

平面境界上の希薄気体における特異な振舞い

京大院・工学研究科・機械理工学専攻 高田滋 (Shigeru Takata)
Department of Mechanical Engineering and Science, Kyoto University

本稿では舟金と共著の論文 [1] にもとづいて研究集会で報告した筆者らの最近の研究を、その背景説明にやや重きをおいて概説する。

1 はじめに

非圧縮粘性流体の一方向流れの厳密解に良く知られた 2 次元 Poiseuille 流がある：

$$u_2 = U_0 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{X_1}{D} \right)^2 \right], \quad U_0 = -\frac{D^2}{2\mu} \frac{dp}{dX_2}. \quad (1)$$

2 次元 Poiseuille 流は一定の圧力勾配 dp/dX_2 を保って実現する 2 平板間の定常流れである。流れの一方向性から Navier-Stokes 方程式の対流項が縮退するため、Stokes 近似の方程式が Navier-Stokes 方程式の厳密解になっている例である。流速 u_2 の勾配 du_2/dX_1 はよく知られているように流体内のせん断応力 p_{12} と次式で関係している：

$$p_{12} = \mu \frac{du_2}{dX_1} = -\mu \frac{2U_0}{D} \left(\frac{X_1}{D} \right) = \left(\frac{dp}{dX_2} \right) X_1. \quad (2)$$

この表現の平板上での値から平板が流体から受ける流れ方向の力がわかる。

流体が希薄気体の場合でも、圧力勾配が十分小さく問題の線形化が許される範囲では、広い範囲の希薄度に対して流れの様子が気体分子運動論に基づいて調べられていて、流体力学極限（希薄度パラメータ $k \rightarrow 0$ の極限）で (1) の流速分布が回復されることもわかっている。とくに気体の希薄の度合いが小さい場合には、線形化 Boltzmann 方程式の希薄度パラメータ k に対する系統的な漸近解析により、つぎの流速分布が得られている：

$$u_2 = U_0 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{X_1}{D} \right)^2 - (k_0 + Y_0(\eta_+) + Y_0(\eta_-)) k + 2(a_1 + Y_{a1}(\eta_+) + Y_{a1}(\eta_-)) k^2 \right]. \quad (3)$$

ここで k_0, a_1 は定数,

$$\eta_{\pm} = \left(\frac{1}{2} \mp \frac{X_1}{D} \right) / k, \quad (4)$$

$Y_0(\eta)$ および $Y_{a1}(\eta)$ は $\eta \rightarrow \infty$ に対して任意のべきより速やかにゼロに減衰する普遍関数で、これは境界付近に現れる気体分子運動論的な薄い境界層の内部構造を表している。いま、希薄度 k は小さいので、(3), (4) 中の η_{\pm} は境界付近で X_1 座標を引きのばしたものと考えればよい。 $k_0, a_1, Y_0(\eta), Y_{a1}(\eta)$ は分子モデルに応じて多少異なるが、BGK モ

デル方程式の場合, $k_0 = -1.01619$, $a_1 = 0.76632$ である. $Y_0(\eta)$, $Y_{a1}(\eta)$ の急減衰性から, 流速分布は境界のごく近傍を除いて通常の流体力学における流速分布 (1) を定数分 $U_0(-k_0k + 2a_1k^2)$ だけシフトしたのになっていることが読み取れる. このずれは, 粘着の境界条件の代わりに所定のすべり条件のもとで流体力学の方程式を解けば再現できるため, 普通, すべり効果とよばれる. このように軽度に希薄な気体の振舞いは境界層付近の構造を除けば流体力学的なものである. 希薄の度合いが高くなると, 気体分子運動論的な境界層は厚みを増して他方の境界にまで達し, ついには流路の全域で流体力学的な振舞いは見られなくなる. 後出の図 2(a) に示した熱遷移流の流速分布は, このような場合の流速分布の計算例である.

