数理解析研究所講究録
第1831巻2013年31-52

「解伏題之法」の行列式と「大成算経」の行列式について

Determinant in the *Kaifukudai no Hō* and that in the *Taisei Sankei*

真島 秀行 (Majima, Hideyuki)
お茶の水女子大学 理学部
Department of Mathematics, Ochanomizu University

日本が誇る江戸時代の数学者（和算家）関（新助）孝和は,「解伏題之法」[1]（天和癸亥重陽日重訂書）の写本の中で今日我々が行列式と呼ぶものを論じている．天和三年九月九日で西暦1683年にそれ以前に書かれていた原稿の二度目の改訂稿として書かれたことである．二つ以上の未知数に関する連立高次代数方程式から，一つの未知数を消去してその他の未知数に関する高次代数方程式（従って最終的には一つの未知数の高次代数方程式）を得るアルゴリズム（計算手順）として導入している．これは行列式について世界的にみても最も早い論考である．一方，関孝和，建部賢弘，建部賢明の「三士相議シテ天和三年ノ夏ヨリ，賢弘其首領ト成テ，各新ニ考ヘ得ル所ノ妙旨悉ク著シ，就テ古今ノ遺法ヲ尽テ，元禄ノ中年ニ至テ編集ス．総十二巻，算法大成ト号シテ粗是ヲ書写セシニ，事務ノ繁キ吏ト成サレ，自ラ其微ヲ窮ル事得ズ．孝和モ又老年ノ上，爾歳病患ニ逼ラレテ考検熟思スル□能ハズ，是ニ於テ同十四年ノ冬ヨリ，賢明官吏ノ暇ニ躬ヲ其思ヲ精スル事一十年，広ク考ヘ詳ニ註シテ二十巻ト作シ，更ニ大成算経ト号テ，手親ラ草書シ畢レリ」という「大成算経」[2]の巻十七にある行列式は前とは異なる表現を与えている．本質的に同じ式を違う表現で表している.「大成算経」の巻十七の「(現在の記号法では）第一行に関する展開式」が消去の考えからは，自然と思われるが，原稿段階と思われる「解伏題之法」では,「逐式交乗」と「交式斜乗」の方法で書かれている．

彼らの発想がどのようであって「大成算経」の最終段階で「第一行に関する展開式」という表現になったか，ということを論じておきたい．

彼らは，記号としては漢字（十干　甲乙丙丁戊己庚辛壬癸，十二支　子丑寅卯辰巳午未申酉戌亥，二十八宿　角亢氐房尾箕斗牛女虚危室壁奎婁胃昴畢觜参井鬼柳星張翼軫　など）を使って，第一式から順に右から左へ昇べきで上から下へ記述している．それは，右上を支点として反時計回りに９０度回転させることにより，現在の記号法となり，第一式から順に上から下へで昇べきで左から右への記述と見做せる．

以下ではこの記述方法で，添え字を使った今日我々が習う西洋流の記号に翻訳して解釈を説明していく．

講演者が二十数年ほど前から線形代数の講義で行列式を教えるときに使っている３元３連立線形方程式をうまく解く方法では（割り算をしなくてよく）自然に３次の行列式とその性質を導くことができるが，それを多元高次方程式の場合に適用した方法で説明する．それがまさに「第一行に関する展開式」であり，関孝和はそれを知っていたと考えられる．というのは,「解伏題之法（天和三年重訂)」の換式第四で，例えば，**2つの3次方程式から終結式を作る過程で出てくる3次項を消去して得られる3つの2次方程式を導くときの計算法が**，まさにその計算法といえるからである．そして，これよりは見易い表現と考えたまとめ方が関孝和の「解伏題之法」の「逐式交乗」の方法及び「交式斜乗の方法」と考えられる．

「解伏題之法」では１次式２つの場合，２次式３つの場合，３次式４つの場合について，逐一計

---

[1]「解伏題之法」*Kaifukudai no Hō* (Method for Solving Concealed Problems)
[2]「大成算経」*Taisei Sankei* (Comprehensive Classic of Mathematics)

算（逐式交乗）した後，次のように述べて「交式斜乗」の形で述べている.「右各逐式交乗而得正尅也　雖然相乗数位繁多而不易見　故以交式斜乗代之（右各逐式交乗して正尅を得る也. 然りと雖も相乗の数，位繁多にして見易からず. 故に交式斜乗を以って之に代える)」

この表現では4次までは正しかったが，5次以上では正しく記述されなかった. そこで「大成算経」では，元々の自然な考えである「第一行に関する展開式」に戻して記述したと推察できる.

2次行列式　次の y に関する2連立1次方程式を考える.

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}y=0 \ \ldots(1) \\ x_{21}+x_{22}y=0 \ \ldots(2) \end{cases}$$

(1) と (2) から y を消去するため，$(1)\times x_{22}+(2)\times(-x_{12})$ を計算して次式を得る.

$$(+x_{11}x_{22}-x_{21}x_{12})+(+x_{12}x_{22}-x_{22}x_{12})y \ = \ 0$$

$$+x_{11}x_{22}-x_{21}x_{12}=+x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21}$$

であり，ここで得られた式は2次行列の行列式

$$\det_2\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}=\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} \begin{aligned} &= +x_{11}x_{22}-x_{21}x_{12} \\ &= +x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21} \end{aligned}$$

であり，第一列に関する展開式とも，第一行に関する展開式とも，逐式交乗の表現とも，1つの正符号の（元来の位置にしたときの）右斜乗と1つの負符号の（元来の位置にしたときの）左斜乗の和とも見られる表現になる.

上の消去法は，1 と y の係数だけ取り出して2次行列を書けば，第一列の余因子を掛けて次の式を得たことにもなっている.

$$[x_{22} \ -x_{12}]\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} +x_{22}x_{11}-x_{12}x_{21} & +x_{22}x_{12}-x_{12}x_{22} \end{bmatrix}$$

2次行列式は簡単にどのようにも見做しうるが，次数が高くなったときの説明のために敢えて，式に番号を振り，計算して式の解釈を与えた.「解伏題之法」では第一列に関する展開式とも，1つの正符号の（元来の位置にしたときの）右斜乗と1つの負符号の（元来の位置にしたときの）左斜乗の和とも見られる表としてまとめ逐式交乗の表現と言っている.「大成算経」では「第一行に関する展開式」を「平方交乗法」（2次行列の交乗法）で得られる式としている.

3次行列式　次の y に関する3連立2次方程式を考える.

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}y+x_{13}y^2=0 \ \ldots(1) \\ x_{21}+x_{22}y+x_{23}y^2=0 \ \ldots(2) \\ x_{31}+x_{32}y+x_{33}y^2=0 \ \ldots(3) \end{cases}$$

これら3式から y と y^2 を消去する方法は何通りか考えられるが，上手にやらないと行列式となるべきものにさらに係数が掛けられた式が出て来てしまい，最終的な次数を評価する際に損をする. その係数を割って行列式を出すことになる. この方法が普通の和算の方法であり，線形代数の本

でもその方法が書かれている．下手な方法であるが上手な方法と比較するために書いておく．

(1) と (2) から y^2 を消去した式，(1) と (3) から y^2 を消去した式を出しそれらから，y を消去することによって，y と y^2 を消去する方法

(1) と (2) から y^2 を消去するため，(1) $\times x_{23}$ + (2) $\times (-x_{13})$ を計算して次式 (*) を得る．

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{13} \\ x_{21} & x_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{22} & x_{23} \end{vmatrix} y = 0 \quad \ldots (*)$$

(1) と (3) から y^2 を消去するため，(1) $\times x_{33}$ + (3) $\times (-x_{13})$ を計算して次式 (**) を得る．

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{13} \\ x_{31} & x_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} y = 0 \quad \ldots (**)$$

(*) と (**) は y の一次式あるから，

$$(*) \times \begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} - (**) \times \begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{22} & x_{23} \end{vmatrix}$$

すなわち，

$$(1) \times \left(x_{23} \begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} - x_{33} \begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{22} & x_{23} \end{vmatrix} \right) + (-x_{13}) \begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} - (-x_{13}) \begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{22} & x_{23} \end{vmatrix}$$

を計算すると y も消去した式を得る．ただし，出てくる項はすべて 4 つの係数をかけたものからなる．相消し合う項があり，整理すると x_{13} が共通因子として括って（後に書く）「第一列に関する展開式」）を得る．

$$x_{13}((-x_{11}x_{32}x_{23}) + (+x_{21}x_{32}x_{13} - x_{21}x_{12}x_{33}) + x_{11}x_{22}x_{33} + (+x_{31}x_{12}x_{23} - x_{31}x_{22}x_{13})) = 0$$

$$x_{13}((+x_{11}x_{22}x_{33} - x_{11}x_{32}x_{23}) + (+x_{21}x_{32}x_{13} - x_{21}x_{12}x_{33}) + (+x_{31}x_{12}x_{23} - x_{31}x_{22}x_{13})) = 0$$

