数理解析研究所講究録
第1831巻 2013年 1-15



# 大成算経の病題について(1)— 虚題第五 —

On ill-posed problems in the *Taisei Sankei* (1) — (Imaginary problems)

藤井康生 (Fujii, Yasuo)
四日市大学 関孝和数学研究所
Seki Kowa Institute of Mathematics, Yokkaichi Univeresity

## 1 はじめに

大成算経巻之十六 題術辯は, 題として, 全題, 病題の 2 題を載せている. ([柏原 2005, 208, 209 ページ], [小松 2007, 151, 153 ページ] を参照.) また, 術として, 実術, 権術, 偏術, 邪術の 4 術を載せている. 術については [藤井 2012] で発表した.

巻之十八病題擬については, 京都大学数理解析研究所の RIMS 共同研究「『大成算経』の数学的・歴史的研究」(2012年) で「虚題第五」について, 第2回九州数学史シンポジューム (九州大学大学院数理学研究院) (2012年) で「変題第六」について発表した.

本稿は RIMS 共同研究で発表した「虚題第五」についてまとめたものである.

病題とは, 問題の与えられた条件が正しくない (不完全な) もののことで, 大成算経巻之十八で詳細に述べられている. すなわち, 巻之十八 病題擬では, 病題が次の8つの項目に分けて論ぜられている.

転題第一：与えられた条件が足りないもの.

繁題第二：与えられた条件が過剰のもの.

層題第三：与えられた条件が不要に複雑になっているもの. 例として約分をしていない, 立方根にしているもの等を載せている.

反題第四：与えられた条件が正しくなく, 答えの値は求められても, 大小関係などの題意に矛盾する.

虚題第五：与えられた条件では方程式の商が無い, 負の商になる, 商が求められても題意に反するなど, 答えが求められないもの.

変題第六：与えられた条件では2つ以上の商が求められる.

□題第七：方程式の係数が0になるもの. (□は欠字)

散題第八：与えられた量が少数であったり, 与えられた量の一方が大きく, 他方が小さくその差が大きく計算が面倒なもの.

本稿では「虚題第五」について述べる.

本題に入る前に, 方程式が商を持つための条件 (適尽方級法) について紹介する. ([明治前, 381, 382 ページ], [後藤 2001, 135〜138 ページ], [後藤 2002, 186〜193 ページ] も参照.) 適尽方級法は, 大成算経巻之三 前集変技の開方第三において述べられており,「虚題第五」で, 自由自在に利用されているからである.

現在からみると, 関数を表す記号が未発展であり, グラフを用いることができなかった状況の中で, 式の値の変化を変式 (テーラー展開と同様の式)[明治前, 380, 381 ページ] を頼りに研究していたことは, 注目すべき点である. 後世の和算家は最大・最小問題の解法に展開させている. しかし, 商を持たないこと, そのものに関心が薄かったようである. 虚題を発展させ, 書き遺した和算家は無かったようである.

## 2 巻之三変技　開方第三

大成算経巻之三開方第三の三式において方程式を 3 つに分類し, 三式と呼んでいる.

全商式 ⋯ 商が 1 つの者,　変商式 ⋯ 商が 2 つ以上ある者,　無商式 ⋯ 商が無い者

この式の中で, 病題において問題とするのは, 変商式と無商式である.

方程式が商を持つかどうか, 開方第三の替数で述べている所をまとめると以下のようになる. 最高次の係数は正とする. [1][後藤 2002, 193, 194 ページ]

- 定数項 (実級) が負であれば正の商を持つ.[2]
- すべての項の係数が正であれば正の商を持たない.[3]
- 1 次項の係数 (方級) から二番目に高次の項の係数の間に負の係数があれば, [4]
  正の商を持つ場合がある. また係数の値を (符号は変えず) 替えて正の商を持つようにする事ができる.
- 負の商を持つときも, 商を −商 とし正の商を持つときと同様にする.

### 2.1 適尽方級法

**2 次方程式 (平方) のとき**　平方適尽方級法 :
2 次式 $a+bx+cx^2$ に対して, 式 $4ac-b^2$ (仮に適尽式 (A) と呼ぶ) を対応させる.

**3 次方程式 (立方) のとき**　立方適尽方級法 :
3 次式 $a+bx+cx^2+dx^3$ に対して, 式 $27a^2d^2+4ac^3+4b^3d-18abcd-b^2c^2$ (仮に適尽式 (B) と呼ぶ) を対応させる.

**4 次方程式 (三乗方) のとき**　三乗方適尽方級法 :
4 次式 $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$ に対して, 式

$$
\begin{aligned}
&256a^3e^3-192a^2bde^2-128a^2c^2e^2+144a^2cd^2e-27a^2d^4+144ab^2ce^2-6ab^2d^2e\\
&-80abc^2de+18abcd^3+16ac^4e-4ac^3d^2-27b^4e^2+18b^3cde-4b^3d^3-4b^2c^3e+b^2c^2d^2
\end{aligned}
$$

(仮に適尽式 (C) と呼ぶ) を対応させる.

**5 次方程式 (四乗方) のとき**　『大成算経』巻之三には, 5 次方程式の場合にも適尽式 (現代数学の用語では, 判別式) が記述されている. また, 適尽式 (判別式) は, (現代数学の用語で) 多項式とその導関数の終結式であり, 行列式の計算で求められることが注記されている.

### 2.2 例題

『大成算経』では, 適尽式の意味については良く理解されていない. 巻之三では三つの例題を以て適尽式の利用方法を示しているが, 記述内容は必ずしも正しくはないと思われる.

[1] 方程式を, $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n=0$, とし, $a_n>0$ とする.
[2] $a_0<0$
[3] $a_0>0.a_1>0,\cdots,a_n>0$
[4] $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ の中に負のものがある.

[第 3-64 問][5] 次の 2 次方程式を考察する.

$$4 - 3x + x^2 = 0 \quad \cdots \quad (1)$$

2 次方程式 (1) は商を持たない. 平方適尽方級法によって, 商を持つときの係数の範囲を求める.

仮に定数項 (実級) を 0 とすると, 正の商を持つ. 次に 2 次項の係数 (廉級) を 0 とするとき, 正の商を持つ. このことから, 定数項 (実級) と 2 次項の係数を替えるときは, 適尽方級法により求めた値より小さいときに正の商を持つ.