さて, 上の流速 u_2 の勾配 du_2/dX_1 は

$$\frac{du_2}{dX_1} = -2\frac{U_0}{D} \left[\left(\frac{X_1}{D} \right) + \frac{1}{2} (Y'_0(\eta_+) - Y'_0(\eta_-)) - (Y'_{a1}(\eta_+) - Y'_{a1}(\eta_-)) k \right] \quad (5)$$

で与えられる. $Y'_0(\eta)$ および $Y'_{a1}(\eta)$ は $Y_0(\eta)$ および $Y_{a1}(\eta)$ の引数に関する 1 次導関数である. ここで重要なことは, BGK モデル方程式の場合, 気体分子運動論的な境界層の内部構造を表す普遍関数 $Y_0(\eta)$ および $Y_{a1}(\eta)$ は $\eta \ll 1$ において $\eta \ln \eta$ の依存性をもつことが知られている点にある. したがってその 1 次導関数 $Y'_0(\eta)$ および $Y'_{a1}(\eta)$ は $\eta \rightarrow 0$ で対数的に発散する. これは流速 u_2 の勾配 du_2/dX_1 が壁面に近づくにつれて対数的に発散することを意味している.

ここでつぎの観察は非常に重要である:

1. 気体内のせん断応力 p_{12} は $(dp/dX_2)X_1$ で非圧縮粘性流のものと変わらない. これは応力がひずみ速度に比例するとするニュートン流体の仮定が希薄気体では成り立たないことによる. いいかえれば等式 (2) は希薄気体中では成り立たない. したがって速度勾配が発散しても物体が流体から受ける力は発散することはない, その意味で物理的な不整合は生じていない.
2. 気体の希薄度が小さいとき, 気体分子運動論的な境界層の内部までも流体力学的に統一的に表そうとする試みが最近一部で提案されている. これは Maxwell 以来の初等的な粘性係数の分子運動論による説明を境界近傍で行い, 境界があることの影響を加味した実効粘性係数という概念を境界付近で導入して等式 (2) を使おうとするものである. Lilley と Sader [2, 3] は最近この試みを批判的に検証する目的で, 既存あるいは自身らの数値計算結果を詳細に検討し, 数値計算結果に対するべき乗則のフィッティング曲線を定めてその勾配が発散することを示した. この結果は実効粘性係数による試みが応力の発散という不合理を生じることを示している. しかしその一方で BGK モデル方程式に対して示されている対数発散とは必ずしも整合しない.

これらの点を踏まえて, 文献 [1] では熱遷移流を題材にして次のことを主張・立証した.

1. 速度勾配の発散は, BGK モデル方程式だけでなく本来の Boltzmann 方程式においても対数的である.
2. 速度勾配の対数発散は, 希薄度が低い場合に限らず, 中程度以上の希薄度においても見られる (系の希薄度によらない) 現象である. なお, 希薄度が高い場合についてはべつに数学的な証明 [4] が行われている.
3. 勾配の対数発散は, 境界上で, 境界に入射する分子の速度分布と境界で反射された分子の速度分布との間に不連続な跳びがあることの痕跡である. 勾配の対数発散の

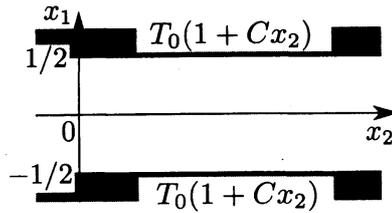


Figure 1: Problem (thermal transpiration)

強度は、ボルツマン方程式の衝突積分から衝突頻度項だけを残した単純な減衰モデルを使って、この跳びの量から定量的に再現できる。言い換えれば、対数発散を引き起こすメカニズムを完全に特定した。

これらの他に、勾配発散の要因項に起因して境界面上では入射分子の速度分布関数にも特異な振舞いが引き起こされることを示したが、これについては本稿では詳述しない。

2 問題（熱遷移流）

熱遷移流とは、流路にそって温度の勾配があるとき、低温部から高温部に向かって誘起される希薄気体の流れのことをいう。これは Poiseuille 流とは異なり通常の流体では見られない流れである。Poiseuille 流では流れを駆動するのは流路に沿った圧力勾配であるが、熱遷移流で流れを駆動するのは温度勾配である。以下、具体的に問題を定式化する。

平行に配置された2枚の無限に広い平板の間の希薄気体を考える。平板間の距離を D とし、空間直角座標を $D\mathbf{x}$ で表す。ここで x_1 方向は平板に垂直に、 x_2 および x_3 方向は平板に平行な面内にとる (図1)。平板の温度が $T_0(1 + Cx_2)$ (T_0 : 基準温度, C : 定数) で与えられるときの気体の定常的な振舞いを以下の仮定の下で調べる:

1. 気体の振舞いは Boltzmann 方程式で記述される。
2. 気体分子は平板上で拡散反射される。
3. $|C|$ は十分に小さく、方程式と境界条件は、密度 ρ_0 (平均密度)、温度 T_0 の基準静止平衡状態のまわりで線形化できる。

気体分子の速度を $(2RT_0)^{1/2}\zeta$, 速度分布関数を $\rho_0(2RT_0)^{-3/2}(1 + \Phi)E(|\zeta|)$ と表す。ここで R は比気体定数, $E(|\zeta|) = \pi^{-3/2} \exp(-|\zeta|^2)$ である。すると問題は次の方程式と境界条件で記述される:

$$\zeta_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \zeta_2 \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = -\frac{1}{k} \nu(|\zeta|) \Phi + \frac{1}{k} K[\Phi], \quad (6a)$$

$$\text{b.c. } \Phi = (|\zeta|^2 - 2)Cx_2 + 2\sqrt{\pi} \int_{\zeta_1 \geq 0} |\zeta_1| \Phi E(|\zeta|) d\zeta, \quad \zeta_1 \leq 0, x_1 = \pm \frac{1}{2}. \quad (6b)$$

ここで $d\zeta = d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3$, $k = (\sqrt{\pi}/2)(\ell_0/D)$ (ただし ℓ_0 は基準静止平衡状態における気体分子の平均自由行程), k ($0 < k < \infty$) は気体の希薄の度合いを表すパラメータ ($k \rightarrow 0$ は流体力学極限, $k \rightarrow \infty$ は分子無衝突の極限) である。剛体球分子模型の場合 ν と K は次のように表される:

$$\nu(|\zeta|) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\exp(-|\zeta|^2) + (2|\zeta| + \frac{1}{|\zeta|}) \int_0^{|\zeta|} \exp(-t^2) dt \right),$$

$$K[\Phi] = \int \kappa(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}) \Phi(\boldsymbol{\xi}) E(|\boldsymbol{\xi}|) d\boldsymbol{\xi},$$

$$\kappa(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \frac{1}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}|} \exp\left(\frac{|\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\zeta}|^2}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}|^2}\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\zeta}|.$$

なおBGKモデル方程式とは ν と K を次のようにおいたものである：

$$\nu(|\boldsymbol{\zeta}|) = 1, \quad K[\Phi] = P[\Phi] + 2\zeta_i u_i[\Phi] + (|\boldsymbol{\zeta}|^2 - \frac{5}{2})\tau[\Phi].$$

ここで

$$P[\Phi] = \frac{2}{3} \int |\boldsymbol{\zeta}|^2 \Phi E(|\boldsymbol{\zeta}|) d\boldsymbol{\zeta}, \quad u_i[\Phi] = \int \zeta_i \Phi E(|\boldsymbol{\zeta}|) d\boldsymbol{\zeta}, \quad \tau[\Phi] = \frac{2}{3} \int (|\boldsymbol{\zeta}|^2 - \frac{3}{2}) \Phi E(|\boldsymbol{\zeta}|) d\boldsymbol{\zeta},$$

であり, $\rho_0 RT_0(1+P[\Phi])$, $(2RT_0)^{1/2}u_i[\Phi]$, $T_0(1+\tau[\Phi])$ はそれぞれ気体の圧力, 速度, 温度である. 以下では応力テンソルを $\rho_0 RT_0(\delta_{ij} + P_{ij}[\Phi])$ と表す (δ_{ij} は Kronecker のデルタ) が, $P_{ij}[\Phi]$ は次式で定義される：

$$P_{ij}[\Phi] = 2 \int \zeta_i \zeta_j \Phi E(|\boldsymbol{\zeta}|) d\boldsymbol{\zeta}.$$

境界値問題 (6) の解 $\Phi(x_1, x_2, \boldsymbol{\zeta})$ は次の形で求めることができる：

$$\Phi = C \left[x_2 \left(|\boldsymbol{\zeta}|^2 - \frac{5}{2} \right) + \phi(x_1, \boldsymbol{\zeta}) \right]. \quad (7)$$

ここで ϕ は次の境界値問題の解で, ζ_2 について奇関数, ζ_3 について偶関数である：

$$\zeta_1 \frac{\partial \phi}{\partial x_1} = -\frac{1}{k} \nu(|\boldsymbol{\zeta}|) \phi + \frac{1}{k} K[\phi] - \zeta_2 \left(|\boldsymbol{\zeta}|^2 - \frac{5}{2} \right), \quad (8a)$$

$$\text{b.c. } \phi = 0, \quad \zeta_1 \leq 0, \quad x_1 = \pm \frac{1}{2}. \quad (8b)$$