(2) と (3) から y を消去した式と y^2 を消去した式を出し (1) と合せて y と y^2 を消去する方法（「解伏題之法」及び「大成算経巻十七」の「換式」では，前式と後式の二式から y^2 を消去した式と y を消去した式を導き，そのとき一方の y の係数と他方の y^2 の係数が符号を除いて一致すること利用して，さらに項を消去することを，計算過程で用いているから以下の計算法には気付いていたと考えられる．）

(2) と (3) から y を消去するため，(2) $\times x_{32}$ + (3) $\times (-x_{22})$ を計算して次式を得る．

$$\begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} y^2 = 0 \quad \ldots (4) \qquad \begin{vmatrix} x_{22} & x_{21} \\ x_{32} & x_{31} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} y^2 = 0 \quad \ldots (4)'$$

(2) と (3) から y^2 を消去するため，(2) $\times x_{33}$ + (3) $\times (-x_{23})$ を計算して次式を得る．

$$\begin{vmatrix} x_{21} & x_{23} \\ x_{31} & x_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} y = 0 \quad \ldots (5)$$

(4) の y の係数と (5) の y^2 の係数が符号を除いて同じであるから，これらと (1) を使い，
(1) $\times \begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} + (5) \times (-x_{12}) + (4) \times x_{13}$ を計算すると y も y^2 も消去した

$$x_{11}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} - x_{12}\begin{vmatrix} x_{21} & x_{23} \\ x_{31} & x_{33} \end{vmatrix} + x_{13}\begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{vmatrix} = 0$$

という式（「第一行に関する展開式」）を得る.「大成算経」にはこの式の表現を書いている.
２次行列式で表したところを展開しておくと,

$$(+x_{11}x_{22}x_{33} - x_{11}x_{32}x_{23}) + (+x_{31}x_{12}x_{23} - x_{21}x_{12}x_{33}) + (+x_{21}x_{32}x_{13} - x_{31}x_{22}x_{13}) = 0$$

であるが，これは結局，(1), (2), (3) の式から直接計算したと考えると
(1) $\times \begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} + [(2) \times x_{33} + (3) \times (-x_{23})] \times (-x_{12}) + [(2) \times x_{32} + (3) \times (-x_{22})] \times x_{13}$,
すなわち,
(1) $\times \begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} + (2) \times [x_{33}(-x_{12}) + x_{32}x_{13}] + (3) \times [(-x_{23})(-x_{12})] + (-x_{22})x_{13}]$
という計算であり，２次行列式を展開した表し方では,

$$(+x_{11}x_{22}x_{33} - x_{11}x_{32}x_{23}) + (+x_{21}x_{32}x_{13} - x_{21}x_{12}x_{33}) + (+x_{31}x_{12}x_{23} - x_{31}x_{22}x_{13}) = 0$$

であり，２次行列式を使って次式（「第一列に関する展開式」）とも一致することが分かる.

$$x_{11}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} + x_{21}\begin{vmatrix} x_{32} & x_{33} \\ x_{12} & x_{13} \end{vmatrix} + x_{31}\begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{22} & x_{23} \end{vmatrix} = 0$$

$$x_{11}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} + x_{21}\left(-\begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}\right) + x_{31}\begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{22} & x_{23} \end{vmatrix} = 0$$

これは，次のように「3つの正符号の右下がり斜乗と3つの負符号の左下がり斜乗の和」とも解釈できる.

$$\det_3\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{vmatrix} = +x_{11}x_{22}x_{33} + x_{21}x_{32}x_{13} + x_{31}x_{12}x_{23} \\ -x_{11}x_{32}x_{23} - x_{21}x_{12}x_{33} - x_{31}x_{22}x_{13}$$

「解伏題之法」には (1), (2), (3) の各式にそれぞれ上に書いた２次行列式の正符号を掛けた式と負符号の項を掛けた式を（「算盤」形式の）表にまとめている．それは，計算の結果として0となる項も敢えて書いた $1, y, y^2$ についての次の式を書いたことになっている.

$$\begin{aligned}
&+\{x_{11} \times [x_{22}x_{33} - x_{32}x_{23}] + x_{21} \times [(-x_{12})x_{33} + x_{32}x_{13}] + x_{31} \times [(-x_{12})(-x_{23}) + (-x_{22})x_{13}]\} \\
&+\{x_{12} \times [x_{22}x_{33} - x_{32}x_{23}] + x_{22} \times [(-x_{12})x_{33} + x_{32}x_{13}] + x_{32} \times [(-x_{12})(-x_{23}) + (-x_{22})x_{13}]\}y \\
&+\{x_{13} \times [x_{22}x_{33} - x_{32}x_{23}] + x_{23} \times [(-x_{12})x_{33} + x_{32}x_{13}] + x_{33} \times [(-x_{12})(-x_{23}) + (-x_{22})x_{13}]\}y^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

それらの表は,「第一列に関する展開式」とも解釈できるが,「3つの正符号の右下がり斜乗と3つ

の負符号の左下がり斜乗の和」とも解釈できるものであって，(３次行列の)「逐式交乗」の方法と言われる．

斜乗の方法は，日本の線形代数の教科書ではサラスの方法というが，関の方法，一歩譲っても，関 - サラスの方法と呼ぶべきである．

また，３次同次の６項をそれぞれ，

$$u1 = x_{11}x_{22}x_{33},\quad u2 = x_{21}x_{32}x_{13},\quad u3 = x_{31}x_{12}x_{23}$$
$$d1 = x_{11}x_{32}x_{23},\quad d2 = x_{21}x_{12}x_{33},\quad d3 = x_{31}x_{22}x_{13}$$

と表すとき，６項の和における表記順は任意であるが上の計算式では，

$$+u1 - d1 - d2 + u3 + u2 - d3,\quad +u1 - d1 + u2 - d2 + u3 - d3,\quad +u1 + u2 + u3 - d1 - d2 - d3$$

になっていることに注目しておく．右斜乗と左斜乗の和として表すやり方はいくつもあるが，そのうちの３つが自然に現れている．対角線の右斜乗，左斜乗を順に書いていこうとすれば，

$$+u1 - d3 + u3 - d1 + u2 - d2,\quad +u1 - d3 - (+d1 - u3) + u2 - d2,$$

となることに注意する．

4 次行列式　次に y に関する 4 連立 3 次方程式を考える．

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12}y + x_{13}y^2 + x_{14}y^3 = 0 \ \dots (1) \\ x_{21} + x_{22}y + x_{23}y^2 + x_{24}y^3 = 0 \ \dots (2) \\ x_{31} + x_{32}y + x_{33}y^2 + x_{34}y^3 = 0 \ \dots (3) \\ x_{41} + x_{42}y + x_{43}y^2 + x_{44}y^3 = 0 \ \dots (4) \end{cases}$$

この 4 式のうち (2),(3),(4) の 3 式から y, y^2, y^3 の項をそれぞれ一つだけ残す式を作ることを考える，すなわち，y について 0 次と 1 次，2 次，3 次のうちの一つだけを残す式を 3 次行列式を考えたときのやり方で考えると（現代風には，0 次項を非同次項と看做して 1 次，2 次，3 次についてクラメールの公式で解いた式で分母にくる 3 次行列式を払った式を考えることになるが）y, y^2, y^3 の項のうち y の項だけを残す式は，次のように導ける．

(3) と (4) から y^2 を消去するため，$(3) \times x_{43} + (4) \times (-x_{33})$ を計算して次式を得る．

$$\begin{vmatrix} x_{31} & x_{33} \\ x_{41} & x_{43} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{32} & x_{33} \\ x_{42} & x_{43} \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_{34} & x_{33} \\ x_{44} & x_{43} \end{vmatrix} y^3 \ \dots (5)$$

$$\begin{vmatrix} x_{31} & x_{33} \\ x_{41} & x_{43} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{32} & x_{33} \\ x_{42} & x_{43} \end{vmatrix} y - \begin{vmatrix} x_{33} & x_{34} \\ x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} y^3 \ \dots (5)'$$

(3) と (4) から y^3 を消去するため，$(3) \times x_{44} + (4) \times (-x_{34})$ を計算して次式を得る．

$$\begin{vmatrix} x_{31} & x_{34} \\ x_{41} & x_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{32} & x_{34} \\ x_{42} & x_{44} \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_{33} & x_{34} \\ x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} y^2 = 0 \ \dots (6)$$

(5) の y^2 の係数と (6) の y^3 の係数が符号を除いて同じであるから，これらと (2) を使い，$(2) \times \begin{vmatrix} x_{33} & x_{34} \\ x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} + (6) \times (-x_{23}) + (5) \times x_{24}$ を計算すると，$(2) \times \begin{vmatrix} x_{33} & x_{34} \\ x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} + (6) \times (-x_{23}) + (5) \times x_{24}$

を計算する y^2 も y^3 も消去した式を得る.