1 次項の係数 (方) は負でなければならないので, 係数を替えるときは, 適尽方級法により求めた値より (絶対値が) 大きいときに正の商を持つ.

平方適尽方級法を用いて, 次が言える.

$a - 3x + x^2 = 0$ の場合, $a = a$, $b = -3$, $c = 1$ なので, 適尽式 (A) は $4a - 9 = 0$ である. したがって, $a < 9/4$ のとき商を持つ.

$4 - bx + x^2 = 0$ の場合, $a = 4$, $b = -b$, $c = 1$ なので, 適尽式 (A) は $4 \times 4 - b^2 = 0$ である. したがって, $b > 4$ のとき商を持つ.

$4 - 3x + cx^2 = 0$ の場合, $a = 4$, $b = -3$, $c = c$ なので, 適尽式 (A) は $4 \times 4c - 9 = 0$ である. したがって, $c < 9/16$ のとき商を持つ.

[第 3-65 問] 次の 3 次方程式を考察する.

$$-3 + 3x + 4x^2 + x^3 = 0 \quad \cdots \quad (2)$$

3 次方程式 (2) は負の商を持たない.[6] 立方適尽方級法によって, 商を持つときの係数の範囲を求める.

仮に定数項 (実級) を 0 とすると, 方程式は $3x + 4x^2 + x^3 = 0$ となりその商は $x = -1$, $x = -3$, $x = 0$ である. すなわち負の商を持つ.

次に 1 次項の係数 (方級) を 0 とすると, 方程式は $-3 + 4x^2 + x^3 = 0$ となり $x = -1$ を商とする. すなわち負の商を持つ.[7]

また 3 次項の係数 (隅) を 0 とすると, 方程式は $-3 + 3x + 4x^2 = 0$ となり負の商を持つ.[8]

このことから, 定数項 (実級), 1 次項の係数 (方級), 3 次項の係数 (隅級) は立方適尽方級法により求めた値より小さいときに, 負の商を持つ.

2 次項の係数 (廉) は, 正でなければならないので, 立方適尽法により求めた値より大きいときに, 負の商を持つ.

立方適尽方級法によって, 次が言える.

$-a+3x+4x^2+x^3 = 0$ の場合, $a = -a$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 1$ なので, 適尽式 (B) は $27a^2-40a-36 = 0$ であり. したがって, $a < 2.112612$ 弱 のとき負の商を持つ.[9]

$-3 + bx + 4x^2 + x^3 = 0$ の場合, $a = -3$, $b = b$, $c = 4$, $d = 1$ なので, 適尽式 (B) は $4b^3 - 16b^2 + 216b - 525 = 0$ である. したがって, $b < 2.605869$ 微弱 のとき負の商を持つ.[10]

---

[5]問題の番号は (巻数) − (各巻での番号) であらわす. 以下同様にする.

[6]実際, (2) を解くと $x = -2.27340913844 + 0.563821092829i$, $x = -2.27340913844 - 0.563821092829i$, $x = 0.546818276884$ となる.

[7]解くと $x = 0.791287847478$, $x = -1$, $x = -3.79128784748$ となる.

[8]解くと $x = 0.568729304409$, $x = -1.31872930441$ となる.

[9]適尽式を解くと $a = 2.11261179092$, $a = -0.631130309441$ となる.

[10]適尽式を解くと $b = 0.697065548704+7.06266074139i$, $b = 0.697065548704-7.06266074139i$, $b = 2.60586890259$ となる.

$-3+3x+cx^2+x^3=0$ の場合, $a=-3$, $b=3$, $c=c$, $d=1$ なので, 適尽式 (B) は $12c^3+9c^2-162c-351=0$ である. したがって, $c>4.169813$ 強のとき負の商を持つ.[11]

$-3+3x+4x^2+dx^3=0$ の場合, $a=-3$, $b=3$, $c=4$, $d=d$ なので, 適尽式 (B) は $243d^2+756d-912=0$ である. したがって, $d<0.928964$ 強のとき負の商を持つ.[12]

**[第 3-66 問]** 次の 4 次方程式を考察する.

$$3-2x+0x^2+2x^3+x^4=0 \quad \cdots \quad (3)$$

4 次方程式 (3) は正の商も負の商も持たない.[13] 三乗方適尽方級法によって, 商を持つときの係数の範囲を求める.

**正の商を持つときを考える.** 4 次項の係数 (隅), 3 次項の係数 (下廉) を 0 とする. 方程式 (3) は, $3-2x+0x^2+0x^3+0x^4=0$ となり $x=3/2$ なる正の商を持つ. このことから, 三乗方適尽方級法により求めた値より小さいときに, 正の商を持つ.

3 次項の係数 (下廉) を 0 と置く. 方程式 (3) は $3-2x+0x^2+0x^3+ex^4=0$ となる. $a=3$, $b=-2$, $c=0$, $d=0$, $e=e$ であるので, 適尽式 (C) は $6912e-432=432(16e-1)=0$ である. したがって, $e<0.0625$ のときは, 3 次項の係数 $d$ を替えて正の商を持つようにできる.

4 次項の係数 (隅) を 0 と置く. 方程式 (3) は $3-2x+0x^2+dx^3+0x^4=0$ となる. $a=3$, $b=-2$, $c=0$, $d=d$, $e=0$ であるので, 適尽式 (C) は $43d-32=0$ である. したがって, $d<0.13168$ 強のときは, 4 次項の係数 $e$ を替えて正の商を持つようにできる.

**負の商を持つときを考える.** 1 次項の係数 (方級) と定数項 (実級) を 0 とする. 方程式 (3) は $0-0x+0x^2+2x^3+x^4=0$ となり, $x=-2$, 0 なる負の商を持つ. このことから, 三乗方適尽方級法により求めた値より小さいときに, 負の商を持つ.

定数項 (実級) を 0 と置く. 方程式 (3) は, $0-bx+0x^2+2x^3+x^4=0$ となる. $a=0$, $b=-b$, $c=0$, $d=2$, $e=1$ であるので, 適尽式 (C) は $-27b+32=0$ である. したがって, $b<1.185185$ 強のときは, 定数項 $a$ を替えて負の商を持つようにできる.