この問題は形式的に解けて次の積分方程式に帰着する：

$$\phi = \int_{\mp 1/2}^{x_1} \frac{1}{k\zeta_1} \exp\left(-\frac{\nu(|\boldsymbol{\zeta}|)}{k|\zeta_1|} |x_1 - s|\right) K[\phi](s, \boldsymbol{\zeta}) ds + \phi_0, \quad \zeta_1 \geq 0, \quad (9a)$$

$$\phi_0 = -\frac{k}{\nu(|\boldsymbol{\zeta}|)} \left[1 - \exp\left(-\frac{\nu(|\boldsymbol{\zeta}|)}{k\zeta_1} \left(x_1 \pm \frac{1}{2}\right)\right) \right] I, \quad \zeta_1 \geq 0, \quad (9b)$$

$$I = \zeta_2 \left(|\boldsymbol{\zeta}|^2 - \frac{5}{2} \right). \quad (9c)$$

以下では, 混乱の恐れがない限り E と ν の引数は省略する. また, 解析の際に, 無次元分子速度 $\boldsymbol{\zeta}$ を表す別の座標系表示 (ζ, μ, φ) を必要に応じて併用する：

$$\zeta = |\boldsymbol{\zeta}|, \quad \mu = \zeta_1/|\boldsymbol{\zeta}|, \quad \tan \varphi = \zeta_3/\zeta_2,$$

$$(0 \leq \zeta < \infty, -1 \leq \mu \leq 1, 0 \leq \varphi < 2\pi).$$

ϕ/ζ_2 は3変数 $(x_1, \zeta_1, |\boldsymbol{\zeta}|)$ あるいは (x_1, μ, ζ) の関数として表される.

ϕ は ζ_2 の奇関数, ζ_3 の偶関数なので, 相似解 (7) を直接代入すればわかるように, 流れは x_2 方向の一方向流れで, 気体の圧力は一定, 温度勾配は一定である ($u_1[\Phi] = 0$, $u_3[\Phi] = 0$, $P[\Phi] = 0$, $\tau[\Phi] = Cx_2$). また, 同じ理由で応力テンソルの摂動部 $P_{ij}[\Phi]$ が $P_{12}[\Phi](=P_{21}[\Phi])$ を除いてゼロであることもわかる. さらに, 応力の非対角成分 $P_{12}[\Phi]$ もまたゼロになることが, x_2 方向の運動量バランスの考察から次のようにしてわかる: よく知られているように, Boltzmann 方程式の両辺に分子速度を乗じたのち分子速度空間で積分すると, 巨視的レベルでの運動量バランスの式が得られる. いまの場合, 式 (6a) に $\zeta_2 E(|\zeta|)$ を乗じて ζ の全空間で積分すると, 運動量バランスの式を線形化したものが得られることになり, その結果は $\partial P_{12}[\Phi]/\partial x_1 + \partial P_{22}[\Phi]/\partial x_2 = 0$ となる. 一方, (7) から $P_{22}[\Phi] = 0$ でかつ $P_{12}[\Phi]$ は x_2 によらないことがわかっている. したがって運動量バランスの式は $P_{12}[\Phi]$ が定数であることを示している. さて, 問題の対称性から ϕ (したがって Φ) は $x_1 = 0$ で ζ_1 について対称でなので, $P_{12}[\Phi]$ はゼロでなければならない.

このように, 熱遷移流の問題では, 応力テンソルは単に有限であるというだけでなく, 対角的かつ等方的である ($P_{ij}[\Phi] = 0$).

3 勾配発散の基本的メカニズム

前節で述べたように, 流体力学的な物理量である流速の x_2 成分 $u_2[\phi]$ はゼロではなく, 図 2(a) に示すように実際にこの方向の流れが誘起される. 本節ではこの流速場の勾配に 1 節で述べた対数発散の構造が現れる要因をはじめにザックリと抜き出して説明する.

