

強独立な二分的部分基を持つハウスドルフ空間

塚本靖之 (京都大学大学院人間・環境学研究科)

立木秀樹 (京都大学大学院人間・環境学研究科)

独立な二分的部分基から位相空間のドメイン表現を得ることを紹介し、強独立な二分的部分基をもつハウスドルフ空間が存在することを示す。

1 二分的部分基とその独立性

位相空間 X を第 2 可算公理を満たすハウスドルフ空間とする。 X の二分的部分基 (dyadic subbase) S とは、 $\omega \times 2$ (ω は第 1 順序数) でラベル付けされた部分基 $S = \{S_{n,i}; n < \omega, i < 2\}$ であり、 $S_{n,0}, S_{n,1}$ が互いの外部であるようなものをいう。ここで、非負整数および ω を、それより小さい非負整数の集合と同一視している。

二分的部分基 S は、次を満たすとき独立であるという。

$$\bigcap_{k < n} S_{k,\sigma(k)} \neq \emptyset, \quad \forall n < \omega, \forall \sigma : n \rightarrow 2. \tag{1.1}$$

さらに、 $S_{n,\perp} = X \setminus (S_{n,0} \cup S_{n,1})$ とおいて (記号 “ \perp ” は「ボトム」と読み「定義されない」などの意)、

$$\bigcap_{k < n} S_{k,\sigma(k)} \neq \emptyset, \quad \forall n < \omega, \forall \sigma : n \rightarrow \{0, 1, \perp\} \tag{1.2}$$

を満たすとき、強独立であるという。

例 1.1. 区間 $[0, 1]$ の通常の位相での独立な二分的部分基は次のように与えることができる。

$$\begin{aligned} S_{n,0} &:= \bigcup_{k < \omega} \left(\frac{4k-1}{2^{n+1}}, \frac{4k+1}{2^{n+1}} \right) \cap [0, 1], \\ S_{n,1} &:= \bigcup_{k < \omega} \left(\frac{4k+1}{2^{n+1}}, \frac{4k+3}{2^{n+1}} \right) \cap [0, 1]. \end{aligned} \tag{1.3}$$

例 1.1 の部分基は独立であるが、強独立ではない。

2 ドメイン表現

位相空間 X とその独立な二分的部分基 S を固定する. 集合 $\mathbb{T} := \{0, 1, \perp\}$ に $\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}, \mathbb{T}\}$ という位相を入れる. \mathbb{T} における順序を $\perp \leq 0, \perp \leq 1$ で定める. 0 と 1 は比較不能で, \leq は半順序である. また \mathbb{T}^ω にも \mathbb{T} から誘導される位相と順序を入れる.

X から \mathbb{T}^ω への埋め込み ϕ_S が次のように定まる.

$$\phi_S(x)(n) = \begin{cases} 0 & (x \in S_{n,0}) \\ 1 & (x \in S_{n,1}) \\ \perp & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (2.1)$$

ここで, $\phi_S(x)(n)$ が 0 か 1 であることは有限時間で求まるが, \perp であることを結論付けるには無限時間かかる (無限に高い精度の近似が必要) という計算機科学的なイメージをもとに話を進める.

X の点 x について, 初期状態 $\perp^\omega = (\perp, \perp, \dots)$ から, $\phi_S(x)(n) \in \{0, 1\}$ であるような $n < \omega$ について, \perp を $0, 1$ に置き換えていくことで $\phi_S(x)$ を計算すると考える. ただし, 最後まで \perp のままである部分が含まれるため, 先頭から順に行うことは不可能である. しかし, 勝手な位置から置き換えるのも不自然である. そこで, 有限時間の出力での $0, 1$ に置き換えられる位置を, 以下で定める K_S に従うように制限する.

$$K_S := \{\phi_S(x)|_n \in \mathbb{T}^\omega; x \in X, n < \omega\}. \quad (2.2)$$

ただし, $\sigma \in \mathbb{T}^\omega$ に対し, $\sigma|_n$ は

$$\sigma|_n(k) := \begin{cases} \sigma(k) & (k < n) \\ \perp & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

で定義される \mathbb{T}^ω の元である. K_S の元をたどって得られる極限を K_S に付け加えた集合を次のように定める.

$$D_S := \{\sigma \in \mathbb{T}^\omega; \forall n < \omega, \sigma|_n \in K_S\}. \quad (2.3)$$

明らかに ϕ_S は D_S への埋め込みである.

定義 2.1. 半順序集合 D_S と, 埋め込み ϕ_S の組 (D_S, ϕ_S) を X の S によるドメイン表現という.

D_S の部分集合で, 次のようなものを考える.

$$L_S := D_S \setminus K_S, \quad (2.4)$$

$$M_S : L_S \text{ の極小元の集合.} \quad (2.5)$$

ここでの興味は, D_S から位相空間 X の構造をどのくらい復元できるかである.