1 次項の係数 (方) を 0 と置く. 方程式 (3) は $a-0x+0x^2+2x^3+x^4=0$ となる. $a=a$, $b=0$, $c=0$, $d=2$, $e=1$ であるので, 適尽式 (C) は $56a-432=16(16a-27)=0$ である. したがって, $a<1.6875$ のときは, 1 次項の係数 $b$ を替えて負の商を持つようにできる.

## 3 巻之十八病題擬 虚題第五 (加辞・替数)

巻之十八虚題第五には [第 18-21]~[第 18-26] まで 6 題がある. これらは無商者 (商を持たない例題), 有負数者 (負の商を持つ例題), 得数背者 (得られた商が問題の条件に反する例題) に, それぞれ 2 題ずつ配置されている. また各問題では, 問題文がまず述べられ, ついで適尽方級法の計算がなされ, その後替数 (商を持つように与えられたパラメータを変えること), 加辞 (商を持つための条件を求めること) が述べられている. 適尽式が自由に利用されていることは特記すべきことと思う.

以下では, これらの術文を現代式の記号で書き換え, 脚注に現代数学的なコメントを書く.

---

[11] 適尽式を解くと $c=-2.4599066324+0.981611925261i$, $c=-2.4599066324-0.981611925261i$, $c=4.16981326481$ となる.

[12] 適尽式を解くと $d=0.928964419444$, $d=-4.04007553056$ となる.

[13] 実際, (3) を解くと $x=0.6649720476+0.626548041312i$, $x=0.6649720476-0.626548041312i$, $x=-1.6649720476+0.906508298531i$, $x=-1.6649720476-0.906508298531i$ となり, 実数の商は無い.

### 3.1 無商者

**[第 18-21 問]** 長方形がある. 面積は 230 寸である. 只云う, 縦 (平) と横 (長) の和は 3 尺. 縦の長さを問う.[14]

縦 (平) を未知数とする. $-230 + 30$ 平 $-$ 平$^2 = 0$. この方程式は商を持たない.

まず, 先の方程式を得るための傍書式を求める. 和 $-$ 平 $=$ 長, 平 $\times$ (和 $-$ 平) $=$ 積 を左に寄せる. (問題に与えられた) 積を左に寄せたると相消し, 平に関する方程式を得る.

$$-\text{積} + \text{和} \times \text{平} - \text{平}^2 = 0 \quad \cdots \quad (1)$$

これは, 問題で問われている縦 (平) を未知数とする方程式で, 真術という. ($-$積 を負実 (負の実級) $a$, 和 を正方 (正の方級) $b$, $-1$ を負廉 (負の廉級) $c$ と呼ぶ. )

平方適尽方級法を用いる. 正方 $b$(和) は適尽式 (A) $b^2 - 4ac = 0$ において自乗であり次数が高いので, 問題に与えられた値を用いる. 負実 $a$($-$積) は次数が低いので, 適尽式 (A) によって商 (極数) を求める.

積を未知数とする. $4(-\text{積}) \times (-1) = 4$ 負実 $\times$ 負廉 を左に寄せる. 和$^2 =$ 正方$^2$ を左に寄せたると相消し適尽式 (A) $-$和$^2 + 4$ 積 $= 0$ を得る. これを解けば 積 $=$ 和$^2/4$.

また, 平が増加して長 (満極) となる場合を考える. それは, 縦と横が等しいときであり, 長方形は正方形 (方) となる. 只云う数は 只 $= 2$ 平 $= 2$ 長 である. 平 $\times$ 長 $=$ 積 なので, 積を未知数とする方程式

$$-\text{只}^2 + 4\,\text{積} = 0$$

を得るが, 適尽式 (A) とまったく同じなので用いない.

**替数** 縦横の和を 30 とするとき, 商を持たないときの面積の値の限界 (極) は 225 である.

$\boxed{\text{術}}$[15] 適尽式 (A) は $-30^2 + 4S = 0$ であり, 解けば $S = 225$ となる. 面積が極以下なら商をもち, 極以上なら商を持たない.

割注において次のように述べている. 「商が無い, 商が負である, 正の商を得たとしても験さなければならない, 負の数を持つもの, 数を得ても題意に背くものには限界の数 (極数) はない. 商が 2 つ以上有るとき (変商) はこれを験す. 商が無いとき, 負数を有するとき, 数を得ても題意に反するものは用いない. 条件が合えばすべて用いる. 」「最小の適尽方級法の商以下で元の方程式の商が無ければ, 次に大きい適尽方級法の商までは, 元の方程式の商が有り, その次に大きい適尽方級法の商までは商が無い, 元の方程式に商が有るか無いかは交互に現れる.」後半は元の方程式の値の変化が連続的に起こり, その境界が適尽方級法の商であることを述べている.

**加辞** 面積の 4 倍が縦横の和の 2 乗より大きいときは商を持たない. [加辞とは, この命題を問題に追加すること.]

---

[14] [関全集, 186 頁] 病題明致之法に同じ問題あり. また, [加藤 1957, 328 頁] を見よ.
[15] 術文では, 根拠 (結論のみちびき方) が述べられている.

$\boxed{\text{術}}$ 適尽式 (A) は, $f$(積) $= 4$ 積 $-$ 和$^2$ であり, その変式は次の通り.[16]

$$f(\text{積}+t) = f(\text{積}) + f'(\text{積})t = (4\,\text{積} - \text{和}^2) + 4t, \quad f'(\text{積}) = 4$$

ここで面積は, 平方適尽方級法の適尽式 (A) の商のときが限界 (極) でそれより小さいとき元の方程式が商を持つのであった. $t > 0$ に対して 積 $+ t$ とすると 積 $+ t$ が平方適尽方級法の適尽式 (A) の商とすることができる. これは上記適尽方級法の変式に他ならない. この変式において正の商 ($t > 0$) を持つためには, 変式の定数項 (実級) が負であればよい.

4 積 $-$ 和$^2 < 0$ であれば方程式 (1) が商を持つ.

4 積 $-$ 和$^2 > 0$ であれば方程式 (1) が商を持たない.

**[第 18-22 問]** 長い方の対角線を底辺とする, 菱形を半分にした二等辺三角形 (半梭) がある. 只云う, 面積と高さ (闊) の和は 5 寸. 又云う, 一辺 (面) と 高さの積を 4 寸. 高さを問う. [17]

数値を用いて書けば, 高さ (闊) を求める方程式は次の通り.

$$9 - 10\,\text{闊} + \text{闊}^2 + \text{闊}^4 = 0.$$

この方程式は商を持たない. そこでここでは商を持つための只と又に対する条件を考察する.

