi)(\omega) = -\sqrt{-1}\kappa(\phi, P_0)P_0(\omega)$

で定義する．ここで $\kappa > 0$ はパラメータである．作用素 $T := H + K$ のスペクトルを調べよう．この作用素は， $\sqrt{-1}$ 倍の因子と g の定義を除いて，式 (1.6) で与えたものと同じである． K がコンパクト作用素であるから T の連続スペクトルは H のそれと等しく $\sigma_c(T) = [-1, 1]$ である．一方，簡単な計算から固有値は

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\lambda - \omega} g(\omega) d\omega - \frac{\sqrt{-1}}{\kappa} = 0, \quad (4.4)$$

の根として与えられることが分かる． $\lambda = x + \sqrt{-1}y$, $x, y \in \mathbf{R}$ とおくと

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{x - \omega}{(x - \omega)^2 + y^2} g(\omega) d\omega = 0, \quad \int_{\mathbf{R}} \frac{y}{(x - \omega)^2 + y^2} g(\omega) d\omega = -\frac{1}{\kappa}. \quad (4.5)$$

以下では簡単のため $g(\omega)$ は偶関数であるとする．このとき $x = 0$ とおけば前者の方程式は自動的に満たされるから， $x = 0$ に対する後者の方程式を計算しよう．後者の方程式から， $\kappa > 0$ のとき，固有値は存在するとすれば下半面に限ることが分かる．特に κ が十分大きいときは下半面の十分遠方に固有値が存在し， κ を減らしていくと固有値は虚軸に沿って上方に移動していく．この固有値が実軸に辿りつくときの κ の値を求めるために，後者の方程式において $y \rightarrow -0$ の極限をとると

$$\lim_{y \rightarrow -0} \int_{\mathbf{R}} \frac{y}{\omega^2 + y^2} g(\omega) d\omega = -\pi g(0) = -\frac{1}{\kappa}. \quad (4.6)$$

したがって， $\kappa \rightarrow (\pi g(0))^{-1}$ で虚軸上の固有値は $\lambda(\kappa) \rightarrow 0$ となる．固有値は下半面にしか存在しないのだったから， $\kappa = (\pi g(0))^{-1}$ において固有値は連続スペクトル $\sigma_c(T) = [-1, 1]$ に吸収されて消えてしまう．

次に， T の一般化スペクトルを計算しよう． X の位相を適切に設定すれば， $\hat{\sigma}_c(T) = \hat{\sigma}_r(T) = \emptyset$ が示せる．したがって一般化スペクトル理論の範疇では連続スペクトルが生じないのだから，連続スペクトルに吸収されて消えてしまった固有値は，一般化固有値として，2枚目の Riemann 面に生き残っていることが予想される．実際，2枚目の Riemann 面における一般化固有値は

$$\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{\lambda - \omega} g_1(\omega) d\omega + 2\pi \sqrt{-1} \cdot g_1(\omega) - \frac{\sqrt{-1}}{\kappa} = 0 \quad (4.7)$$

の根として与えられる．この左辺は (4.4) の左辺の解析接続そのものであることに注意すると， $\kappa \rightarrow (\pi g(0))^{-1}$ で消えてしまった (4.4) の根は (4.7) の根としては上半面に存在していることが分かる．

常微分積分方程式 $\partial u / \partial t = \sqrt{-1} T u$ を考えよう．このタイプの方程式は，結合振動子系のモデルの線形化により自然に現れる．半群 $e^{\sqrt{-1} T t}$ は 3.5 節のように Laplace 逆変換の公式で与えられるが，これを図 4 のように変形させることで上半面の一般化固有値まわりの留数を拾いこむことができる．

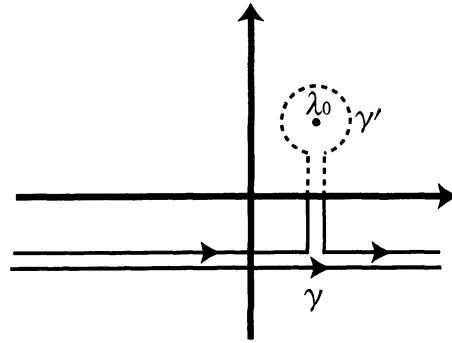


Fig. 4 積分路の変形. γ は Laplace 逆変換の公式におけるオリジナルの積分路であり, γ' は変形した積分路を表す. 区間 $[-1, 1]$ は連続スペクトル, すなわちレゾルベントの Riemann 面の Riemann カットである. 点線は, 積分路が 2 枚目のシートに入ったことを意味している.

ところが点 ± 1 における対数的分岐点を超えて γ を変形させることはできないため, 積分路をどのように変形させても下半面に積分路が残ってしまう. 結果として, 3.5 節で説明したように, 一般化固有値まわりの留数に起因する解の指数的減衰は過渡状態でしか観測されない. 実軸上の対数的分岐点は $g(\omega)$ の不連続性から生じていることに注意すると, $g(\omega)$ が整関数の場合には分岐点は存在せず (すなわち (4.2) の 2 行目が任意の $\omega \in \mathbf{R}$ で成り立つとき), 積分路 γ 全体を上半面に動かすことができる. 結果として, 解 $u(t)$ は X' の位相に関して $t \rightarrow \infty$ で指数的に 0 に収束することが示せる. 収束の速さは, 実軸に最も近い一般化固有値の虚部の大きさで見積もられる. 詳細な計算は [1, 2] を参照されたい.

参考文献

- [1] H. Chiba, I. Nishikawa, Center manifold reduction for a large population of globally coupled phase oscillators, *Chaos*, 21, 043103 (2011)
- [2] H. Chiba, A proof of the Kuramoto's conjecture for a bifurcation structure of the infinite dimensional Kuramoto model, (submitted, arXiv:1008.0249)
- [3] H. Chiba, A spectral theory of linear operators on rigged Hilbert spaces under certain analyticity conditions, (submitted, arXiv:1107.5858)
- [4] J. D. Crawford, P. D. Hislop, Application of the method of spectral deformation to the Vlasov-Poisson system, *Ann. Physics* 189 (1989), no. 2, 265–317
- [5] I. M. Gelfand, N. Ya. Vilenkin, *Generalized functions. Vol. 4. Applications of harmonic analysis*, Academic Press, New York-London, 1964
- [6] P. D. Hislop, I. M. Sigal, *Introduction to spectral theory. With applications to Schrodinger operators*, Springer-Verlag, New York, 1996
- [7] F. Maeda, Remarks on spectra of operators on a locally convex space, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 47, (1961)
- [8] M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics IV. Analysis of operators*, Academic Press, New York-London, 1978
- [9] F. Trèves, *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Academic Press, New York-London, 1967
- [10] L. Waelbroeck, *Locally convex algebras: spectral theory*, Seminar on Complex Analysis, Institute of Advanced Study, 1958