$$\left(x_{21}\begin{vmatrix} x_{33} & x_{34} \\ x_{43} & x_{44}\end{vmatrix} - x_{23}\begin{vmatrix} x_{31} & x_{34} \\ x_{41} & x_{44}\end{vmatrix} + x_{24}\begin{vmatrix} x_{31} & x_{33} \\ x_{41} & x_{43}\end{vmatrix}\right)$$
$$+\left(x_{22}\begin{vmatrix} x_{33} & x_{34} \\ x_{43} & x_{44}\end{vmatrix} - x_{23}\begin{vmatrix} x_{32} & x_{34} \\ x_{42} & x_{44}\end{vmatrix} + x_{24}\begin{vmatrix} x_{32} & x_{33} \\ x_{42} & x_{43}\end{vmatrix}\right) y = 0$$

あるいは，この計算は，$(2)\times\begin{vmatrix} x_{33} & x_{34} \\ x_{43} & x_{44}\end{vmatrix} - (3)\times\begin{vmatrix} x_{23} & x_{24} \\ x_{43} & x_{44}\end{vmatrix} + (4)\times\begin{vmatrix} x_{23} & x_{24} \\ x_{33} & x_{34}\end{vmatrix}$ を計算することになって，y^2 と y^3 が消去された見掛け上と少し違うが実は同じ次の式を得る.

$$\left(x_{21}\times\begin{vmatrix} x_{33} & x_{34} \\ x_{43} & x_{44}\end{vmatrix} - x_{31}\times\begin{vmatrix} x_{23} & x_{24} \\ x_{43} & x_{44}\end{vmatrix} + x_{41}\times\begin{vmatrix} x_{23} & x_{24} \\ x_{33} & x_{34}\end{vmatrix}\right)$$
$$+\left(x_{22}\times\begin{vmatrix} x_{33} & x_{34} \\ x_{43} & x_{44}\end{vmatrix} - x_{31}\times\begin{vmatrix} x_{23} & x_{24} \\ x_{43} & x_{44}\end{vmatrix} + x_{41}\times\begin{vmatrix} x_{23} & x_{24} \\ x_{33} & x_{34}\end{vmatrix}\right) y = 0$$

これらは，前節の表記を使えば，3次行列式の第一行，あるいは，第一列に関する展開式になっており，次の式を得る.

$$\begin{vmatrix} x_{21} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{43} & x_{44}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{42} & x_{43} & x_{44}\end{vmatrix} y \quad = \quad 0$$

同様にして，詳細は略するが，次の式も得られる. y, y^2, y^3 の順を y^2, y^3, y, あるいは, y^3, y, y^2, と入れ換えて作った式を考えればよい. すなわち，列番号を，2,3,4 を 3,4,2 あるいは，4,2,3 と入れ換えた式を作ればよい. すなわち，$(2)\times\begin{vmatrix} x_{34} & x_{32} \\ x_{44} & x_{42}\end{vmatrix} - (3)\times\begin{vmatrix} x_{24} & x_{22} \\ x_{44} & x_{42}\end{vmatrix} + (4)\times\begin{vmatrix} x_{24} & x_{22} \\ x_{34} & x_{32}\end{vmatrix}$ を計算することによって，y^3 と y が消去された見掛け上と少し違うが実は同じ次の式を得，また，$(2)\times\begin{vmatrix} x_{33} & x_{34} \\ x_{43} & x_{44}\end{vmatrix} - (3)\times\begin{vmatrix} x_{23} & x_{24} \\ x_{43} & x_{44}\end{vmatrix} + (4)\times\begin{vmatrix} x_{23} & x_{24} \\ x_{33} & x_{34}\end{vmatrix}$ を計算することによって，y と y^2 が消去された見掛け上と少し違うが実は同じ次の式を得る.

$$\begin{vmatrix} x_{22} & x_{21} & x_{24} \\ x_{32} & x_{31} & x_{34} \\ x_{42} & x_{41} & x_{44}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{42} & x_{43} & x_{44}\end{vmatrix} y^2 \quad = \quad 0$$
$$\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} & x_{21} \\ x_{32} & x_{33} & x_{31} \\ x_{42} & x_{43} & x_{41}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{42} & x_{43} & x_{44}\end{vmatrix} y^3 \quad = \quad 0$$

(列の入れ換えによる符号の変化は2次行列式，3次行列式については順に確立でき）そして，これらの式に順に x_{12}, x_{13}, x_{14} を掛けて (1) の $\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{42} & x_{43} & x_{44}\end{vmatrix}$ 倍（これは先の3次行列式の添字のすべてに1ずつ加えて得られる式となるが，その倍）から引くと，y, y^2, y^3 のすべての項を消去した式が得られる.

$$x_{11}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{42} & x_{43} & x_{44}\end{vmatrix} - x_{12}\begin{vmatrix} x_{21} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{43} & x_{44}\end{vmatrix} - x_{13}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{21} & x_{24} \\ x_{32} & x_{31} & x_{34} \\ x_{42} & x_{41} & x_{44}\end{vmatrix} - x_{14}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} & x_{21} \\ x_{32} & x_{33} & x_{31} \\ x_{42} & x_{43} & x_{41}\end{vmatrix} = 0$$

これは４次行列の「第一行に関する展開式」

$$x_{11}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} - x_{12}\begin{vmatrix} x_{21} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} + x_{13}\begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{44} \end{vmatrix} - x_{14}\begin{vmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} \end{vmatrix} = 0$$

に外ならない．この式中の３次行列式を前節で示したように，第一行に関して展開して，さらに２次行列式を第一行に関して展開して，24 項にしたものが，

$$\begin{aligned}
&+x_{11}(+x_{22}x_{33}x_{44} - x_{22}x_{34}x_{43} - x_{23}x_{32}x_{44} + x_{23}x_{42}x_{34} + x_{24}x_{32}x_{43} - x_{42}x_{33}x_{24}) \\
&-x_{12}(+x_{21}x_{33}x_{44} - x_{21}x_{43}x_{34} - x_{23}x_{31}x_{44} + x_{23}x_{34}x_{41} + x_{24}x_{31}x_{43} - x_{14}x_{33}x_{41}) \\
&+x_{13}(+x_{21}x_{32}x_{44} - x_{21}x_{34}x_{42} - x_{22}x_{31}x_{44} + x_{22}x_{34}x_{41} + x_{24}x_{31}x_{42} - x_{24}x_{32}x_{41}) \\
&-x_{14}(+x_{21}x_{32}x_{43} - x_{21}x_{33}x_{42} - x_{22}x_{31}x_{43} + x_{22}x_{33}x_{41} + x_{23}x_{31}x_{42} - x_{23}x_{32}x_{41})
\end{aligned}$$

のようになるが,「大成算経　巻十七」では正符号の項だけまず書き上げその後に負符号の項を書いている．

計算を遡って各式に何をかけた式を得たことになっているかを見ると，(1) $\times \begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{vmatrix}$,

(2) $\times (-1)\left(x_{12}\begin{vmatrix} x_{33} & x_{34} \\ x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} - x_{13}\begin{vmatrix} x_{32} & x_{34} \\ x_{42} & x_{44} \end{vmatrix} + x_{14}\begin{vmatrix} x_{32} & x_{33} \\ x_{42} & x_{43} \end{vmatrix}\right)$,

(3) $\times \left(+x_{12}\begin{vmatrix} x_{23} & x_{24} \\ x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} - x_{13}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{24} \\ x_{42} & x_{44} \end{vmatrix} + x_{14}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{42} & x_{43} \end{vmatrix}\right)$,

(4) $\times (-1)\left(+x_{12}\begin{vmatrix} x_{23} & x_{24} \\ x_{33} & x_{34} \end{vmatrix} - x_{13}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{24} \\ x_{32} & x_{34} \end{vmatrix} + x_{14}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}\right)$,

であり，これから第一列に関する展開式も得ていることがわかる．

つまり，上の４次行列の「第一行に関する展開式」に相当する式の中の３次行列式を第一列で展開しておくと，

$$\begin{aligned}
&x_{11}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} \\
&-x_{12}\left(+x_{21}\begin{vmatrix} x_{33} & x_{34} \\ x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} - x_{31}\begin{vmatrix} x_{23} & x_{24} \\ x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} + x_{41}\begin{vmatrix} x_{23} & x_{24} \\ x_{33} & x_{34} \end{vmatrix}\right) \\
&+x_{13}\left(+x_{21}\begin{vmatrix} x_{32} & x_{34} \\ x_{42} & x_{44} \end{vmatrix} - x_{31}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{24} \\ x_{42} & x_{44} \end{vmatrix} + x_{41}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{24} \\ x_{32} & x_{34} \end{vmatrix}\right) \\
&-x_{14}\left(+x_{21}\begin{vmatrix} x_{32} & x_{33} \\ x_{42} & x_{43} \end{vmatrix} - x_{31}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{42} & x_{43} \end{vmatrix} + x_{41}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}\right) = 0
\end{aligned}$$