まず, 先の方程式を得るための傍書式を求める. 2 積 $=$ 長 $\times$ 闊, 面$^2 =$ 闊$^2 + ($長$/2)^2$ が成立する. 又$^2 =$ 面$^2 \times$ 闊$^2$ であるので, 又$^2 = \{$ 闊$^2 + ($積$/$闊$)^2\}$ 闊$^2$ となる.

分母を払って 闊$^4 +$ 積$^2 -$ 又$^2 = 0$ となる. 積 $=$ 只 $-$ 闊 を代入して整理すると, 闊に関する方程式 (真術) を得る.

$$(\text{只}^2 - \text{又}^2) - 2\,\text{只} \times \text{闊} + \text{闊}^2 + \text{闊}^4 = 0 \quad \cdots \quad \text{真術}$$

上式に三乗方適尽方級法を用い適尽式 (C) を求め, 又云う数を未知数として整理する.

三乗方適尽方級法では, 4 次式 $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ に対し, 適尽式 (C) を対応させる.
$D = 256a^2e^3 - 192a^2bde^2 - 128a^2c^2e^2 + 144a^2cd^2e - 27a^2d^4 + 144ab^2ce^2 - 6ab^2d^2e - 80abc^2de + 18abcd^3 + 16ac^4e - 4ac^3d^2 - 27b^4e^2 + 18b^3cde - b^3d^3 - 4b^2c^3e + b^2c^2d^2$.
上の $D$ で $d = 0$ として共通項 $e$ で割る.

$$D/e = 256a^3e^2 - 128a^2c^2e + 144ab^2ce + 16ac^4 - 27b^4e - 4b^2c^3$$

以下 $D/e$ を計算する.
$a =$ 只$^2 -$ 又$^2$, $b = -2$ 只, $c = 1$, $d = 0$, $e = 1$ であるので, 正項は

$$256a^3e^2 = 256(\text{只}^2 - \text{又}^2)^3 = 256\,\text{只}^6 - 768\,\text{只}^4 \times \text{又}^2 + 768\,\text{只}^2 \times \text{又}^4 - 256\,\text{又}^6,$$

$$144ab^2ce = 144(-2\,\text{只})^2(\text{只}^2 - \text{又}^2) = 576\,\text{只}^4 - 576\,\text{只}^2 \times \text{又}^2,$$

$$16ac^4 = 16(\text{只}^2 - \text{又}^2) = 16\,\text{只}^2 - 16\,\text{又}^2$$

[16] 明治前日本数学史第二巻 380・381 ページ に従い本稿では, 変式を表すのに微分係数を用いる.
[17] [関全集, 186 頁] 病題明致之法に同じ問題あり. また, [加藤 1957, 329 頁] 参照.

であり, これ等を足して,

$$256a^3e^2 + 144ab^2ce + 16ac^4 = (256\,\text{只}^6 + 576\,\text{只}^4 + 16\,\text{只}^2) \\ + (-768\,\text{只}^4 - 576\,\text{只}^2 - 16)\,\text{又}^2 + 768\,\text{只}^2 \times \text{又}^4 - 256\,\text{又}^6$$

を左に寄せる. 次に負項は,

$$128a^2c^2e = 128(\text{只}^2 - \text{又}^2)^2 = 128\,\text{只}^4 - 256\,\text{只}^2 \times \text{又}^2 + 128\,\text{又}^4,$$

$$27b^4e = 27(-2\,\text{只})^4 = 432\,\text{只}^4, \quad 4b^2c^3 = 4(-2\,\text{只})^2 = 16\,\text{只}^2$$

であり, 足し合わせて得られる

$$128a^2c^2e + 27b^4e + 4b^2c^3 = (560\,\text{只}^4 + 16\,\text{只}^2) - 256\,\text{只}^2 \times \text{又}^2 + 128\,\text{又}^4$$

と, 左に寄せたると相消して次式を得る.

$$(-256\,\text{只}^6 - 16\,\text{只}^4) + (768\,\text{只}^4 + 320\,\text{只}^2 - 16)\,\text{又}^2 + (-768\,\text{只}^2 + 128)\,\text{又}^4 + 256\,\text{又}^6 = 0$$

16 で割って, 「適尽式」をえる.

$$(-16\,\text{只}^6 - \text{只}^4) + (48\,\text{只}^4 + 20\,\text{只}^2 + 1)\,\text{又}^2 + (-48\,\text{只}^2 + 8)\,\text{又}^4 + 16\,\text{又}^6 = 0 \quad \cdots \quad \text{第 1 式}$$

また, 闊が増大したときの限界 (満極) を考える. すなわち, 闊 $=$ 長$/2$ のとき, 図形は正方形を半分にしたものになる. 積 $=$ 闊$^2$. よって 只 $=$ 闊 $+$ 闊$^2$, 又は旧のまま, すなわち式を得難い. 闊が減少して 0 になる (干極) と, 図形は直線になるので適さない.

只云う数, 又云う数を既知とし, 闊を未知数とする. 只 $=$ 闊$^2 +$ 闊 であるので,

$$-\text{只} + \text{闊} + \text{闊}^2 = 0 \quad \cdots \quad \text{前式}$$

2 闊$^2 =$ 面$^2$, 又$^2 =$ 面$^2 \times$ 闊$^2 = 2$ 闊$^4$ であるので

$$-\text{又}^2 + 2\,\text{闊}^4 = 0 \quad \cdots \quad \text{後式}$$

前式より

$$\text{只}^2 - 2\,\text{只} \times \text{闊} + \text{闊}^2 - \text{闊}^4 = 0$$

2(上式) $+$ (後式) として次を得る.

$$2\,\text{只}^2 - \text{又}^2 - 4\,\text{只} \times \text{闊} + 2\,\text{闊}^2 = 0$$

(上式) $-$ 2(前式) として次を得る.

$$(2\,\text{只}^2 + 2\,\text{只} - \text{又}^2) + (-4\,\text{只} - 2)\,\text{闊} = 0 \quad \cdots \quad \text{一式}$$

(一式) $\times$ 闊 $-$ 前式 $\times$ $(-4$ 只 $- 2)$ として次を得る.

$$(-4\,\text{只}^2 - 2\,\text{只}) + (2\,\text{只}^2 + 6\,\text{只} + 2 - \text{又}^2)\,\text{闊} = 0 \quad \cdots \quad \text{二式}$$

一式と二式を維乗し[18],

$$(2\,\text{只}^2 + 2\,\text{只} - \text{又}^2)(2\,\text{只}^2 + 6\,\text{只} + 2 - \text{又}^2) - (-4\,\text{只} - 2)(-4\,\text{只}^2 - 2\,\text{只}) = 0$$

[18] $a + bx = 0$, $c + dx = 0$ より $x$ を消去し $ad - bc = 0$ を得ること.

