数理解析研究所講究録
第 1832 巻 2013 年 88-96

Prawitz-Doorman Term Existence Property を超直観主義述語論理で考える*

鈴木信行
(Nobu-Yuki SUZUKI)†‡

November 14, 2012

Abstract

A super-intuitionistic predicate logic **L** is said to have the *Prawitz-Doorman term existence property* (PD-TEP) if the following condition holds: for every $\exists xA(x)$ and every H such that H has no strictly positive subformula of the form $\exists xY(x)$, $\mathbf{L}\vdash H\supset\exists xA(x)$ implies that there are finitely many terms $t_1, \ldots, t_n$ in the vocabulary of $H\supset\exists xA(x)$ such that $\mathbf{L}\vdash H\supset A(t_1)\vee\cdots\vee A(t_n)$. This property can be regarded by a weak variant of the *term existence property* (TEP)$. Needless to say, it is possessed by intuitionistic predicate logic. An aim of this article is to consider this property for super-intuitionistic predicate logics. We give a sufficient condition of PD-TEP by making use of the ultraproduct-construction in Kripke semantics discussed in Ono [4] with an idea in Wroński [8], and then Nakamura's technique in [3]. We present examples of super-intuitionistic predicate logics with PD-TEP including the logic characterized by linearly ordered frames and the logic characterized by directed frames. Since these logics do not have the usual existence property, we havve that PD-TEP does not imply the usual existence property. We also discuss some related properties.

導入

Prawitz は、自然演繹体系での証明論の古典的著作 [6] において、直観主義述語論理の term existence property (以下、TEP と略す) を証明しているが、そのために、TEP の変種が成立することを示し、disjunction property と組み合わせるという段階を踏ん

*The Prawitz-Doorman Term Existence Property in Super-Intuitionistic Predicate Logics

†本研究は、日本学術振興会　科学研究費補助金 基盤研究 (C) 課題番号 24540120 の助成を受けて行われたものです。(Supported in part by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) No. 24540120, Japan Society for the Promotion of Science.) また、本稿の初期段階で志村立矢氏に有益なコメントをいただきました。ここに記して感謝の意を表します。本稿は、筆者の現在進行中の研究の要旨です。This is an extended abstract of the author's work in progress.

‡〒 422–8529 静岡市駿河区大谷 836　静岡大学理学部数学教室, smnsuzu@ipc.shizuoka.ac.jp

でいる。Prawitz は、関数記号の無い言語でこの TEP の変種を議論している。後に、Doorman [1] は、これに対応することを、関数記号も持つ言語の場合に拡張して証明している。この変種の TEP を、ここでは Prawitz-Doorman term existence property (PD-TEP) と呼ぶことにする。本稿の目的は、この PD-TEP を超直観主義述語論理 (super-intuitionistic predicate logics) で議論することである。

Prawitz と Doorman は、どちらも直観主義述語論理の自然演繹体系 **NJ** の正規化定理 (Normalization Theorem) を応用して結果を得ているが、ここでは Kripke 意味論を用いる。簡単のため、本稿で扱う Kripke frame はすべて最小元持つとしておく。主定理 (定理 2.2) は、Kripke frame のクラスで特徴付けされる超直観主義述語論理が PD-TEP を持つための十分条件を与えるものである。その応用として、いくつかの具体的な超直観主義述語論理が PD-TEP を持つことを示す。それらは、通常の TEP を持たないので、PD-TEP から TEP が導かれないことがわかる。

最後に第 3 節で、関連したいくつかの性質について、現時点で解っていることをまとめ、また関数記号の有無の問題などを述べておく。筆者としては、もう少し解明したいものと考えている。

1 Prawitz-Doorman term existence property

まず、いくつか定義を与えたうえで、PD-TEP をきちんと導入しよう。その上で、すぐに解るようなことをいくつか述べる。

定義 1.1 論理式 A が **weak Harrop-論理式** (wH-論理式) であるとは、どんな strictly positive な部分論理式も $\exists x Y(x)$ の形をしていないこととする。

どんな strictly positive な部分論理式も $\exists x Y(x)$ の形も $Y \vee Z$ の形もしていない場合、**Harrop-論理式** (H-論理式) と言う。(中村 [3]、小野 [5] を参照せよ。また、本稿の第 3 節も参照せよ。)