まず積分方程式 (9a) において $K[\phi]$ の寄与を無視して ϕ_0 の項だけを考える. ϕ_0 の項からの流速への寄与 $u_2[\phi_0]$ は次のように計算できる:

$$\begin{aligned}
u_2[\phi_0] &= \int \zeta_2 \phi_0 E d\zeta \\
&= - \int_{\zeta_1 > 0} \frac{k}{\nu} \left[1 - \exp\left(-\frac{\nu}{k\zeta_1}\left(x_1 + \frac{1}{2}\right)\right) \right] \zeta_2^2 \left(|\zeta|^2 - \frac{5}{2}\right) E d\zeta \\
&\quad - \int_{\zeta_1 < 0} \frac{k}{\nu} \left[1 - \exp\left(-\frac{\nu}{k\zeta_1}\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)\right) \right] \zeta_2^2 \left(|\zeta|^2 - \frac{5}{2}\right) E d\zeta \\
&= -\pi \int_0^\infty \frac{k\zeta^4}{\nu(\zeta)} \left(\zeta^2 - \frac{5}{2}\right) E(\zeta) \int_0^1 \left[1 - \exp\left(-\frac{\nu(\zeta)}{k\zeta\mu}\left(x_1 + \frac{1}{2}\right)\right) \right] (1 - \mu^2) d\mu d\zeta \\
&\quad - \pi \int_0^\infty \frac{k\zeta^4}{\nu(\zeta)} \left(\zeta^2 - \frac{5}{2}\right) E(\zeta) \int_{-1}^0 \left[1 - \exp\left(-\frac{\nu(\zeta)}{k\zeta\mu}\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)\right) \right] (1 - \mu^2) d\mu d\zeta \\
&= \frac{k}{6\sqrt{\pi}} \sum_{i=+,-} \int_0^\infty \frac{\zeta^4}{\nu(\zeta)} \left(\zeta^2 - \frac{5}{2}\right) (a_i^2 - 6) a_i \text{Ei}(1, a_i) \exp(-\zeta^2) d\zeta \\
&\quad + \frac{k}{6\sqrt{\pi}} \sum_{i=+,-} \int_0^\infty \frac{\zeta^4}{\nu(\zeta)} \left(\zeta^2 - \frac{5}{2}\right) (4 + a_i - a_i^2) \exp(-a_i - \zeta^2) d\zeta \\
&\quad - \frac{4k}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{\zeta^4}{\nu(\zeta)} \left(\zeta^2 - \frac{5}{2}\right) \exp(-\zeta^2) d\zeta. \tag{10}
\end{aligned}$$

ここで次の記号を導入した:

$$a_{\pm} = \frac{\nu(\zeta)}{k\zeta} \left| x_1 \pm \frac{1}{2} \right|, \quad \text{Ei}(1, a > 0) = \int_1^\infty \frac{1}{x} \exp(-ax) dx.$$

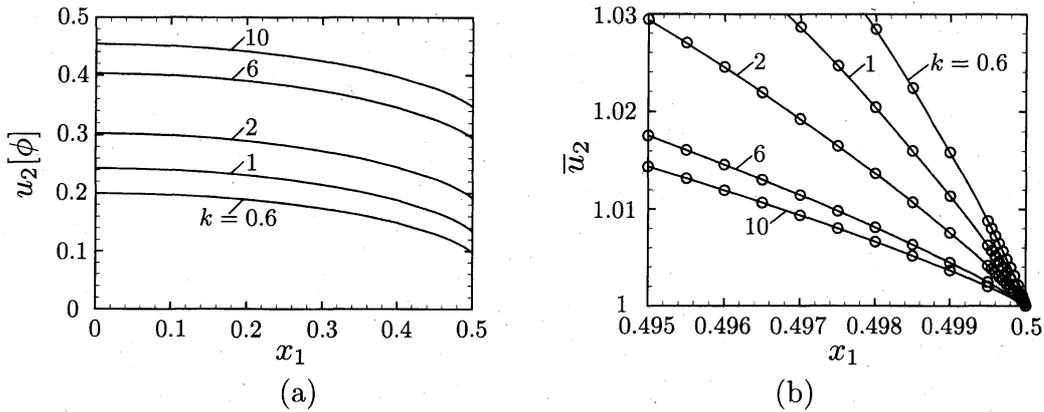


Figure 2: Profile of the flow velocity for various k . (a) $u_2[\phi](x_1)$ in the half-channel $0 \leq x_1 \leq 1/2$, (b) $\bar{u}_2 \equiv u_2[\phi]/u_2[\phi]|_{x_1=1/2}$ near $x_1 = 1/2$. In (b), open circles indicate the present numerical solution, while the solid lines the curve of the least square approximation (12).