整理して, 又云う数を未知数とする方程式を得る.

$$4\,只^4 + (-4\,只^2 - 8\,只 - 2)\,又^2 + 又^4 = 0 \quad \cdots \quad 第2式$$

**替数** 只云う数を 5 と定め, 又云う数に対する条件を求める.
商が無いときの又云う数の極数は 4.062208 強 である.
闊が増大し長の半分となったときの又云う数の極数は 4.537804 強 である.

$\boxed{術}$ 適尽式 (第 1 式) において 只 $=5$ とすると,

$$-250625 + 30501\,又^2 - 1192\,又^4 + 16\,又^6 = 0$$

となる. これを数値的に解くと, 又 $= 4.062208$ を得る. これが無商の極数で,

又 $> 4.062208$ のとき, 商があり, 又 $< 4.062208$ のとき, 商が無い.

実際, 只云う数を 5 とすると, 真術は次のように書ける.

$$25 - 又^2 - 10x + 闊^2 + 闊^4 = 0 \quad \cdots \quad (*)$$

又 $=5$ とすると, $-10x + 闊^2 + 闊^4 = 0$. この方程式は正の商 2 を持つ. よって, 真術は、又云う数が 4.062208 より大きいときに商を持ち, 小さいときに商を持たない.

(第 2 式) において, 只 $=5$ とすると,

$$2500 - 142\,又^2 + 又^4 = 0 \quad \cdots \quad (**)$$

この方程式を畳商術[19] を用いて商を求めと,

$$少 = 4.53780424385, \quad 多 = 11.0185449423$$

の二つがある. 多は条件に背くので用いない. 少を用いる.

闊が増大したときの満極は少で, 闊が少より小さいときは 長$/2 >$ 闊 を満たし, 少より大きいときは条件に背く.

実際, 又の方程式 $(*)$ の正商の小さいほう 少 $= 4.53780424385$ より小さいときに, 長$/2 >$ 闊 を満たす. 又 $= 11.0185449423$(多) については, 元の方程式の商を考えれば負の商に対して, 長$/2 =$ 闊 を満たすことになり条件に背く.

(替数) の纏め : 4.062208 強 $<$ 又 $<$ 4.537804 強 を満たすように, 又云う数を替えれば良いことが分かる.

**加辞** $48\,只^4 \times 又^2 + 20\,只^2 \times 又^2 + 16\,又^6 + 8\,又^4 + 又^2 < 16\,只^6 + 只^4 + 48\,只^2 \times 又^4$ のとき, 商を持たない.
$4\,只^4 + 又^4 < 4\,只^2 \times 又^2 + 8\,只 \times 又^2 + 2\,又^2$ または, $又^2 > 2\,只^2 + 4\,只 + 1$ のとき, 長$/2 <$ 闊.

$\boxed{術}$ 前段の傍書式 (第 1 式) は又の奇数次の項が無いので $又^2$ を未知数とする 3 次方程式と考えられる.

$$f(又^2) = (-16\,只^6 - 只^4) + (48\,只^4 + 20\,只^2 + 1)\,又^2 + (-48\,只^2 + 8)\,又^4 + 16\,又^6$$

[19] $又^2$ を未知数とする複 2 次式と考える.

と置いて変式 $f(\text{又}^2+t)$ を開出法（組立除法）で求めると，

$$f(\text{又}^2+t)=f(\text{又}^2)+f'(\text{又}^2)t+\frac{1}{2}f''(\text{又}^2)t^2+\frac{1}{2\times 3}f'''(\text{又}^2)t^3$$

であるので，$f$ の導関数が求められる．

$$f'(\text{又}^2)=(48\,\text{只}^4+20\,\text{只}^2+1)+2(-48\,\text{只}^2+8)\,\text{又}^2+48\,\text{又}^4,$$

$$\frac{1}{2}f''(\text{又}^2)=(-48\,\text{只}^2+8)+48\,\text{又}^2,\quad \frac{1}{2\times 3}f'''(\text{又}^2)=16$$

すなわち，変式の実級が $f(\text{又}^2)$，方級が $f'(\text{又}^2)$，廉級が $\frac{1}{2}f''(\text{又}^2)$，隅級が $\frac{1}{3!}f'''(\text{又}^2)$ である．

先に見たように，又 $<4.062208$ 強 のとき，商を持たなかった．これは上記変式が正の商 $(t>0)$ を持つときであるので，変式の実級 $f(\text{又}^2)$ が負であればよい．

後段の傍書式 (第 2 式) も又の奇数次の項が無いので 又$^2$ を未知数とする 2 次方程式と考えられる．

$$g(\text{又}^2)=4\,\text{只}^4+(-4\,\text{只}^2-8\,\text{只}-2)\,\text{又}^2+\text{又}^4$$

と置いて，開出法で変式 $g(\text{又}^2+t)$ を求めると，その係数として $g$ の導関数が求められる．

$$g'(\text{又}^2)=(-4\,\text{只}^2-8\,\text{只}-2)+2\,\text{又}^2,\quad \frac{1}{2}g''(\text{又}^2)=1$$

先に見たように，4.537804 強 $<$ 又 のとき，商は条件に背いた．この不等式は，変式の実級が負 $g(\text{又}^2)$ であるか，方級 $g'(\text{又}^2)$ が正であると言い換えられる．

## 3.2 有負数者

**[第 18-23 問]** 米 3 石，麦 5 石がある．併せた価格は銀 150 銭である．只云う，米石価と麦石価の和は 60 銭．米石価を問う．
暗黙裡に，$0<$ 麦石価 $<$ 米石価 が仮定されている．

本題に与えられた数を用いて米 1 石の価格 (米石価) を得る方程式は，$-150+2$ 米石価 $=0$ で，これを解き米石価 75 銭を得，只云う数より減じ麦 1 石の価格 (麦石価) $-15$ 銭を得る．これは題意に反する．
麦石価を求める方程式を求める．負の値を得ることになるが先に求める．
米 × 米石価 + 麦 × 麦石価 = 共価銀 に 只 = 米石価 + 麦石価 を代入して，

$$(\text{只}\times\text{米}-\text{共価銀})+(\text{麦}-\text{米})\times\text{麦石価}=0\quad\cdots\quad\text{真術}$$