定義 1.2 E を表現の集合とする。$\mathcal{T}(E)$ によって、E の語彙で書かれた項 (term) の集合を表す。すなわち、$t \in \mathcal{T}(E)$ である必要十分条件は、t に出現する関数記号と個体定数記号はすべて E に出現し、t に出現する個体変数記号はすべて E に自由変数として出現することである。もし、E が個体変数記号も自由変数も含まない場合は、$\mathcal{T}(E)$ は fresh な自由変数 a をとって $\mathcal{T}(E \cup \{a\})$ のことと考える。E が有限個の表現からなる有限集合 $E = \{A_1, \ldots, A_n\}$ の場合は、$\mathcal{T}(E)$ を簡単に $\mathcal{T}(A_1, \ldots, A_n)$ と書く。

注意 1.3 関数記号の無い場合では、$\mathcal{T}(E)$ は有限になることに注意せよ。

定義 1.4 超直観主義述語論理 **L** が **Prawitz-Doorman term existence property** (PD-TEP) を持つとは、任意の wH-論理式と任意の $\exists x A(x)$ に対して次が成立することとする:

もし $\mathbf{L} \vdash H \supset \exists x A(x)$ であれば、有限個の項 $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}(H, \exists x A(x))$ が存在して $\mathbf{L} \vdash H \supset A(t_1) \vee \cdots \vee A(t_n)$ となる。

注意 1.5 関数記号の無い場合では、$\mathcal{T}(E)$ は有限になるので、$\{t_1,\ldots,t_n\}$ として $\mathcal{T}(E)$ をとればよい。Prawitz [6] はこの形で証明している。Doorman [1] は、関数記号のある場合には、$t_1,\ldots,t_n$ を $H \supset \exists x A(x)$ の正規な証明から作り出すアルゴリズムを与えている。("取り出す" ではないことに注意せよ。) どちらも精緻な証明論的結果である。本稿では Kripke 意味論を用いるので、$t_1,\ldots,t_n$ の具体的構成法は与えられない。

直観主義述語論理は、もちろん PD-TEP を持つ。本稿の目的は、この PD-TEP を超直観主義述語論理の枠組みで考察することである。

もっとも基本的なことをひとつ述べておこう。古典述語論理が PD-TEP を持たないことは明らかである。

Fact 1.6 $\exists x \forall y(p(x) \supset p(y))$ は古典述語論理で証明可能であるが、$\forall y(p(a) \supset p(y))$ は古典述語論理で証明不可能である。

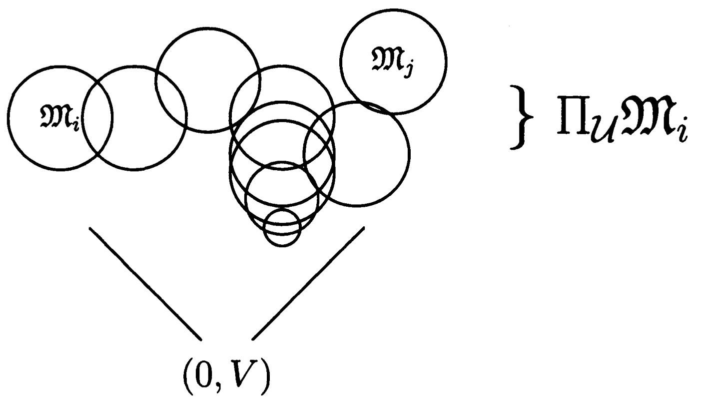
2 主定理とその系

中村 [3] は、定領域の Kripke frames 全体で特徴付けされる中間述語論理 **LD** の existence property を証明している。ここでは、Wroński [8] のアイデアを加味したうえで中村のテクニックを改造して、超直観主義述語論理が PD-TEP を持つ十分条件を与える。

定義 2.1 $\{\mathfrak{M}_i\}_{i\in I}$ を、添え字集合を I とする Kripke frames の集合とする。いま、$\mathcal{U}$ を I 上の超フィルター (ultrafilter) が与えらえているとする。$\{\mathfrak{M}_i\}_{i\in I}$ の $\mathcal{U}$ を法とする超積 (ultraproduct) を、$\Pi_{\mathcal{U}}\mathfrak{M}_i$ と書くことにする。(小野 [4] を参照) ここで、各 $\mathfrak{M}_i$ の最小元 0_i の個体領域 $D_i(0_i)$ を取って、それらの $\mathcal{U}$ を法とする超積 $\Pi_{\mathcal{U}}D_i(0_i)$ の空でない部分集合 (と同一視できる) V を固定する。$\{\mathfrak{M}_i\}_{i\in I}$ の $\mathcal{U}$ を法とし V で束ねた**超花束** (ultrabouquet):

$$\{(0,V)\} \uparrow \Pi_{\mathcal{U}}\mathfrak{M}_i \ .$$

を導入しよう。これは、$\Pi_{\mathcal{U}}\mathfrak{M}_i$ の下に新たに最小元 0 を付け加え、その個体領域を V として得られる Kripke frame である。(もう少し精密に言うと、適切な単射 $f: V \to \Pi_{\mathcal{U}}D_i(0_i)$ によって、各 $u \in V$ を $f(u) \in \Pi_{\mathcal{U}}D_i(0_i)$ と同一視する。特にこの f を明示する場合は、$\uparrow$ を $\uparrow_f$ と書く。)