ν は分子間の衝突頻度を表す量だが、 $\nu(\zeta) \geq C_0 > 0$ を満たす正数 C_0 が存在するため、第 2 項の $\int_0^\infty \zeta^4 \nu^{-1} (\zeta^2 - 5/2) (4 + a_\pm - a_\pm^2) \exp(-a_\pm - \zeta^2) d\zeta$ は特異性の要因にならない。一方、指数積分はつぎの級数表現：

$$\text{Ei}(1, a > 0) = -\gamma - \ln a + e^{-a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \right) a^n, \quad (\gamma: \text{Euler 定数}),$$

をもつことからわかるように、第 1 項 $\int_0^\infty \zeta^4 \nu^{-1} (\zeta^2 - 5/2) (a_\pm^2 - 6) a_\pm \text{Ei}(1, a_\pm) \exp(-\zeta^2) d\zeta$ は $(x_1 \pm 1/2) \ln |x_1 \pm 1/2|$ に比例する要素をもっている。このことから $u_2[\phi_0]$ の勾配 $du_2[\phi_0]/dx_1$ は $x_1 \rightarrow \mp 1/2$ において対数的に発散することがわかる。

さて、上の議論では ϕ_0 からの寄与しか考えなかった。ところで ϕ_0 は

$$\phi_0 = \int_{\mp 1/2}^{x_1} \frac{1}{k\zeta_1} \exp\left(-\frac{\nu(|\zeta|)}{k|\zeta_1|} |x_1 - s|\right) I ds, \quad \zeta_1 \geq 0, \quad (11)$$

によって得られるものである。このことは $K[\phi]$ が I と同様に空間的に一様な成分をもつとき、そこから ϕ_0 と同じ構造の特異性が現れることを意味する。 $K[\phi]$ に普通仮定される s の多項式程度の依存性（そして $s \ln s$ 程度の依存性）があってもこれより強い特異構造は現れないことが確認できる。このようにして $u_2[\phi]$ に現れる特異性の構造の本質は $u_2[\phi_0]$ のそれに尽きていることが強く示唆される。

文献 [1] では、積分方程式 (9a) の精密な数値計算を行い、 $u_2[\phi]$ が境界近傍で $(x_1 \pm 1/2) \ln |x_1 \pm 1/2|$ に比例する要素をもつことを中程度以上の希薄度について数値的に確かめている。図 2(a) は 2 平板間の半領域での流速分布を、2(b) は境界近傍での分布を境界上での流速の値で正規化して示している。図 2(b) では数値計算の結果得られたデータを小円マーカで示し、境界近傍の数点の値から最小自乗近似で定めた曲線

$$a + b(1/2 - x_1) \ln(1/2 - x_1) + c(1/2 - x_1), \quad (12)$$

を実線でプロットして重ね描きしている。両者は図の上で良好に一致している。この近似曲線の係数の値を表 1 に示す。係数 b の大きさは流速勾配の対数発散を示すのに十分有為な大きさであると結論できる。この結果は、平面境界付近での流速勾配の発散は対数的であり、しかもそれが希薄度の大小に関わらずみられることを数値的に保証している。

Table 1: Coefficients of the fitting curve (12) for $u_2[\phi]$ near the upper boundary determined by the method of least squares using the data in the interval in the most right column.

k	a	b	c	interval of x_1
10	0.3468	-0.1640	0.1304	[0.499, 0.5]
6	0.2940	-0.1728	0.1196	[0.499, 0.5]
2	0.1907	-0.2003	0.0603	[0.4999, 0.5]
1	0.1337	-0.2221	-0.0159	[0.4999, 0.5]
0.6	0.0969	-0.2378	-0.106	[0.49998, 0.5]