を得る．本文に与えられた数値を代入すると，

$$(60\times 3-150)+(5-3)\times\text{麦石価}=0\quad\cdots\quad(1)$$

この式は 1 次式で，必ず根を持つので適尽方級法を用いる必要がない．麦石価を求める式 (1) は，実級と方級のどちらも正であるから，商は負になるので求めるに及ばない．

また, 米石価と麦石価が等しいとする (麦石価が増大した満極である).
未知数を只云う数とする. 米石価 = 麦石価 なので, 只 = 2 米 (麦) 石価 で, 米 × 只 = 2 米価格, 麦 × 只 = 2 麦価格 となる. (米 + 麦) × 只 を左に寄せる.
2 共価銀 を左に寄せたると相消して次式を得る.

$$-2\,共価銀 + (米 + 麦) \times 只 = 0 \quad \cdots \quad (2)$$

解けば, 只 = 300/8 = 37.7.
次に, 麦石価を 0 とする (麦石価が減少したときの干極).
未知数を只云う数 (この場合, 米石価) とする. 只 × 米 を左に寄せる.
共価銀と左に寄せたると相消して, −共価銀 + 米 × 只 = 0. これを解けば, 只 = 150/3 = 50.
**替数** 米 3 石, 麦 5 石と定め, 併せた価格は銀 150 銭とする.
麦石価が負になるときの只云う数の極は 50 銭である.
米石価と麦石価が等しくなるときの只云う数の極は 37.5 銭である.

$\boxed{\text{術}}$ 真術で 麦石価 = 0 とすれば, 只 = 共価銀/米 = 150/3 = 50 となる.
米石価と麦石価が等しいときは, 中段式 (2) より

$$只 = 2\,共価銀/(米 + 麦) = 2 \times 150/8 = 37.5.$$

**加辞** 只 × 米 > 共価銀 のとき, 麦石価が負になり, 題意に反する.
只 × 米 + 只 × 麦 < 2 共価銀 のとき, 米石価より麦石価が高くなり, 題意に反する.

$\boxed{\text{術}}$ 真術より, 麦 − 米 = 5 − 3 = 2 なので, 実級 只 × 米 − 共価銀 > 0 のとき, 麦石価が負で, 実級 只 × 米 − 共価銀 < 0 のとき, 麦石価が正である.
中段傍書式 (2) に於いて $f(只) = -2\,共価銀 + 只 \times 米 + 只 \times 麦$ の変式 $f(X + 只)$ を考える.

$$f(X + 只) = f(只) + f'(只)X, \quad f'(只) = 米 + 麦$$

であるので, 変式が正の商 $X$ を持つためには, 実級が負でなければならない.

**[問題 18-24]** 4 角柱がある. 只云う, 体積の内から一辺 (方) の 48 倍を引いた余りは 184 寸. 又云う高さと一辺の自乗を併せて 26 寸とする. 一辺を問う.

題中の数値を用いて方を求める方程式は次の通り.

$$184 + 48\,方 - 26\,方^2 + 方^4 = 0$$

これを解くと 方 = 負 2 寸 (−2 寸) を得る. [20]
次に, 先の方程式を得るための傍書式を求める.
只 = 積 − 48 方 = 184, 48 = 箇数, 又 = 高 + 方$^2$ = 26, 方$^2$ × 高 = 只 + 48 方, 高 = 又 − 方$^2$ より高を消去し, 方$^2$(又 − 方$^2$) = 只 + 箇数 × 方 を得る. これを整理すると, 真術を得る.

$$只 + 箇数 \times 方 - 又 \times 方^2 + 方^4 = 0 \quad \cdots \quad 真術$$

[20] $(方 + 2)(方^3 - 2\,方^2 + 48 + 184) = 0$ より, 方 = −2, −5.3420660, 3.6710330 ± 1.9352824$i$

三乗方適尽方級法を用いる．只云う数を未知数とする．$a=$ 只, $b=$ 箇数, $c=-$又, $d=0$, $e=1$ より，

$$256a^3e^3=256\,只^3,\quad 144ab^2ce=-144\,只\times箇数^2\times又,\quad 16ac^4=16\,只\times又^4$$

が正項で，

$$-128a^2c^2e=-128\,只^2\times又^2,\quad -27b^4e=-27\,箇数^4,\quad -4b^2c^3=4\,箇数^3\times又^3$$

が負項である．三つの正項をたし合わせ, $256\,只^3-144\,只\times箇数^2\times又+16\,只\times又^4$ を左に寄せる．次に三つの負項をたし合わせ, $128\,只^2\times又^2+27\,箇数^4-4\,箇数^2\times又^3$ と左に寄せたると相消して次式を得る．

$$4\,箇数^2\times又^3-27\,箇数^4+(16\,又^4-144\,箇数^2\times又)\,只-128\,又^2\times只^2+256\,只^3=0\quad\cdots\quad(1)$$

**替数**　又云う数を 26 寸, 箇数を 48 と定めるとき, 負の商を持つ只云う数の極は 9 寸である．

$\boxed{術}$　三乗方適尽方級法の傍書式 (1) に, 定めた又云う数, 箇数を代入する．

$4\,箇数^2\times又^3-27\,箇数^4=18653184$　定数項 (正実),
$144\,箇数^2\times又-16\,又^4=1314560$　1 次係数 (負方),
$128\,又^2=86528$　2 次係数 (負廉),　256　3 次係数 (正隅)

である．よって，

$$18653184-1314560\,只-86528\,只^2+256\,只^3=0$$

を得る．$256(只^3-338\,只^2-5135\,只+72864)=0$ は因数分解できて，

$$256(只-352)(只-9)(只+23)=0$$

となる．只は正であるので, 多 $=352$, 少 $=9$ が正の商である．多 $=352$ のとき正の商を持たない．少 $=9$ のとき正の商を持つ．故に 9 を極数とする．