定理 2.2 (主定理) 超直観主義述語論理 $\mathbf{L}$ が、Kripke frames のクラス $\mathcal{C}$ で特徴付けられ、しかも $\mathcal{C}$ は、次の 2 条件を満たすとする。

(1) $\mathcal{C}$ は、generated subframes を取る操作について閉じている。
(2) $\mathcal{C}$ は、超花束を作る操作について閉じている。

このとき、$\mathbf{L}$ は PD-TEP を持つ。

この定理を証明するには、本質的に Wroński [8] のアイデアと中村 [3] のテクニックを使う。有限交叉性を持つ集合族を超フィルターに拡張して超積を作り (ここが Wroński [8] のアイデア)、これに新しく最小元を付加して超花束を作る。その新しい最小元で、wH-論理式の正しさが保存されることを言う (ここが中村 [3] のテクニックの改良版)。

証明. 超直観主義述語論理 $\mathbf{L}$ が Kripke frames のクラス $\mathcal{C}$ で特徴付けられ、定理の 2 条件を満たすとせよ。そして、$\mathcal{T}(H, \exists x A(x))$ の任意の有限部分集合 S について、論理式 $H \supset \bigvee_{t \in S} A(t)$ が $\mathbf{L}$ で証明できないとする。条件 (1) より、各有限部分集合 $S \subseteq \mathcal{T}(H, \exists x A(x))$ に対して、$\mathcal{C}$ の Kripke frame $\langle M_S, D_S \rangle$ と解釈 σ_S、および M_S の最小元を 0_S として、$D_S(0_S)$ の元に $H \supset \exists x A(x)$ の自由変数を割り当てる写像 φ_S (以下、**割当**と言う) が存在して、$0_S \models_S H^{\varphi_S}$ かつ $0_S \not\models_S \bigvee_{t \in S} A^{\varphi_S}(t^{\varphi_S})$ となる。ここで、$\models_S$ は σ_S によって決まる付値である。また、H^{φ_S}, A^{φ_S}, t^{φ_S} は、それぞれ H, A, t の自由変数に、φ_S によって定まる $D_S(0_S)$ の元の名前となる個体定数を代入したものである。この様な Kripke model と割当 φ_S の組 $(\langle M_S, D_S, \sigma_S \rangle, \varphi_S)$ を集め、集合 $\{(\mathfrak{M}_i, \varphi_S) = (\langle M_i, D_i, \sigma_i \rangle, \varphi_i) \,;\, i \in I\}$ を作る。

次に、各有限部分集合 $S \subseteq \mathcal{T}(H, \exists x A(x))$ に対して、I の部分集合 $\mathrm{Ref}(S)$ を以下で定める。

$$\mathrm{Ref}(S) = \{i \in I \,;\, 0_i \not\models_i \bigvee_{t \in S} A^{\varphi_i}(t^{\varphi_i})\}.$$

ここで、$\models_i$ は σ_i によって決まる付値である。作り方から、任意の有限部分集合 $S \subseteq \mathcal{T}(H, \exists x A(x))$ に関して $\mathrm{Ref}(S) \neq \varnothing$ である。さらに、I の部分集合族 $\mathcal{U}_0 = \{\mathrm{Ref}(S) \,;\, S$ は $\mathcal{T}(H, \exists x A(x))$ の有限部分集合 $\}$ は、有限交叉性を持つ。何故なら、$\mathcal{T}(H, \exists x A(x))$ の有限個の有限部分集合 $S_1, \ldots, S_n$ に対して、$S_1 \cup \cdots \cup S_n$ はまた $\mathcal{T}(H, \exists x A(x))$ の有限部分集合であるから、$\varnothing \neq \mathrm{Ref}(S_1 \cup \cdots \cup S_n) \subseteq \mathrm{Ref}(S_1) \cap \cdots \cap \mathrm{Ref}(S_n)$ となるからである。この $\mathcal{U}_0$ を超フィルター $\mathcal{U}$ に拡張する。そして、$\mathcal{U}$ を法とする超積 $\Pi_{\mathcal{U}} \mathfrak{M}_i$ を作る。このとき、$\Pi_{\mathcal{U}} \mathfrak{M}_i$ の最小元 $(0_i)/\mathcal{U}$ での個体領域は $\Pi_{\mathcal{U}} D_i(0_i)$ である。また、解釈は $(\sigma_i)/\mathcal{U}$、割当は $(\varphi_i)/\mathcal{U}$ として、超積に付随して自然に構成されていることに注意する。