これを x_{21}, x_{31}, x_{41} でくくり直すと，

$$x_{11}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&-x_{21}\left(+x_{12}\begin{vmatrix} x_{33} & x_{34} \\ x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} - x_{13}\begin{vmatrix} x_{32} & x_{34} \\ x_{42} & x_{44} \end{vmatrix} + x_{14}\begin{vmatrix} x_{32} & x_{33} \\ x_{42} & x_{43} \end{vmatrix}\right) \\
&+x_{31}\left(+x_{12}\begin{vmatrix} x_{23} & x_{24} \\ x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} - x_{13}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{24} \\ x_{42} & x_{44} \end{vmatrix} + x_{14}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{42} & x_{43} \end{vmatrix}\right) \\
&-x_{41}\left(+x_{12}\begin{vmatrix} x_{23} & x_{24} \\ x_{33} & x_{34} \end{vmatrix} - x_{13}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{24} \\ x_{32} & x_{34} \end{vmatrix} + x_{14}\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} \\ x_{32} & x_{33} \end{vmatrix}\right) = 0
\end{aligned}
$$

よって，丸括弧内を3次行列式に直せば4次行列式の第一列に関する展開式にもなっている．

$$
x_{11} \times \begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} + x_{21} \times (-1) \begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{vmatrix} + x_{31} \times \begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{vmatrix}
$$

$$
+ x_{41} \times (-1) \begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{vmatrix} = 0
$$

なお，3次行列式を列に関する展開をしておくと次のようになる．

$$
\begin{aligned}
&+x_{11}(+x_{22}x_{33}x_{44} - x_{22}x_{43}x_{34} - x_{32}x_{23}x_{44} + x_{32}x_{43}x_{24} + x_{42}x_{23}x_{34} - x_{42}x_{33}x_{24}) \\
&-x_{21}(+x_{12}x_{33}x_{44} - x_{12}x_{43}x_{34} - x_{13}x_{32}x_{44} + x_{13}x_{42}x_{34} + x_{14}x_{32}x_{43} - x_{14}x_{42}x_{33}) \\
&+x_{31}(+x_{12}x_{23}x_{44} - x_{12}x_{43}x_{24} - x_{13}x_{22}x_{44} + x_{13}x_{42}x_{24} + x_{14}x_{22}x_{43} - x_{14}x_{42}x_{23}) \\
&-x_{41}(+x_{12}x_{23}x_{34} - x_{12}x_{33}x_{24} - x_{13}x_{22}x_{34} + x_{13}x_{32}x_{24} + x_{14}x_{22}x_{33} - x_{14}x_{32}x_{23})
\end{aligned}
$$

「解伏題之法」の逐式交乗の方法によれば（例えばお茶の水女子大学所蔵の西田明則写本では）4次行列式は次のようになっている．

$$
\det_4 \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{bmatrix} = U1 + U2 + U3 + D1 + D2 + D3
$$

ここで，$U1, U2, U3$ は上段に順に，$D1, D2, D3$ は下段に順に書かれているそれぞれ4項からなる式である．

$$
\begin{aligned}
U1 &= +x_{11}x_{22}x_{33}x_{44} - x_{21}x_{32}x_{43}x_{14} + x_{31}x_{42}x_{13}x_{24} - x_{41}x_{12}x_{23}x_{34} \\
U2 &= -x_{11}x_{42}x_{33}x_{24} + x_{21}x_{12}x_{43}x_{34} - x_{31}x_{22}x_{13}x_{44} + x_{41}x_{32}x_{23}x_{14} \\
U3 &= -x_{11}x_{22}x_{43}x_{34} + x_{21}x_{32}x_{13}x_{44} - x_{31}x_{42}x_{23}x_{14} + x_{41}x_{12}x_{33}x_{24} \\
D1 &= +x_{11}x_{42}x_{23}x_{34} - x_{21}x_{12}x_{33}x_{44} + x_{31}x_{22}x_{43}x_{14} - x_{41}x_{32}x_{13}x_{24} \\
D2 &= +x_{11}x_{32}x_{43}x_{24} - x_{21}x_{42}x_{13}x_{34} + x_{31}x_{12}x_{23}x_{44} - x_{41}x_{22}x_{33}x_{14} \\
D3 &= -x_{11}x_{32}x_{23}x_{44} + x_{21}x_{42}x_{33}x_{14} - x_{31}x_{12}x_{43}x_{24} + x_{41}x_{22}x_{13}x_{34}
\end{aligned}
$$

これらを交式斜乗にしたときにどういう項を順にならべることになるかということについては，交式に「換四式」として（順に上から下に並べられた）「一二三四　一三四二　一四二三」と斜乗に

正負の記号「生尅」が記された図とがあり，それによれば，

$$SD(1234)+SD(1342)+SD(1423),\quad SD(1234)=U1+U2,$$
$$SD(1342)=D1+U3,\quad SD(1423)=D2+D3$$

と考えられる．すなわち，横に 4 項ずつ縦に 6 つのブロックがあり，横の番号を固定して縦に見ると第一行とその余因子による展開になるが，これは，$U1, U3, D3, D2, D1, U2$ にある項が順に出てくるようになっている．あるいは，行ベクトルの並べる順番を 1，2，3，4，の順にして，2，3，4，の次が 3，4，1，でその次が 4，1，2，最後が 1，2，3，とすると，

$$x_{11}\times\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} & x_{24}\\ x_{32} & x_{33} & x_{34}\\ x_{42} & x_{43} & x_{44}\end{vmatrix} + x_{21}\times(-1)\begin{vmatrix} x_{32} & x_{33} & x_{34}\\ x_{42} & x_{43} & x_{44}\\ x_{12} & x_{13} & x_{14}\end{vmatrix} + x_{31}\times\begin{vmatrix} x_{42} & x_{43} & x_{44}\\ x_{12} & x_{13} & x_{14}\\ x_{22} & x_{23} & x_{24}\end{vmatrix}$$
$$+\ x_{41}\times(-1)\begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{14}\\ x_{22} & x_{23} & x_{24}\\ x_{32} & x_{33} & x_{34}\end{vmatrix}=0$$

この左辺の 3 次行列式を展開した形の式が元々得られるはずの式であり，3 次行列式を行順に斜乗していくと，$U1, D2, D1, U3, D3, U2$ にある項が順に書かれ，次のようになる．

$$\begin{aligned}
&+x_{11}(+x_{22}x_{33}x_{44}+x_{32}x_{43}x_{24}+x_{42}x_{23}x_{34})\\
&+x_{11}(-x_{22}x_{43}x_{34}-x_{32}x_{23}x_{44}-x_{42}x_{33}x_{24})\\
&-x_{21}(-x_{32}x_{13}x_{44}-x_{42}x_{33}x_{14}-x_{12}x_{43}x_{34})\\
&-x_{21}(+x_{32}x_{43}x_{14}+x_{42}x_{13}x_{34}+x_{12}x_{33}x_{44})\\
&+x_{31}(-x_{42}x_{23}x_{14}-x_{12}x_{43}x_{24}-x_{22}x_{13}x_{44})\\
&+x_{31}(+x_{42}x_{13}x_{24}+x_{12}x_{23}x_{44}+x_{22}x_{43}x_{14})\\
&-x_{41}(+x_{12}x_{23}x_{34}+x_{22}x_{33}x_{14}+x_{32}x_{13}x_{24})\\
&-x_{41}(-x_{12}x_{33}x_{24}-x_{22}x_{13}x_{34}-x_{32}x_{23}x_{14})
\end{aligned}$$

なお，上の計算の代わりに 3 次行列式を列順に斜乗していくと，$U1, D1, D2, U3, U2, D3$ にある項が順に書かれることになり，次のようになる．

$$\begin{aligned}
&+x_{11}(+x_{22}x_{33}x_{44}+x_{42}x_{23}x_{34}+x_{32}x_{43}x_{24})\\
&+x_{11}(-x_{22}x_{43}x_{34}-x_{42}x_{33}x_{24}-x_{32}x_{23}x_{44})\\
&-x_{21}(-x_{32}x_{13}x_{44}-x_{12}x_{43}x_{34}-x_{42}x_{33}x_{14})\\
&-x_{21}(+x_{32}x_{43}x_{14}+x_{12}x_{33}x_{44}+x_{42}x_{13}x_{34})\\
&+x_{31}(-x_{42}x_{23}x_{14}-x_{22}x_{13}x_{44}-x_{12}x_{43}x_{24})\\
&+x_{31}(+x_{42}x_{13}x_{24}+x_{22}x_{43}x_{14}+x_{12}x_{23}x_{44})\\
&-x_{41}(+x_{12}x_{23}x_{34}+x_{32}x_{13}x_{24}+x_{22}x_{33}x_{14})\\
&-x_{41}(-x_{12}x_{33}x_{24}-x_{32}x_{23}x_{14}-x_{22}x_{13}x_{34})
\end{aligned}$$