只 $>352$ のとき商を持たない．只 $\leq 9$ のとき正の商を持つ (正の商 2 個, 負の商 2 個を持つ)．$9<$ 只 $\leq 352$ のとき負の商を持つ．

本文割注に「此数己下無負商己上有負商」とある．此の数を上記の極 9 とすると, 9 より小さいとき ($0<$ 只 $<9$) も負の商が有る．9 より大きいときも, 352 より大きいときは商を持たない．「己下無負商己上有負商」とあるのは,「己下有正商己上無正商」と思われるが不明？

**加辞**

$$256\,只^3+16\,只\times又^4+4\,又^3\times箇数^2<128\,只^2\times又^2+144\,只\times又\times箇数^2+27\,箇数^4,$$

または $6\,只>又^2$ のとき 負の商を持つ．

$\boxed{術}$　三乗方適尽方級法の傍書式 (1) に於いて，

$$f(只)=256\,只^3+16\,只\times又^4+4\,又^3\times箇数^2-128\,只^2\times又^2$$
$$-144\,只\times又\times箇数^2-27\,箇数^4$$

と置いて, 開出法により変式 $f(X+\text{只})$ を求めると

$$f(X+\text{只})=f(\text{只})+f'(\text{只})X+\frac{1}{2}f''(\text{只})X^2+\frac{1}{2\times 3}f'''(\text{只})X^3$$

であるので, 導関数が求められる.

$$\begin{aligned} f'(\text{只}) &= 768\,\text{只}^2+16\,\text{又}^4-256\,\text{只}\times\text{又}^2-144\,\text{又}\times\text{箇数}^2,\\ \tfrac{1}{2}f''(\text{只}) &= 768\,\text{只}-128\,\text{又}^2,\quad \tfrac{1}{2\times3}f'''(\text{只})=256 \end{aligned}$$

少商のとき ($\text{只}=9$) 方・廉ともに負であり, 多商のとき ($\text{只}=352$) 方・廉ともに正であるので, 変式の実級が負, または廉級が正のとき, 正商を持たない.

廉が正には, 正商, 負商を共に持たないときを含んでいると思われるが, 本文に「有負商」とあるのは不明？

### 3.3 得数背者

[第 18-25 問] 等脚台形がある. 上底 (上闊) は 1 尺 2 寸, 対角線 (内斜) は 1 尺 5 寸である. 只云う, 斜辺 (外斜) の 2 倍と下底 (下闊) の和は 2 尺 3 寸. 下底を問う.

暗黙裡に, 外斜 $>$ (下 $-$ 上)/2 $>$ が仮定されている。

題中の数値を用いれば, 下底（下）は方程式 $-371+2\,\text{下}+\text{下}^2=0$ を満たす. この方程式を解けば, $\text{下}=\sqrt{372}-1=18.2873015$ を得る. このとき,

$$(\text{下}-\text{上})/2=3.14365,\quad \text{外}=(\text{只}-\text{下})/2=2.35635$$

であるので, 外 $<$ (下 $-$ 上)/2 となり暗黙の仮定に反する.

次に, 上の方程式を一般に得るための傍書式を求める. 内斜を内, 外斜を外, 上闊を上, 下闊を下とする. 高さ (長) を長とする. $\text{只}=2\,\text{外}+\text{下}=23$ より $\text{外}=(\text{只}-\text{下})/2$ である. $\text{外}^2=\text{長}^2+(\text{下}-\text{上})^2/4$ および $\text{内}^2=\text{長}^2+(\text{下}+\text{上})^2/4$ より外, 長を消去して,

$$\text{内}^2-(\text{只}-\text{下})^2/4=(\text{下}+\text{上})^2/4-(\text{下}-\text{上})^2/4$$

を得る. これを整理すると, $4\,\text{内}^2-\text{只}^2+2\,\text{只}\times\text{下}-\text{下}^2=4\,\text{上}\times\text{下}$ となり, 真術を得る.

$$(\text{只}^2-4\,\text{内}^2)+(-2\,\text{只}+4\,\text{上})\,\text{下}+\text{下}^2=0\quad\cdots\quad(1)\quad \text{真術}$$

傍書式の実級は正の場合と負の場合が起こる. 廉と同符号のときは正商を持たない場合がある. そこで, 平方適尽方級法により無商の極を求める.

只云う数を未知数とする. (正実) $\times$ (正廉) $=\text{只}^2-4\,\text{内}^2$ を左に寄せる.

$(\text{負方}/2)^2=(\text{只}-2\,\text{上})^2$ と左に寄せると相消して適尽式を得る.

$$(-\text{上}^2-\text{内}^2)+\text{只}\times\text{上}=0\quad\cdots\quad(2),$$

これを解いて, $\text{只}=(\text{上}^2+\text{内}^2)/\text{上}=369/12=30.75$.

また, 上底が増大し下底と等しくなるとき (満極), 図形は長方形 (を立てた形) になる. 上 $=$ 下で, 外 $=$ 長 より, $\text{只}-\text{上}=2\,\text{長}$.

只云う数を未知数とする. $(2\,\text{長})^2+4\,\text{上}^2$ を左に寄せる. $4\,\text{内}^2$ と左に寄せたると相消して方程式 $\text{只}^2-2\,\text{只}\times\text{上}+\text{上}^2+4\,\text{上}^2-4\,\text{内}^2=0$ を得る。整理して、次を得る.

$$(5\,\text{上}^2-4\,\text{内}^2)-2\,\text{只}\times\text{上}+\text{只}^2=0\quad\cdots\quad(3)$$

また, 長が減少して0になったときの干極の場合, 図形は一直線になる. このとき 長 $=0$ なので, $(下-上)/2=外$, $(下+上)/2=内$, $只=2下-上$.

只云う数を未知数とする. $只+上=2下$ であるので $2下+2上$ を左に寄せる. 4内 と左に寄せたると相消し $(只+上)+2上-4内=0$ を得る. したがって,

$$(3上-4内)+只=0 \quad \cdots \quad (4)$$

**替数**　上底を1尺2寸, 内斜を1尺5寸と定め, 真術が解を持つような只云う数を求める.
上底と下底が等しくなるとき, 只云う数の極は3尺である.
長が 0 となるとき, 只云う数の極は2尺4寸である.

$\boxed{術}$ 前段式(2) $(-上^2-内^2)+只\times上=0$ より, $只=(上^2+内^2)/上=369/12=30.75$ である. $只<30.75$ のとき商をつ. $只>30.75$ のとき商を持たない.