これから超花束を作るために、新しい最小元 0 を用意し、その個体領域を構成する。まず、$\mathcal{T}(H, \exists x A(x))$ が $H \supset \exists x A(x)$ に出現する自由変数と個体定数から生成される absolutely free algebra の構造を持っており、$a \mapsto (\varphi_i(a))/\mathcal{U}$ (a は自由変数) と $c \mapsto (\sigma_i(c))/\mathcal{U}$ (c は個体定数) から自然に定まる準同型 $\nu : \mathcal{T}(H, \exists x A(x)) \to \Pi_{\mathcal{U}} D_i(0_i)$ がとれることに注意する。ここで、ν の核 $\mathrm{Ker}(\nu)$ による $\mathcal{T}(H, \exists x A(x))$ の商代数を考えると、準同型定理により、単射 $\widetilde{\nu} : \mathcal{T}(H, \exists x A(x)) / \mathrm{Ker}(\nu) \to \Pi_{\mathcal{U}} D_i(0_i)$ が構成される。V として $\mathcal{T}(H, \exists x A(x)) / \mathrm{Ker}(\nu)$ をとり、f として $\widetilde{\nu}$ をとって超花束 $(0, V) \uparrow_{\widetilde{\nu}} \Pi_{\mathcal{U}} \mathfrak{M}_i$ を得る。

この超花束上に解釈を与える。先ほど断った様に、新しい最小元 0 以外では解釈 $\sigma_i/\mathcal{U}$ があるので、最小元 0 での解釈をうまく定めればよい。作り方から関数記号と個体定

数記号の解釈は $\mathcal{T}(H,\exists xA(x))/\operatorname{Ker}(\nu)$ 上に自然に定まっている。また、$H \supset \exists xA(x)$ に出現する自由変数についても、割当 $\iota : a \mapsto a/\operatorname{Ker}(\nu)$ が自然に定まっている。ここで、$\iota(a) = a/\operatorname{Ker}(\nu) \overset{\tilde{\nu}}{\mapsto} \nu(a) = (\varphi_i(a))/\mathcal{U}$ であることに注意する。後は、述語変数の解釈のみを考えればよい。各 n 変数述語 p に対して、

$$\sigma(0,p) = \{(t_1/\operatorname{Ker}(\nu),\dots,t_n/\operatorname{Ker}(\nu))\ ;\ (0_i)/\mathcal{U} \models^{(\sigma_i)/\mathcal{U}} p(t_1^{(\varphi_i)/\mathcal{U}},\dots,t_n^{(\varphi_i)/\mathcal{U}})\}$$

とする。本質的には、$\Pi_{\mathcal{U}}\mathfrak{M}_i$ の最小元 $\Pi_{\mathcal{U}}0_i$ での解釈をそのまま引き戻したものになっている。特に、atomic な文 $p(t_1,\dots t_n)$ $(t_1,\dots t_n \in \mathcal{T}(H,\exists xA(x)))$ に対しては、

$$0 \models^{\sigma} p(t_1^{\iota},\dots,t_n^{\iota}) \text{ if and only if } (0_i)/\mathcal{U} \models^{(\sigma_i)/\mathcal{U}} p(t_1^{(\varphi_i)/\mathcal{U}},\dots,t_n^{(\varphi_i)/\mathcal{U}})$$

であることに注意する。そして、各 $t \in \mathcal{T}(H,\exists xA(x))$ に対して $\mathrm{Ref}(\{t\}) \in \mathcal{U}_0$ だから、$(0_i)/\mathcal{U} \not\models^{(\sigma_i)/\mathcal{U}} A^{(\varphi_i)/\mathcal{U}}(t^{(\varphi_i)/\mathcal{U}})$ である。よって、$0 \not\models^{\sigma} A^{\iota}(t^{\iota})$ となる。すなわち、$0 \not\models^{\sigma} \exists xA^{\iota}(x)$ である。後は、$0 \models^{\sigma} H^{\iota}$ を言えばよい。