これらは，係数行列である 4 次行列にその第一列の余因子を掛けたものを計算したことになっている．

これは，関の逐式交乗の計算式として残されている表$U1, D1$,（改ページされて）$U2, D2, U3, D3$と書かれているものとは改ページ後で$D2, U3, U2, D3$となっており，上を先に2ブロック書きその後下に2ブロック書いたとしても，$D2$と$U2$の上下が入れ替わったものになっている．

表を作成する段階では，消される項に番号を付けて，番号が若い順に相消し合う項が出てくる部分を先に書くという順にしたので，$U1, D1, U2, D2, U3, D3$となっている，と考えられる．すなわち，第1列に第2列を代入した式

$$
\begin{aligned}
&+x_{12}(+\underline{x_{22}x_{33}x_{44}}+x_{42}x_{23}x_{34}+x_{32}x_{43}x_{24})\\
&+x_{12}(-x_{22}x_{43}x_{34}-x_{42}x_{33}x_{24}-x_{32}x_{23}x_{44})\\
&-x_{22}(-x_{32}x_{13}x_{44}-x_{12}x_{43}x_{34}-x_{42}x_{33}x_{14})\\
&-x_{22}(+x_{32}x_{43}x_{14}+\underline{x_{12}x_{33}x_{44}}+x_{42}x_{13}x_{34})\\
&+x_{32}(-x_{42}x_{23}x_{14}-x_{22}x_{13}x_{44}-x_{12}x_{43}x_{24})\\
&+x_{32}(+x_{42}x_{13}x_{24}+x_{22}x_{43}x_{14}+x_{12}x_{23}x_{44})\\
&-x_{42}(+x_{12}x_{23}x_{34}+x_{32}x_{13}x_{24}+x_{22}x_{33}x_{14})\\
&-x_{42}(-x_{12}x_{33}x_{24}-x_{32}x_{23}x_{14}-x_{22}x_{13}x_{34})
\end{aligned}
$$

の$x_{12}x_{22}x_{33}x_{44}$と相消し合う項は$x_{22}x_{12}x_{33}x_{44}$, で，第1列に第3列を代入した式

$$
\begin{aligned}
&+x_{13}(+\underline{x_{22}x_{33}x_{44}}+x_{42}x_{23}x_{34}+x_{32}x_{43}x_{24})\\
&+x_{13}(-x_{22}x_{43}x_{34}-x_{42}x_{33}x_{24}-x_{32}x_{23}x_{44})\\
&-x_{23}(-x_{32}x_{13}x_{44}-x_{12}x_{43}x_{34}-x_{42}x_{33}x_{14})\\
&-x_{23}(+x_{32}x_{43}x_{14}+x_{12}x_{33}x_{44}+x_{42}x_{13}x_{34})\\
&+x_{33}(-x_{42}x_{23}x_{14}-\underline{x_{22}x_{13}x_{44}}-x_{12}x_{43}x_{24})\\
&+x_{33}(+x_{42}x_{13}x_{24}+x_{22}x_{43}x_{14}+x_{12}x_{23}x_{44})\\
&-x_{43}(+x_{12}x_{23}x_{34}+x_{32}x_{13}x_{24}+x_{22}x_{33}x_{14})\\
&-x_{43}(-x_{12}x_{33}x_{24}-x_{32}x_{23}x_{14}-x_{22}x_{13}x_{34})
\end{aligned}
$$

の$x_{13}x_{22}x_{33}x_{44}$と相消し合う項は$x_{33}x_{22}x_{13}x_{44}$で，第1列に第4列を代入した式

$$
\begin{aligned}
&+x_{14}(+\underline{x_{22}x_{33}x_{44}}+\overline{x_{42}x_{23}x_{34}}+x_{32}x_{43}x_{24})\\
&+x_{14}(-x_{22}x_{43}x_{34}-x_{42}x_{33}x_{24}-x_{32}x_{23}x_{44})\\
&-x_{24}(-x_{32}x_{13}x_{44}-x_{12}x_{43}x_{34}-x_{42}x_{33}x_{14})\\
&-x_{24}(+x_{32}x_{43}x_{14}+x_{12}x_{33}x_{44}+x_{42}x_{13}x_{34})\\
&+x_{34}(-\overline{x_{42}x_{23}x_{14}}-x_{22}x_{13}x_{44}-x_{12}x_{43}x_{24})\\
&+x_{34}(+x_{42}x_{13}x_{24}+x_{22}x_{43}x_{14}+x_{12}x_{23}x_{44})\\
&-x_{44}(+x_{12}x_{23}x_{34}+x_{32}x_{13}x_{24}+\underline{x_{22}x_{33}x_{14}})\\
&-x_{44}(-x_{12}x_{33}x_{24}-x_{32}x_{23}x_{14}-x_{22}x_{13}x_{34})
\end{aligned}
$$

の$x_{14}x_{22}x_{33}x_{44}$と相消し合う項は$x_{44}x_{22}x_{33}x_{14}$であり，直前の式に含まれる$x_{14}x_{42}x_{23}x_{34}$と

$x_{34}x_{42}x_{23}x_{14}$ とは相消し合っている. この順に項を消していくように書いていったのが $U1$, $D1$, $U2$, $D2$, $U3$, $D3$ という順であると考えられる.

存在が確認されていないが,「解伏題之法（初稿)」においては自然に導いて，第一行に関する展開式を得たが，まとめ方として工夫をして，現存する「解伏題之法（天和三年重訂)」のように，関は，4次行列式までの，これらの逐式交乗の計算式から，正負を適切に与えれば交式斜乗ですべての項が一回ずつ出てくることを確認し,「逐式交乗をとして交式斜乗で代えられる」と述べたと考えられる.（注記. 2012年6月20日に,『関流算法解伏題玄訓』，目次後には『関自由亭先生算学玄訓』（京大所蔵本『算法袖中鈔』下，http://edb.math.kyoto-u.ac.jp/wasan/018 収録）を調査したところ，内容的には「解伏題之法（重訂)」とほぼ同じで. この生尅第五には特別な3次“対称”行列（2つの3次方程式から終結式を作る過程で出てくる3次項を消去して得られる3つの2次方程式の係数行列，降べきに書けば対称行列）の行列式が2方向の斜乗の差として表される，というところまで書いてあること（4次以上は扱っていないこと）を確認したので，少し修正が必要になった. ）残念ながら，5次行列式については，関孝和の「解伏題之法（天和三年重訂)」に記録された斜乗に正負の符号を付けて加えるという方法は，以下のように正しくない. 従って，後に書かれた「大成算経巻十七」では初めの自然な導き方を冗長であるがそのままに第一行に関する展開式として書いたと推測される.

「解伏題之法（天和三年重訂)」の5次行列に対するものが間違っているというのは，交式12個中に (12345) と (15432) というように (2345) と (5432) と完全に逆順となるものが6組ずつあり，

$$x_{11}\times\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25}\\ x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35}\\ x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45}\\ x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55}\end{vmatrix} \quad \text{と} \quad x_{11}\times\begin{vmatrix} x_{25} & x_{24} & x_{23} & x_{22}\\ x_{35} & x_{34} & x_{33} & x_{32}\\ x_{45} & x_{44} & x_{43} & x_{42}\\ x_{55} & x_{54} & x_{53} & x_{52}\end{vmatrix}$$

のように同じ項が現れ（5次行列式に現れるはずの）120項の半分しか現れないし，符号を付けて0になってしまうか60項の2倍が現れるだけだからである

12個の交式を「一二三四五　一三四五二　一四五二三　一五二三四」,「一二四三五　一四三五二　一三五二四　一五二四三」,「一二五三四　一五三四二　一三四二五　一四二五三」と修正することで，これらの斜乗で120項が作られ，符号を適切に付け総和することにより5次行列式を得られる.

しかし，逐式交乗の方法の考え方は，一つの未知数に関する一次以上の項を連立方程式を用いて消去し，その未知数に関しては0次のそれ以外の未知数に関する方程式を得る方法であり，その考え方自体を間違えたわけではない. 関孝和に行列式創始者の名を与えることは正当なことである. もし，逐式交乗の式が書かれていたとすれば，次のようになっていたはずである. すなわち，y に関する5連立4次方程式を考える.