中段式(3)

$$(5上^2-4内^2)-2只\times上+只^2=0$$

$4内^2-5上^2=180\mathrm{d}$ 負実, $2上=24$ 負方, 1 正廉より,

$$-180-24只+只^2=0,$$

因数分解できて, $(只-30)(只+6)=0$, $只=30$.

$只<30$ のとき, $上底<下底$, $只>30$ のとき, $上底>下底$. 条件に背き, 正商が有ってもこの商を用いない.

後段式(4)より, $只>24$ のとき, 長を得る. $只<24$ ならば, 長を得られない.

**加辞**　$5上^2+只^2>4内^2+2上\times只$ のとき $上>下$ となる.
$只+3上<4内$ のとき長は求められない.

$\boxed{術}$ 只云う数を商として中段の傍書式(3)に於いて, 開出法により,

$$f(只)=5上^2+只^2-4内^2-2只\times上$$

の変式を求めると, 次のようになる.

$$f(X+只)=f(只)+f'(只)X+\frac{1}{2}f''(只)X^2, \quad f'(只)=2只-2上, \quad \frac{1}{2}f''(只)=1.$$

実級 $f(只)$ が正のとき正の商を持たない.

また, 只云う数を商として後段の傍書式(4)に於いて, 開出法により,

$$g(只)=3上-4内+只$$

の変式を求めれば, 次を得る.

$$g(X+只)=g(只)+g'(只)X, \quad g'(只)=1$$

実級 $g(只)$ が負のとき変式は負の商を持たない.

[第 18-26 問]　四角錐台がある．体積は 254 寸である．只云う，上面の一辺 (上方) と底面の一辺 (下方) の和は 1 尺 3 寸．又云う，上面の一辺は高さより 1 寸多い．上面の一辺を問う．

暗黙裡に，$0 <$ 上方 $<$ 下方 が仮定されている．

題中の数値を用いて上面の一辺を求める方程式は次の通り．

$$-931 + 182\,上 - 14\,上^2 + 上^3 = 0$$

この方程式を解き，上 $= 7$ を得る．したがって，下 $= 6$，高 $= 6$ なので，上 $>$ 下 となり，得られた正の商は問題の条件に反する．

次に，先の方程式を得るための傍書式を求める．

$$\begin{aligned} 3\,積 &= 高\,(上^2 + 上 \times 下 + 下^2) \\ &= (上 - 多)\{\,上^2 + 上\,(和 - 上) + (和 - 上)^2\} = (上 - 多)(上^2 - 上 \times 和 + 和^2) \\ &= 上^3 + (-多 - 和)\,上^2 + (多 \times 和 + 和^2)\,上 - 多 \times 和^2 \end{aligned}$$

より，

$$(-多 \times 和^2 - 3\,積) + (多 \times 和 + 和^2)\,上 + (-多 - 和)\,上^2 + 上^3 = 0 \quad \cdots \quad 真術$$

を得る．傍書式をみると定数項 (実級) が負であるので，与えられた数の多少に依らず正商を得る．正商が条件にあう限界 (極) を求める．

また，上の面の一辺が増大し下の面の一辺と等しくなるとき，四角柱になる．このとき，上 $=$ 下 なので，和 $= 2\,上 = 2\,下$ である．積 (体積) を未知数とする．以下の式 (1) に見るように，只云う数 (和) について 3 次式になるが，積は 1 次で次数が低いので，積を未知数とする．

$$3\,積 = 高\,(上^2 + 上 \times 下 + 下^2) = 3\,高 \times 上^2.$$

高 $=$ 上 $-$ 多，上 $=$ 和$/2$ より，積 $= (和/2 - 多)(和/2)^2$ を得る．これを整理して，

$$(和^3 - 2\,多 \times 和^2) - 8\,積 = 0 \quad \cdots \quad (1)$$

**替数**　和を 1 尺 3 寸と定め，上が高より 1 寸多いとする．
上方が増大し下方と等しくなるときの積の極は 232.375 寸である．

$\boxed{術}$　上 $=$ 下 のときの方程式 (1) より，

$$積 = (和 - 2\,多)\,和^2/8 = 1859/8 = 232.75$$

である．

積 $< 232.375$ のとき，下 $>$ 上 となり，問題の条件に適する．

積 $> 232.375$ のとき，下 $<$ 上 となり，問題の条件に背く．

**加辞**　$8\,積 + 2\,和^2 \times 多 > 和^3$ のとき 下 $<$ 上 となる．

$\boxed{術}$　上 $=$ 下 のときの方程式 (1) に於いて，開出法により，

$$f(積) = 和^3 - 2\,和 \times 多 - 8\,積$$

の変式を求めれば，次を得る．

$$f(X + 積) = f(積) + f'(積)X, \quad f'(積) = -8$$

変式の実級 $f(積)$ が負のとき，変式は負の商を持つ．したがって，積 $= 232.75 - X >$ 232.75 で 下 $<$ 上 で，題意に背く．

## 参考文献

[明治前] 日本学士院編『明治前日本数学史第二巻』新訂版, 井上書店, 1979年. (原著は, 1954-1960年に刊行)

[加藤 1957] 加藤平左エ門『和算ノ研究　方程式論』覆刻版　佐々木力解説, 海鳴社, 2011年 (原著は 1957年)

[関全集] 平山諦他編『関孝和全集』大阪教育図書, 1974年

[後藤 2001] 後藤武史「大成算経の前集の研究」, 数学史の研究, 数理解析研究所講究録 1195(2001), 128-138.

[後藤 2002] 後藤武史「大成算経における判別式の求め方」, 数学史の研究, 数理解析研究所講究録 1257(2002), 186 - 197.

[柏原 2005] 柏原信一郎「『大成算経』巻之十六　題術辯について」, 数学史の研究, 数理解析研究所講究録 1444(2005), 209 - 221.

[小松 2007] 小松彦三郎「「大成算経」校訂本作成の現状報告」, 数学史の研究, 数理解析研究所講究録 1546(2007), 140 - 156.

[藤井 2012] 藤井康生「大成算経巻之十六 (權術) について」, 数学史の研究, 数理解析研究所講究録 1787(2012), 65 - 78.

email: yfujii@pearl.ocn.ne.jp