以下では、これを背理法で証明する。$0 \not\models^{\sigma} H^{\iota}$ と仮定する。

今、便宜的に論理式の **$\mathcal{T}$-部分論理式**という特別な部分論理式を定める。これは、通常の部分論理式の定義において、$\forall xZ(x)$, $\exists xZ(x)$ の真部分論理式 $Z(t)$ の中の項 t を $t \in \mathcal{T}(H,\exists xA(x))$ に制限したものである。また、strictly positive $\mathcal{T}$-部分論理式も同様に定める。これから、H の $\mathcal{T}$-部分論理式 $C_1, C_2, \dots, C_k$ と H の strictly positive $\mathcal{T}$-部分閉論理式 C からなる sequent:

$$C_1, C_2, \dots, C_k \to C$$

の列 $S_0, S_1, \dots$ を、C に出現する論理記号の数を減らしながら、C が atomic あるいは $\neg D$ の形になるまで、以下の条件 $(*)$ と $(**)$ を満たすように順次作ってゆく。

$(*)$ $(0_i)/\mathcal{U} \models^{(\sigma_i)/\mathcal{U}} C_1^{(\varphi_i)/\mathcal{U}} \wedge C_2^{(\varphi_i)/\mathcal{U}} \wedge \cdots \wedge C_k^{(\varphi_i)/\mathcal{U}} \supset C^{(\varphi_i)/\mathcal{U}}$,
$(**)$ $0 \not\models^{\sigma} C_1^{\iota} \wedge C_2^{\iota} \wedge \cdots \wedge C_k^{\iota} \supset C^{\iota}$.

まず、S_0 を $\ \to H$ とする。仮定から $(*)$ と $(**)$ は満たされている。

次に、S_i: $C_1, C_2, \dots, C_k \to C$ までできているとき。C の形によって場合分けする。C が atomic のとき、$\neg D$ のときは停止する。C が、$D \wedge E$, $D \vee E$, $D \supset E$, $\forall xD(x)$ のときは以下の手順による。H が wH-論理式ゆえ、C は $\exists xD(x)$ の形になることはない。

<u>S_i: $C_1, C_2, \dots, C_k \to D \wedge E$ のとき:</u>

すでに作られている S_i の満たす $(**)$ より、$0 \not\models^{\sigma} C_1^{\iota} \wedge C_2^{\iota} \wedge \cdots \wedge C_k^{\iota} \supset D^{\iota} \wedge E^{\iota}$ ゆえ、ある m が存在して $m \models^{\sigma} C_1' \wedge C_2' \wedge \cdots \wedge C_k'$ かつ $m \not\models^{\sigma} D' \wedge E'$ である。ここで、X' は、$m = 0$ のときは X^{ι} であり $m \in \Pi_{\mathcal{U}}M_i$ のときは、$(\varphi_i)/\mathcal{U}$ である。(実質は同じものだが、証明の明確化のために明示的に区別して書いている。) しかし、S_i の満たす $(*)$ より、m は 0 でなければならない。そこで、$0 \not\models^{\sigma} D^{\iota}$ なら S_{i+1}: $C_1, C_2, \dots, C_k \to D$ とし、$0 \models^{\sigma} D^{\iota}$ ならば、$0 \not\models^{\sigma} E^{\iota}$ であるから、S_{i+1} を $C_1, C_2, \dots, C_k \to E$ とせよ。条件 $(*)$ と $(**)$ は自動的に成立する。

S_i: $C_1, C_2, \ldots, C_k \to D \vee E$のとき:

$0 \not\models^{\sigma} C_1^{\iota} \wedge C_2^{\iota} \wedge \cdots \wedge C_k^{\iota} \supset D^{\iota} \vee E^{\iota}$ ゆえ、あるmが存在して$m \models^{\sigma} C_1' \wedge C_2' \wedge \cdots \wedge C_k'$ かつ$m \not\models^{\sigma} D' \vee E'$ である。上の場合と同様にして、mは0であり、さらにS_iのみたす$(**)$より、$(0_i)/\mathcal{U} \models^{(\sigma_i)/\mathcal{U}} D^{(\varphi_i)/\mathcal{U}} \vee E^{(\varphi_i)/\mathcal{U}}$ である。$(0_i)/\mathcal{U} \models^{(\sigma_i)/\mathcal{U}} D^{(\varphi_i)/\mathcal{U}}$ のとき、S_{i+1}を$C_1, C_2, \ldots, C_k \to D$とし、そうでないなら、$C_1, C_2, \ldots, C_k \to E$とせよ。条件$(*)$と$(**)$は自動的に成立する。

S_i: $C_1, C_2, \ldots, C_k \to D \supset E$のとき:

$0 \not\models^{\sigma} C_1^{\iota} \wedge C_2^{\iota} \wedge \cdots \wedge C_k^{\iota} \supset (D^{\iota} \supset E^{\iota})$ ゆえ、あるmが存在して$m \models^{\sigma} C_1' \wedge C_2' \wedge \cdots \wedge C_k'$ かつ$m \not\models^{\sigma} D' \supset E'$ である。するとさらにあるnが存在して、$m \leq n$であって、$n \models^{\sigma} C_1' \wedge C_2' \wedge \cdots \wedge C_k' \wedge D'$ かつ$n \not\models^{\sigma} E'$である。上の場合と同様にして、$n$は0である。$S_{i+1}$を$C_1, C_2, \ldots, C_k, D \to E$とせよ。条件$(*)$と$(**)$は自動的に成立する。

S_i: $C_1, C_2, \ldots, C_k \to \forall x D(x)$のとき。

上記と同様の考察で、$0 \models^{\sigma} C_1^{\iota} \wedge C_2^{\iota} \wedge \cdots \wedge C_k^{\iota}$ かつ$0 \not\models^{\sigma} \forall x D^{\iota}(x)$ であり、また、$(0_i)/\mathcal{U} \models^{(\sigma_i)/\mathcal{U}} \forall x D^{(\varphi_i)/\mathcal{U}}(x)$ である。$0 \not\models^{\sigma} \forall x D^{\iota}(x)$ ゆえ、ある$t \in \mathcal{T}(H, \exists x A(x))$が存在して、$0 \not\models^{\sigma} D^{\iota}(t/\mathrm{Ker}(\nu))$ である。いま、$t^{\iota} = t/\mathrm{Ker}(\nu)$ であるから、$0 \not\models^{\sigma} D^{\iota}(t^{\iota})$ である。そこで、S_{i+1}を$C_1, C_2, \ldots, C_k \to D(t)$とせよ。条件$(*)$と$(**)$は明らかである。

この構成のを順次行えば、有限ステップで停止する。停止した最後のS_kをみる。次の2つの場合がある。

(Case 1) S_k: $C_1, C_2, \ldots, C_k \to p(t_1, \ldots, t_n)$の形のとき。
S_1, S_2. ...を構成してきたときと同様にして、$0 \not\models^{\sigma} p(t_1^{\iota}, \ldots, t_n^{\iota})$ かつ$(0_i)/\mathcal{U} \models^{(\sigma_i)/\mathcal{U}} p(t_1^{(\varphi_i)/\mathcal{U}}, \ldots, t_n^{(\varphi_i)/\mathcal{U}})$ となり、σの定義に反する。これは不合理である。

(Case 2) S_k: $C_1, C_2, \ldots, C_k \to \neg D$の形のとき。
同様にして、$(**)$より、$0 \not\models^{\sigma} C_1^{\iota} \wedge C_2^{\iota} \wedge \cdots \wedge C_k^{\iota} \supset \neg D^{\iota}$ であるから、あるmが存在して、$m \models^{\sigma} C_1^{\iota} \wedge C_2^{\iota} \wedge \cdots \wedge C_k^{\iota} \wedge D^{\iota}$ である。そして、$(*)$より、$m = 0$であることが言える。すると、$(0_i)/\mathcal{U} \models^{(\sigma_i)/\mathcal{U}} D_n^{(\varphi_i)/\mathcal{U}}$ となり、$(*)$に反する。これは不合理である。

よって、いずれにしても不合理が導かれた。すなわち、$0 \models^{\sigma} H^{\iota}$ である。 □

もし、Kripke framesのクラス$\mathcal{C}$が定理2.2の条件を満たせば、$\mathcal{C}$は超積を作る操作についても閉じていることに注意せよ。定理2.2の条件を満たす様な$\mathcal{C}$は、たくさん考えられる。それらによって特徴づけされる超直観主義述語論理は、PD-TEPを持つことになる。たとえば、

系 2.3 (1) 線形*Kripke frames*全体で特徴付けられる超直観主義述語論理**Lin**は*PD-TEP*を持つ。

(2) *directed*な*Kripke frames*全体で特徴付けられる超直観主義述語論理**Dir**は*PD-TEP*を持つ。

証明. それぞれを特徴付けるクラスは、first-order definableなクラスである。よって、超積を作る操作について閉じている。また、それぞれのクラスは、新しく最小元を付

加する操作について閉じているので、超花束を作る操作について閉じている。さらに、generated subframes を取る操作について閉じていることは明らかである。 □