4 単純な減衰モデルによる勾配発散の再現

前節で $K[\phi]$ に普通仮定される s の多項式程度の依存性 (そして $s \ln s$ 程度の依存性) があっても $s \ln s$ より強い特異構造は現れないことが確認できると述べた. 作用素 K は分子速度空間に関する積分作用素なので, $K[\phi]$ は ϕ に比べて滑らかで, 実際に ζ について穏やかな関数であることが数値的にも確かめられる. このことを前提にして $K[\phi]$ からの勾配発散への寄与を改めて検討すると, 実際の寄与は, 壁面 $x_1 = \pm 1/2$ 上の $\zeta_1 = 0$ における $K[\phi]$ の値に限られることが確認できる. したがって非斉次項 I からの寄与 ϕ_0 とあわせて, $u_2[\phi]$ の勾配発散はつぎの関数 f の対応するモーメント $u_2[f]$ の勾配によって定量的に再現できるということになる:

$$f = -\frac{k}{\nu} \left(\frac{1}{k} K[\phi] - I \right) \Big|_{\zeta_1=0, x_1=\pm 1/2} \exp \left(-\frac{\nu}{k \zeta_1} \left(x_1 \mp \frac{1}{2} \right) \right), \quad \zeta_1 \leq 0. \quad (13)$$

さて, これから上の表式の物理的な意味を明らかにしたい. f は次の単純な減衰モデルの解である:

$$\zeta_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} = -\frac{\nu}{k} f, \quad (14a)$$

$$f = -\frac{k}{\nu} \left(\frac{1}{k} K[\phi] - I \right) \Big|_{\zeta_1=0, x_1=\pm 1/2}, \quad \zeta_1 \leq 0, x_1 = \pm 1/2. \quad (14b)$$

この減衰モデルの境界値 (14b) の物理的意味は次のようにして解き明かせる. そもそも ϕ は方程式 (8a) の解なので, 気体中での $\zeta_1 = 0$ における ϕ は次の関係を満たしている:¹

$$\phi(x_1, \zeta_1 = 0) = \frac{k}{\nu} \left(\frac{1}{k} K[\phi] - I \right) \Big|_{\zeta_1=0} \quad \text{for } -1/2 < x_1 < 1/2.$$

この表現は $x_1 \rightarrow \pm 1/2$ としたときの $\zeta_1 = 0_{\pm}$ における ϕ の極限值を与えるから, 境界上では次の関係が成り立っている:

$$-\frac{k}{\nu} \left(\frac{1}{k} K[\phi] - I \right) \Big|_{\zeta_1=0, x_1=\pm 1/2} = \phi(x_1 = \pm 1/2, \zeta_1 = 0_{\mp}) - \phi(x_1 = \pm 1/2, \zeta_1 = 0_{\pm}).$$

この関係は先の (14b) における境界値が境界面上での $\zeta_1 = 0$ における速度分布関数の不連続な跳びの量であることを示している. こうして, 流速の勾配発散が境界上の速度分布関数の不連続な跳びの量に定量的に結びつけられた. 言い換えれば, 流速の勾配発散は, 境界上で速度分布関数に不連続な跳びがあることの痕跡なのである.

¹(9a) で $\zeta_1 \rightarrow 0_{\pm}$ としても同じ結果が得られる.

Table 2: Comparisons of the fitting curve coefficient b in (12) between $u_2[\phi]$ and $u_2[f]$.

k	b		interval of x_1
	$u_2[\phi]$	$u_2[f]$	
10	-0.1640	-0.1641	[0.499, 0.5]
6	-0.1728	-0.1730	[0.499, 0.5]
2	-0.2003	-0.2005	[0.4999, 0.5]
1	-0.2221	-0.2223	[0.4999, 0.5]
0.6	-0.2378	-0.2379	[0.49998, 0.5]

本節の議論を数値的に確かめたものが表2である。表2では、3節で紹介した数値計算解から得られた $u[\phi]$ の分布に対する近似曲線 (12) の係数 b (表1 参照) を、本節の減衰モデルによる $u[f]$ の分布から定めた係数 b と比較している。両者はほぼ (期待される計算精度の範囲内で) 一致しており、本節の主張を数値的に保証している。

References

- [1] S. Takata and H. Funagane, Singular behaviour of a rarefied gas on a planar boundary, *J. Fluid Mech.* (submitted).
- [2] C. R. Lilley and J. E. Sader, Velocity gradient singularity and structure of the velocity profile in the Knudsen layer according to the Boltzmann equation, *Phys. Rev. E* **76**, 026315 (2007).
- [3] C. R. Lilley and J. E. Sader, Velocity profile in the Knudsen layer according to the Boltzmann equation, *Proc. R. Soc. A* **464**, 2015–2035 (2008).
- [4] I.-K. Chen, T.-P. Liu, and S. Takata, Boundary singularity for thermal transpiration problem of the linearized Boltzmann equation, *Arch. Rational Mech. Anal.* (submitted).