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}y+x_{13}y^2+x_{14}y^3+x_{15}y^4=0 \ \ldots(1)\\ x_{21}+x_{22}y+x_{23}y^2+x_{24}y^3+x_{25}y^4=0 \ \ldots(2)\\ x_{31}+x_{32}y+x_{33}y^2+x_{34}y^3+x_{35}y^4=0 \ \ldots(3)\\ x_{41}+x_{42}y+x_{43}y^2+x_{44}y^3+x_{45}y^4=0 \ \ldots(4)\\ x_{51}+x_{52}y+x_{53}y^2+x_{54}y^3+x_{55}y^4=0 \ \ldots(5)\end{cases}$$

この5式のうち (2), (3), (4), (5) の4式から y, y^2, y^3, y^4 の項をそれぞれ一つだけ残す式を作ることを考える，すなわち，y について0次と1次，2次，3次，4次のうちの一つだけを残す式を4次行列式を考えたときのやり方で考え，結局，(1), (2), (3), (4), (5) の何倍を加えて足したことに

なるかを考えると，今日我々が知る5次行列式の第一列の展開式が書かれていたはずである．

$$
x_{11}\times\begin{vmatrix} x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25}\\ x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35}\\ x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45}\\ x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55}\end{vmatrix}+x_{21}\times(-1)\begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15}\\ x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35}\\ x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45}\\ x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55}\end{vmatrix}
$$

$$
+x_{31}\times\begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15}\\ x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25}\\ x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45}\\ x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55}\end{vmatrix}+x_{41}\times(-1)\begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15}\\ x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25}\\ x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35}\\ x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55}\end{vmatrix}
$$

$$
+x_{51}\times\begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15}\\ x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25}\\ x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35}\\ x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45}\end{vmatrix}=0.
$$

今回は以前から述べていた,「解伏題之法（天和三年重訂）」逐式交乗の表の成り立ちの解釈に加えて「大成算経巻十七」の記載が「解伏題之法（初稿）」の書いてあったものではないかという推察を述べた.（注記. **繰り返しになるが，2012年6月20日に,『関流算法解伏題玄訓』，目次後には『関自由亭先生算学玄訓』（京大所蔵本『算法袖中鈔』下，http://edb.math.kyoto-u.ac.jp/wasan/018 収録）を調査したところ，内容的には「解伏題之法（重訂)」とほぼ同じで. この生尅第五には特別な3次“対称”行列（2つの3次方程式から終結式を作る過程で出てくる3次項を消去して得られる3つの2次方程式の係数行列，降べきに書けば対称行列）の行列式が2方向の斜乗の差として表される，というところまで書いてあること（4次以上は扱っていないこと）を確認したので，少し修正が必要になった．**）

終結式

y に関する2連立次方程式を考える．$m,n(m\le n)$ 次であるとする．

$$
\begin{cases} a_0+a_1y+\ldots+a_my^m=0 \ \ldots(1)\\ b_0+b_1y+\ldots+b_ny^n=0 \ \ldots(2)\end{cases}
$$

$n=m=1$ の場合

$$
\begin{cases} a_0+a_1y=0 \ \ldots(1)\\ b_0+b_1y=0 \ \ldots(2)\end{cases}
$$

$(1)\times b_1-(2)\times a_1$ を行って

$$
a_0b_1-b_0a_1=0
$$

を得る．

$n=2,m=1$ の場合

$$
\begin{cases} a_0+a_1y=0 \ \ldots(1)\\ b_0+b_1y+b_2y^2=0 \ \ldots(2)\end{cases}
$$

まず，$(1)\times b_2y-(2)\times a_1$ を行って，y に関する2次項を消した式を得てもう一つの1次式

$$
-a_1b_0+(b_2a_0-b_1a_1)y=0
$$

を得て,（1）とから1次項を消せばよく，

$$
(b_2a_0-b_1a_1)a_0+b_0a_1a_1=0
$$

を得る．

なお，$(1)\times b_0-(2)\times a_0$ を行って，y に関する 0 次項を消した式を得て y で割ることによってもう一つの 1 次式

$$(a_1b_0-b_1a_0)-b_2a_0y=0$$

を得て，(1) とから 1 次項を消せばよく，

$$(b_0a_1-b_1a_0)a_1+b_2a_0a_0=0$$

を得る．

当然，これらは同じ式であり，

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

に等しい．

これは上の 2 つの連立方程式系と同値な 3 つの連立方程式系を考えていることに対応している．

$$\begin{array}{ccccccl} a_0 & + & a_1y & & & = & 0 \quad \ldots(1) \\ & & a_0y & + & a_1y^2 & = & 0 \quad \ldots(1)' \\ b_0 & + & b_1y & + & b_2y^2 & = & 0 \quad \ldots(2) \end{array}$$

$n=m=2$ の場合

$$\begin{cases} a_0+a_1y+a_2y^2=0 \ \ldots(1) \\ b_0+b_1y+b_2y^2=0 \ \ldots(2) \end{cases}$$

$(1)\times b_2y-(2)\times a_2$ を行って，y^2 を消去して y に関する一つの 1 次式

$$(a_0b_2-b_0a_2)+(a_1b_2-b_1a_2)y=\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}y=0$$

を得，また，$(1)\times b_1-(2)\times a_1$ を行って，y に関する 1 次項を消した式

$$(a_0b_1-b_0a_1)+(a_2b_1-b_2a_1)y^2=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix}y^2=0$$

を得て，前に得た式に y を掛けて加えることによってもう一つの 1 次式

$$(a_1b_0-b_1a_0)+(a_2b_0-b_2a_0)y=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}y=0$$

を得て（あるいは，$(1)\times b_0-(2)\times a_0$ を行って y に関する 0 次項を消した式を得て y で割る事によって得て ），これらから 1 次項を消せばよく，

$$(a_0b_2-b_0a_2)^2-(a_0b_1-b_0a_1)(a_1b_2-b_1a_2)=\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}^2-\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0$$

を得る．これらは次と同じ式である．

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_0 & a_2 & a_1 & 0 \\ b_0 & b_2 & b_1 & 0 \\ 0 & a_1 & a_0 & a_2 \\ 0 & b_1 & b_0 & b_2 \end{vmatrix}$$

に等しい.

これは上の 2 つの連立方程式系と同値な 4 つの連立方程式系を考え，その非自明解の存在の必要十分を得ていることに対応している.

$$\begin{array}{ccccccccc} a_0 & + & a_1y & + & a_2y^2 & & & = & 0 \quad \ldots(1) \\ & & a_0y & + & a_1y^2 & + & a_2y^3 & = & 0 \quad \ldots(1)' \\ b_0 & + & b_1y & + & b_2y^2 & & & = & 0 \quad \ldots(2) \\ & & b_0y & + & b_1y^2 & + & b_2y^3 & = & 0 \quad \ldots(2)' \end{array}$$

この方程式の係数行列を基本変形した行列の行列式については次の関係式があり，上記の 4 次行列式と 2 次行列式の積の差が等しくなっていることに注意する.

$$\begin{vmatrix} b_2 & 0 & -a_2 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & -a_2 \\ b_1 & 0 & -a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} |A_{02}| & |A_{12}| & 0 & 0 \\ 0 & |A_{02}| & |A_{12}| & 0 \\ |A_{01}| & 0 & |A_{21}| & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} |A_{02}| & |A_{12}| & 0 & 0 \\ 0 & |A_{02}| & |A_{12}| & 0 \\ |A_{01}| & 0 & |A_{21}| & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} |A_{02}| & |A_{12}| & 0 & 0 \\ |A_{01}| & |A_{02}| & 0 & 0 \\ |A_{01}| & 0 & |A_{21}| & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

従って，

$$\begin{vmatrix} b_2 & 0 & -a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & -a_1 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} |A_{02}| & |A_{12}| & 0 & 0 \\ |A_{01}| & |A_{02}| & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

ここで，

$$|A_{02}| = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}, |A_{01}| = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}, |A_{12}| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

とおいた.

$n = m = 3$ の場合

$$\begin{cases} a_0 + a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 = 0 \ \ldots(1) \\ b_0 + b_1y + b_2y^2 + b_3y^3 = 0 \ \ldots(2) \end{cases}$$

$(1) \times b_3y - (2) \times a_3$ を行って，y^3 を消去して y に関する一つの 2 次式

$$(a_0b_3 - b_0a_3) + (a_1b_3 - b_1a_3)y + (a_2b_3 - b_2a_3)y^2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ b_0 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} y^2 = 0$$

を得，また，$(1) \times b_2 - (2) \times a_2$ を行って，y に関する 2 次項を消した式

$$(a_0b_2 - b_0a_2) + (a_1b_2 - b_1a_2)y + (a_3b_2 - b_3a_2)y^3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} y^3 = 0$$

を得て前の式に y をかけた式に加えるとによってもう一つの y についての 2 次式

$$(a_0b_2 - b_0a_2) + (a_1b_2 - b_1a_2)y + (a_0b_3 - b_0a_3)y + (a_1b_3 - b_1a_3)y^2$$

$$= \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ b_0 & b_3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} y^2 = 0$$

を得る．さらに，$(1) \times b_1 - (2) \times a_1$ を行って，y に関する 1 次項を消した式

$$(a_0b_1 - b_0a_1) + (a_2b_1 - b_2a_1)y^2 + (a_3b_1 - b_3a_1)y^3 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix} y^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} y^3 = 0$$

を得て，前に得た 2 次式に y を掛けた式を加えることによって，3 つ目の y についての 2 次式を得る．

$$(a_0b_1 - b_0a_1) + (a_0b_2 - b_0a_2)y + (a_0b_3 - b_0a_3)y^2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} a_0 & a_3 \\ b_0 & b_3 \end{vmatrix} y^2 = 0$$