系 2.4 *PD-TEP* は *TEP* を導かない。

証明. 上記の **Lin**、**Dir** が TEP を持たないことを言えばよい。ここでは、**Lin** について証明する。p, q を命題変数、r を 1 変数の述語変数とする。$A(p,q,a,b,x)$ で、論理式 $\{(p \supset r(a)) \wedge (q \supset r(b))\} \supset r(x)$ を表す。直観主義述語論理で、$(p \vee q) \supset \exists x A(p,q,a,b,x)$ が証明可能であることに注意する。さらに、**Lin** において、$(p \supset q) \vee (q \supset p)$ が証明可能であるから、$\exists x A(p \supset q, q \supset p, a, b, x)$ が **Lin** において証明可能である。もし、**Lin** が TEP を持てば、$A(p \supset q, q \supset p, a, b, a)$ または $A(p \supset q, q \supset p, a, b, b)$ のどちらかが **Lin** において証明可能となる。これは、どちらも証明可能でないことは、Kripke models を作って容易に示すことができる。 □

本稿と同様の model theoretic な操作は、**Kripke sheaf 意味論** (cf. Suzuki [7]) において、より容易に展開できることに注意しておく。実のところ、超積や超花束は、Kripke sheaf で考えた方が自然かつ容易である。

3 まとめ: 他の類似の性質、関数記号の有無の問題

3.1 他の類似の性質との関係

PD-TEP に類似の性質が考えられる。それらの性質を紹介し、現時点で解っている相互関係についてまとめておく。

定義 3.1 (1) (cf. 古森 [2]) 超直観主義述語論理 **L** が **weak term existence property** (wTEP) を持つとは、任意の $\exists x A(x)$ 対して次が成立することとする:

もし $\mathbf{L} \vdash \exists x A(x)$ であれば、有限個の項 $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}(\exists x A(x))$ が存在して $\mathbf{L} \vdash A(t_1) \vee \cdots \vee A(t_n)$ となる。

(2) (cf. 中村 [3], 小野 [5]) 超直観主義述語論理 **L** が **Harrop term existence property** (H-TEP) を持つとは、任意の Harrop-論理式 H と任意の $\exists x A(x)$ 対して次が成立することとする:

もし $\mathbf{L} \vdash H \supset \exists x A(x)$ であれば、ある項 $t \in \mathcal{T}(H, \exists x A(x))$ が存在して $\mathbf{L} \vdash H \supset A(t)$ となる。

(3) 超直観主義述語論理 **L** が **Harrop weak term existence property** (H-wTEP) を持つとは、任意の Harrop-論理式 H と任意の $\exists x A(x)$ 対して次が成立することとする:

もし $\mathbf{L} \vdash H \supset \exists x A(x)$ であれば、有限個の項 $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}(H, \exists x A(x))$ が存在して $\mathbf{L} \vdash H \supset A(t_1) \vee \cdots \vee A(t_n)$ となる。

これらの間の相互関係は、興味深い問題である。下図を参照してほしい。実線の矢印は、"含意" を表す。本稿では、これらの関係の一部が proper であることを示した。成り立たないことの解っているものには、否定の印が書いてある。まだ未解明の部分も多い。筆者としては、近いうちに完全解明されることを期待している。できれば自

分で解明したいのは、もちろんのことであるが。すべての矢印が、proper であること(逆が成立しないこと)が示されれば、否定の矢印を省くことができ、図がすっきりするので、個人的な予想というか希望としては、そうなって欲しいような気がする。

注意 3.2 事実 1.6 より、古典述語論理は、wTEP を持たない。

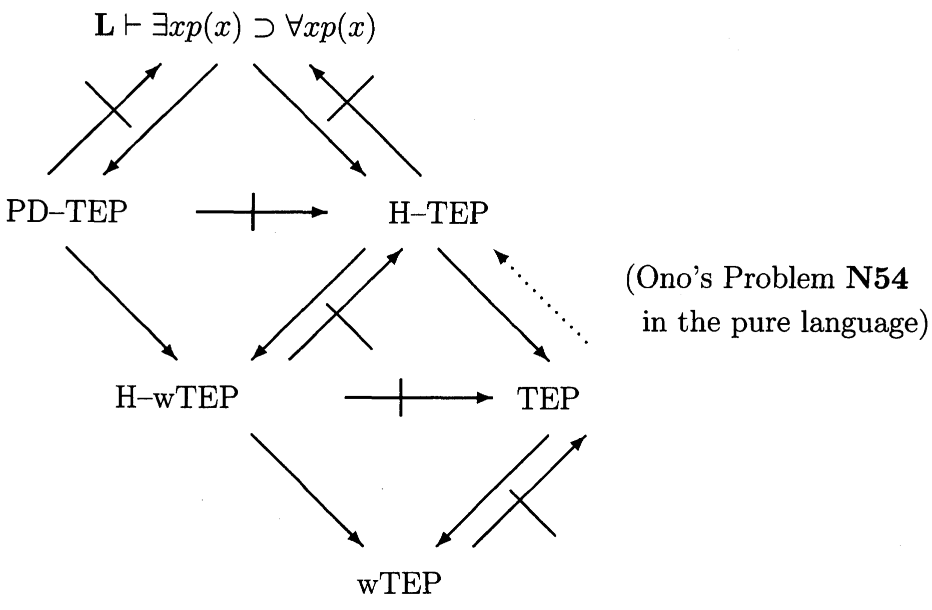
注意 3.3 PD-TEP と H-TEP の双方を導く自然な "join" もどきとして、次の (#) のような性質を考えることもできよう。

(#) 任意の wH-論理式 H と任意の $\exists x A(x)$ 対して、もし $\mathbf{L} \vdash H \supset \exists x A(x)$ ならば、ある項 $t \in \mathcal{T}(\{\exists x A(x)\})$ が存在して $\mathbf{L} \vdash H \supset A(t)$.

実は、この (#) は、$\mathbf{L} \vdash \exists x p(x) \supset \forall x p(x)$ と同値である。これは、$\mathbf{L}$ が超直観主義命題論理の超直観主義述語論理のなかでの最大述語拡大になっていることを意味しており、量化子 $\forall$, $\exists$ が消滅しているに等しい。そのような超直観主義述語論理において、本稿で扱っている性質は、すべて自明になってしまう。

もちろん、直観主義述語論理は、PD-TEP と H-TEP の両方を持つ。そして、直観主義述語論理では、$\exists x p(x) \supset \forall x p(x)$ は証明可能ではないから、「PD-TEP と H-TEP の両方を持つ」と $\mathbf{L} \not\vdash \exists x p(x) \supset \forall x p(x)$ は両立する。

注意 3.4 「TEP が H-TEP を導くかどうか?」を pure first-order language での中間述語論理で考えるという問題がある。このとき、TEP は EP (existence property)、H-TEP は H-EP (Harrop-existence property) と呼ばれる性質に対応する。これは、小野の問題 **N54** として知られており、四半世を経ても、今のところ未解決である。下図では、点線の矢印で示してある。



3.2 関数記号の有無の問題

もうひとつ、ここで言及しておきたいことは、関数記号の有無の問題である。上記の小野の問題 **N54** は、超直観主義的述語論理の伝統に従って、関数記号の無い言語で設定されている。ここまで読まれた読者は既にお気づきのことと思うが、本稿の出発点のひとつは、小野の問題 **N54** の解決へ向けての考察である。残念ながら、本来の問題については、未だ何も解っていない状態である。本稿での考察が何かの糸口になって欲しいと考えている。その為にも、ここで扱っている諸性質の「関数記号の無い言語」版が「関数記号の有る言語」版と同等かどうかを考察することが、第一歩であろう。まずは、そのあたりを考えて行きたい。

References

[1] Doorman, L. M., *A note on the existence property for intuitionistic logic with function symbols*, Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik 36(1990), 17–21.

[2] Komori, Y. *Some results on the super-intuitionistic predicate logics*, **Reports on Mathematical Logic** 15 (1983), 13–31.

[3] Nakamura, T., *Disjunction property for some intermediate predicate logics*, Reports on Mathematical Logic 15(1983), 33–39.

[4] Ono, H., *Model extension theorem and Craig's interpolation theorem for intermediate predicate logics*, Reports on Mathematical Logic 15(1983), 41–58.

[5] Ono, H., *Some problems in intermediate predicate logis* Reports on Mathematical Logic 21 (1987), 55–67. (*Supplement* 22(1988), 117–118.)

[6] Prawitz, D., **Natural deduction. A proof-theoretical study**, Acta Universitatis Stockholmiensis. Stockholm Studies in Philosophy, No. 3 Almqvist & Wiksell, Stockholm 1965. (Reprint: Dover Publications, 2006)

[7] Suzuki, N.-Y., *Halldén-completeness in super-intuitionistic predicate logics*, Studia Logica 73(2003), 113–130

[8] Wroński, A., *Remarks on Halldén completeness of modal and intermediate logics*, Bulletin of the Section of Logic, Polish Academy of Sciences, Institute of Philosophy and Sociology, 5(1976), 126–129.