これらの 3 つの y の 2 次式から 1 次項，2 次項を消した式を得ればよい．ここに示した計算が，**換式第四で，例えば，2 つの 3 次方程式から終結式を作る過程で出てくる 3 次項を消去して得られる 3 つの 2 次方程式を導くときの計算法と酷似している**のである．これは上の 2 つの連立方程式系と同値な 6 つの連立方程式系を考え，その非自明解の存在の必要十分を得ていることに対応している．

$$\begin{array}{ccccccccccccl}
a_0 & + & a_1y & + & a_2y^2 & + & a_3y^3 & & & & & = 0 & \ldots(1) \\
 & & a_0y & + & a_1y^2 & + & a_2y^3 & + & a_3y^4 & & & = 0 & \ldots(1)' \\
 & & & & a_0y^2 & + & a_1y^3 & + & a_2y^4 & + & a_3y^5 & = 0 & \ldots(1)'' \\
b_0 & + & b_1y & + & b_2y^2 & + & b_3y^3 & & & & & = 0 & \ldots(2) \\
 & & b_0y & + & b_1y^2 & + & b_2y^3 & + & b_3y^4 & & & = 0 & \ldots(2)' \\
 & & & & b_0y^2 & + & b_1y^3 & + & b_2y^4 & + & b_3y^5 & = 0 & \ldots(2)''
\end{array}$$

この方程式の係数行列を基本変形した行列を考える．

$$\begin{bmatrix} b_3 & 0 & 0 & -a_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 & 0 & -a_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & -a_3 \\ b_2 & 0 & 0 & -a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 & -a_2 & 0 \\ b_1 & 0 & 0 & -a_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A_{03}| & |A_{13}| & |A_{23}| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |A_{03}| & |A_{13}| & |A_{23}| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |A_{03}| & |A_{13}| & |A_{23}| & 0 \\ |A_{02}| & |A_{12}| & 0 & |A_{32}| & 0 & 0 \\ 0 & |A_{02}| & |A_{12}| & 0 & |A_{32}| & 0 \\ |A_{01}| & 0 & |A_{21}| & |A_{31}| & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |A_{03}| & |A_{13}| & |A_{23}| & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |A_{03}| & |A_{13}| & |A_{23}| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |A_{03}| & |A_{13}| & |A_{23}| & 0 \\ |A_{02}| & |A_{12}| & 0 & |A_{32}| & 0 & 0 \\ 0 & |A_{02}| & |A_{12}| & 0 & |A_{32}| & 0 \\ |A_{01}| & 0 & |A_{21}| & |A_{31}| & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} |A_{03}| & |A_{13}| & |A_{23}| & 0 & 0 & 0 \\ |A_{02}| & |A_{12}|+|A_{03}| & |A_{13}| & 0 & 0 & 0 \\ |A_{01}| & |A_{02}| & |A_{03}| & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ここで，

$$|A_{jk}| = \begin{vmatrix} a_j & a_k \\ b_j & b_k \end{vmatrix}$$

とおいた．

$$\begin{vmatrix} b_3 & 0 & 0 & -a_3 & 0 & 0 \\ b_2 & b_3 & 0 & -a_2 & -a_3 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} |A_{03}| & |A_{13}| & |A_{23}| & 0 & 0 & 0 \\ |A_{02}| & |A_{12}|+|A_{03}| & |A_{13}| & 0 & 0 & 0 \\ |A_{01}| & |A_{02}| & |A_{03}| & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

という等式から，

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} |A_{03}| & |A_{13}| & |A_{23}| \\ |A_{02}| & |A_{12}|+|A_{03}| & |A_{13}| \\ |A_{01}| & |A_{02}| & |A_{03}| \end{vmatrix}$$

という等式を得る．

$m = n = 4$ **の場合．**

$$\begin{array}{ccccccccccccccl}
a_0 & + & a_1y & + & a_2y^2 & + & a_3y^3 & + & a_4y^4 & & & & & = 0 & \ldots(1) \\
 & & a_0y & + & a_1y^2 & + & a_2y^3 & + & a_3y^4 & + & a_4y^5 & & & = 0 & \ldots(1)' \\
 & & & & a_0y^2 & + & a_1y^3 & + & a_2y^4 & + & a_3y^5 & + & a_4y^6 & = 0 & \ldots(1)'' \\
 & & & & & & a_0y^3 & + & a_1y^4 & + & a_2y^5 & + & a_3y^6 \ + \ a_4y^7 & = 0 & \ldots(1)''' \\
b_0 & + & b_1y & + & b_2y^2 & + & b_3y^3 & + & b_4y^4 & & & & & = 0 & \ldots(2) \\
 & & b_0y & + & b_1y^2 & + & b_2y^3 & + & b_3y^4 & + & b_4y^5 & & & = 0 & \ldots(2)' \\
 & & & & b_0y^2 & + & b_1y^3 & + & b_2y^4 & + & b_3y^5 & + & b_4y^6 & = 0 & \ldots(2)'' \\
 & & & & & & b_0y^3 & + & b_1y^4 & + & b_2y^5 & + & b_3y^6 \ + \ b_4y^7 & = 0 & \ldots(2)'''
\end{array}$$

この方程式の係数行列を関孝和の計算法と同等な基本変形した行列を考える.

$$
\begin{bmatrix}
b_4 & 0 & 0 & 0 & -a_4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & b_4 & 0 & 0 & 0 & -a_4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & b_4 & 0 & 0 & 0 & -a_4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 & 0 & -a_4 \\
b_3 & 0 & 0 & 0 & -a_3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & -a_3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & -a_3 & 0 \\
b_2 & 0 & 0 & 0 & -a_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & -a_2 & 0 & 0 \\
b_1 & 0 & 0 & 0 & -a_1 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 a_4 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\
b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
|A_{04}| & |A_{14}| & |A_{24}| & |A_{34}| & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & |A_{04}| & |A_{14}| & |A_{24}| & |A_{34}| & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & |A_{04}| & |A_{14}| & |A_{24}| & |A_{34}| & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & |A_{04}| & |A_{14}| & |A_{24}| & |A_{34}| & 0 \\
|A_{03}| & |A_{13}| & |A_{23}| & 0 & |A_{43}| & 0 & 0 & 0 \\
0 & |A_{03}| & |A_{13}| & |A_{23}| & 0 & |A_{43}| & 0 & 0 \\
0 & 0 & |A_{03}| & |A_{13}| & |A_{23}| & 0 & |A_{43}| & 0 \\
|A_{02}| & |A_{12}| & 0 & |A_{32}| & |A_{42}| & 0 & 0 & 0 \\
0 & |A_{02}| & |A_{12}| & 0 & |A_{32}| & |A_{42}| & 0 & 0 \\
|A_{01}| & 0 & |A_{21}| & |A_{31}| & |A_{41}| & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
|A_{04}| & |A_{14}| & |A_{24}| & |A_{34}| & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & |A_{04}| & |A_{14}| & |A_{24}| & |A_{34}| & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & |A_{04}| & |A_{14}| & |A_{24}| & |A_{34}| & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & |A_{04}| & |A_{14}| & |A_{24}| & |A_{34}| & 0 \\
|A_{03}| & |A_{13}| & |A_{23}| & 0 & |A_{43}| & 0 & 0 & 0 \\
0 & |A_{03}| & |A_{13}| & |A_{23}| & 0 & |A_{43}| & 0 & 0 \\
0 & 0 & |A_{03}| & |A_{13}| & |A_{23}| & 0 & |A_{43}| & 0 \\
|A_{02}| & |A_{12}| & 0 & |A_{32}| & |A_{42}| & 0 & 0 & 0 \\
0 & |A_{02}| & |A_{12}| & 0 & |A_{32}| & |A_{42}| & 0 & 0 \\
|A_{01}| & 0 & |A_{21}| & |A_{31}| & |A_{41}| & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
|A_{04}| & |A_{14}| & |A_{24}| & |A_{34}| & 0 & 0 & 0 & 0 \\
|A_{03}| & |A_{04}| + |A_{13}| & |A_{14}| + |A_{23}| & |A_{24}| & 0 & 0 & 0 & 0 \\
|A_{02}| & |A_{03}| + |A_{12}| & |A_{04}| + |A_{13}| & |A_{14}| & 0 & 0 & 0 & 0 \\
|A_{01}| & |A_{02}| & |A_{03}| & |A_{04}| & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

ここで,

$$
|A_{ij}| = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix},
$$

とおいた．よって，

$$\begin{vmatrix} b_4 & 0 & 0 & 0 & -a_4 & 0 & 0 & 0 \\ b_3 & b_4 & 0 & 0 & -a_3 & -a_4 & 0 & 0 \\ b_2 & b_3 & b_4 & 0 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} |A_{04}| & |A_{14}| & |A_{24}| & |A_{34}| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ |A_{03}| & |A_{04}|+|A_{13}| & |A_{14}|+|A_{23}| & |A_{24}| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ |A_{02}| & |A_{03}|+|A_{12}| & |A_{04}|+|A_{13}| & |A_{14}| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ |A_{01}| & |A_{02}| & |A_{03}| & |A_{04}| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

という等式を得て，従って，

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} |A_{04}| & |A_{14}| & |A_{24}| & |A_{34}| \\ |A_{03}| & |A_{04}|+|A_{13}| & |A_{14}|+|A_{23}| & |A_{24}| \\ |A_{02}| & |A_{03}|+|A_{12}| & |A_{04}|+|A_{13}| & |A_{14}| \\ |A_{01}| & |A_{02}| & |A_{03}| & |A_{04}| \end{vmatrix}$$

という等式を得る．

$m = 2 < n = 4$ の場合

$$\begin{array}{ccccccccccccc} a_0 & + & a_1y & + & a_2y^2 & & & & & & & = 0 & \ldots(1) \\ & & a_0y & + & a_1y^2 & + & a_2y^3 & & & & & = 0 & \ldots(1)' \\ & & & & a_0y^2 & + & a_1y^3 & + & a_2y^4 & & & = 0 & \ldots(1)'' \\ & & & & & & a_0y^3 & + & a_1y^4 & + & a_2y^5 & = 0 & \ldots(1)''' \\ b_0 & + & b_1y & + & b_2y^2 & + & b_3y^3 & + & b_4y^4 & & & = 0 & \ldots(2) \\ & & b_0y & + & b_1y^2 & + & b_2y^3 & + & b_3y^4 & + & b_4y^5 & = 0 & \ldots(2)' \end{array}$$

この方程式の係数行列を関孝和の計算法と同等な基本変形した行列を考える.

$$
\begin{bmatrix}
b_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & b_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & b_4 & 0 & -a_4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & -a_4 \\
b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & b_3 & 0 & -a_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & b_3 & 0 & -a_2 \\
0 & 0 & b_2 & 0 & -a_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & b_2 & 0 & -a_2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\
b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\
0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
b_4a_0 & b_4a_1 & b_4a_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & b_4a_0 & b_4a_1 & b_4a_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & b_4a_0 & b_4a_1 & b_4a_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & b_4a_0 & b_4a_1 & b_4a_2 \\
b_3a_0 & b_3a_1 & b_3a_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & b_3a_0 & b_3a_1 & b_3a_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & b_3a_0 & b_3a_1 & b_3a_2 & 0 \\
b_2a_0 & b_2a_1 & b_2a_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & b_2a_0 & b_2a_1 & b_2a_2 & 0 & 0 \\
b_0a_2 & b_1a_2 & b_2a_2 & b_3a_2 & b_4a_2 & 0 \\
 & 0b_0a_2 & b_1a_2 & b_2a_2 & b_3a_2 & b_4a_2 \\
b_0a_1 & b_1a_1 & b_2a_1 & b_3a_1 & b_4a_1 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
|A_{04}| & |A_{14}| & |A_{24}| & |A_{34}| & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & |A_{04}| & |A_{14}| & |A_{24}| & |A_{34}| & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & |A_{04}| & |A_{14}| & |A_{24}| & |A_{34}| & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & |A_{04}| & |A_{14}| & |A_{24}| & |A_{34}| & 0 \\
|A_{03}| & |A_{13}| & |A_{23}| & 0 & |A_{43}| & 0 & 0 & 0 \\
0 & |A_{03}| & |A_{13}| & |A_{23}| & 0 & |A_{43}| & 0 & 0 \\
0 & 0 & |A_{03}| & |A_{13}| & |A_{23}| & 0 & |A_{43}| & 0 \\
|A_{02}| & |A_{12}| & 0 & |A_{32}| & |A_{42}| & 0 & 0 & 0 \\
0 & |A_{02}| & |A_{12}| & 0 & |A_{32}| & |A_{42}| & 0 & 0 \\
|A_{01}| & 0 & |A_{21}| & |A_{31}| & |A_{41}| & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
|A_{04}| & |A_{14}| & |A_{24}| & |A_{34}| & 0 & 0 & 0 & 0 \\
|A_{03}| & |A_{04}|+|A_{13}| & |A_{14}|+|A_{23}| & |A_{24}| & 0 & 0 & 0 & 0 \\
|A_{02}| & |A_{03}|+|A_{12}| & |A_{04}|+|A_{13}| & |A_{14}| & 0 & 0 & 0 & 0 \\
|A_{01}| & |A_{02}| & |A_{03}| & |A_{04}| & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

ここで,

$$
|A_{ij}| = \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix},
$$

とおいた.

$$\begin{vmatrix} b_4 & 0 & 0 & 0 & -a_4 & 0 & 0 & 0 \\ b_3 & b_4 & 0 & 0 & -a_3 & -a_4 & 0 & 0 \\ b_2 & b_3 & b_4 & 0 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} |A_{04}| & |A_{14}| & |A_{24}| & |A_{34}| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ |A_{03}| & |A_{04}|+|A_{13}| & |A_{14}|+|A_{23}| & |A_{24}| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ |A_{02}| & |A_{03}|+|A_{12}| & |A_{04}|+|A_{13}| & |A_{14}| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ |A_{01}| & |A_{02}| & |A_{03}| & |A_{04}| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix}$$

という等式を得て，従って，

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} |A_{04}| & |A_{14}| & |A_{24}| & |A_{34}| \\ |A_{03}| & |A_{04}|+|A_{13}| & |A_{14}|+|A_{23}| & |A_{24}| \\ |A_{02}| & |A_{03}|+|A_{12}| & |A_{04}|+|A_{13}| & |A_{14}| \\ |A_{01}| & |A_{02}| & |A_{03}| & |A_{04}| \end{vmatrix}$$

という等式を得る.

さて，$m \leq n$ であるとして，一般的に考えよう.

$$\begin{cases} a_0 + a_1 y + \ldots + a_m y^m = 0 \ \ldots (1) \\ b_0 + b_1 y + \ldots + b_n y^n = 0 \ \ldots (2) \end{cases}$$

$(1) \times y^k \quad (0 \leq k \leq n-1)$, $(2) \times y^\ell \quad (0 \leq \ell \leq m-1)$ という方程式を考えていく.

$$\begin{cases} a_0 y^k + a_1 y^{k+1} + \ldots + a_m y^{k+m} = 0 \ \ldots (1)_k \\ b_0 y^\ell + b_1 y^{\ell+1} + \ldots + b_n y^{\ell+n} = 0 \ \ldots (2)_\ell \end{cases}$$

この $m+n$ の連立方程式が非自明な解の存在するための必要十分条件として，係数を並べてでき

る $m+n$ 次正方行列の行列式が 0 であるという条件式が出る．すなわち，

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_m & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_m \\ b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_n & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_n \end{vmatrix} = 0$$

($m<n$ の場合は次のような形にした方がよいか.)

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_m & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_m & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_m \\ b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_n \end{vmatrix} = 0$$

という条件に等しい.

今回は以前から述べていた,「解伏題之法（天和三年重訂)」逐式交乗の表の成り立ちの解釈に加えて「大成算経巻十七」の記載が「解伏題之法（初稿)」の書いてあったものではないかという推察を述べた. (**注記．再三注記したが，2012 年 6 月 20 日に,『関流算法解伏題玄訓』．目次後には『関自由亭先生算学玄訓』(京大所蔵本『算法袖中鈔』下，http://edb.math.kyoto-u.ac.jp/wasan/018 収録）を調査したところ，内容的には「解伏題之法（重訂)」とほぼ同じで．この生尅第五には特別な 3 次“対称”行列（2 つの 3 次方程式から終結式を作る過程で出てくる 3 次項を消去して得られる 3 つの 2 次方程式の係数行列，降べきに書けば対称行列）の行列式が 2 方向の斜乗の差として表される，というところまで書いてあること（4 次以上は扱っていないこと）を確認したので，少し修正が必要になった．次回の研究集会に修正の説を発表する．**)

参考文献

[1] Goto, T. and Komatsu, H.: Determinants, resultants and discriminants in Japan in the seventeenth century and in Europe in eighteenth and nineteenth centuries, *J. Northwest University (Natural Science Edition)*, **33** No.3, pp. 363–367 (2003).

[2] 後藤武史，小松彦三郎:「17 世紀日本と 18-19 世紀西洋の行列式，終結式及び判別式」，京都大学数理解析研究所講究録 1392，小松彦三郎編集，(2004)，pp117-129.

[3] 平山諦，下平和夫，広瀬秀雄編:関孝和全集，大阪教育図書 (1974).

[4] 関孝和, 建部賢弘，建部賢明編:大成算経巻十七 (1710).

[5] 真島秀行:「高木貞治の書籍に関するいくつかの注意（「関孝和の行列式」含む）」，京都大学数理解析研究所講究録 1739，高瀬正仁編集，(2011)，pp21-36.

email: majima.hideyuki@ocha.ac.jp