X がコンパクトならば, M_S は X と同相となる. 例 1.1 では $\phi_S(X) = M_S$ である. コンパクトでなくても X が正則ならば, X は M_S の部分空間と同相となる. ゆえに, M_S は K_S を近似とする空間のなかでもっとも自然なものと考えられる.

X が正則でなくても, 多くのハウスドルフ空間では M_S は空集合ではない. しかし, 二分的部分基 S が強独立であるならば, $D_S = \mathbb{T}^\omega$ となり, $M_S = \emptyset$ である.

3 主結果

定理 3.1. 強独立な二分的部分基を持つハウスドルフ空間が存在する.

強独立な二分的部分基を持つ位相空間において, 任意の非空な 2 個の開集合の閉包は交わる. そのようなハウスドルフ空間である Prime integer topology をもとに以下のように例を構成した.

例 3.2. 集合 \mathbb{N} を自然数の集合 ($0 \notin \mathbb{N}$) とし, $(p_n)_{n < \omega} := (3, 5, 7, 11, 13, \dots)$ を奇素数の列とする. \mathbb{N} の集合の族 $S = \{S_{n,i}; n < \omega, i < 2\}$ を次で定める.

$$\begin{aligned} S_{n,0} &:= \left\{ (a-1)p_n + b; a, b \in X, 0 < b < \frac{p_n}{2} \right\}, \\ S_{n,1} &:= \left\{ (a-1)p_n + b; a, b \in X, \frac{p_n}{2} < b < p_n \right\}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

\mathbb{N} に S で生成される位相 \mathfrak{P}_2 を入れたとき, S が $(\mathbb{N}, \mathfrak{P}_2)$ の強独立な二分的部分基であることは, 中国剰余定理から明らかだろう.

命題 3.3. 位相空間 $(\mathbb{N}, \mathfrak{P}_2)$ はハウスドルフである.

証明の全体は少し込み入ったものになるが, 次の命題に還元できることは容易に示せる.

命題 3.4. 任意の素数 p と自然数 n に対し, $n \geq p$ ならば p 個の自然数 $n+1, \dots, n+p$ の中に, p より大きい素因数を持つものが存在する.

証明. (命題 3.4 \Rightarrow 命題 3.3) 2 個の自然数 x, y ($x < y$) を固定する.

(i) $2x \leq y$ の場合, y を超えない最大の素数を p とする. 命題 3.4 より,

$$y < lp_n \leq y + p \leq 2y, \quad p_n > p$$

となる奇素数 p_n と自然数 l が存在する. ここで p のとり方より, $p_n > y$ となる. また, 容易に $l = 1, p_n = 2y$ を得る.

よって, $0 < x < p_n/2 < y < p_n$ より, $x \in S_{n,0}, y \in S_{n,1}$ で x, y は分離可能である.

(ii) $x < y < 2x$ の場合, $2(y - x)$ を超えない最大の素数を p とする. $p \leq 2(y - x) < 2x$ だから命題 3.4 より,

$$2x < lp_n \leq 2x + p \leq 2y, \quad p_n > p$$

となる奇素数 p_n と自然数 l が存在する. ここで, $lp_n = 2y$ となりうるのは $p = 2$ のときだけである. しかし, このときは $2x + 1$ が 2 より大きい素因数を持つので, $lp_n = 2y$ としてよい.

p のとり方から $p_n > 2(y - x)$ であるので

$$(l - 1)p_n = 2x < lp_n = 2y < (l + 1)p_n$$

となる. よって, l が偶数ならば $x \in S_{n,1}, y \in S_{n,0}$, l が奇数ならば $x \in S_{n,0}, y \in S_{n,1}$ となり, いずれの場合も x, y は分離可能である. \square

証明. (命題 3.4) 概略だけ述べる.

素数 p と p 以上の自然数 n について, 2 項係数 $\binom{n+p}{p}$ が p より大きい素因数を持つことを示せばよい.

$\binom{n+p}{p}$ を解析的に下から押さえ, 素因数分解と素数定理の評価によって上から押さえる.

$\binom{n+p}{p}$ が p より大きい素因数を持たない仮定すると, 十分大きい p については $n < 2p$ (n が p の定数倍で押さえられればよい) となる. これは $n + p > 1.5n$ となるためエルデシュの定理 “ $\forall n \geq 8, n < \exists p' \leq 1.5n, p' : \text{prime}$ ” (チェビシエフの定理の拡張) に反する. 小さい p については個別に示すことができる. \square

参考文献

- [OTY] Ohta, H., Tsuiki, H., Yamada, S., *independent subbases and non-redundant codings of separable metrizable spaces*, *Topology and its Applications*, vol.158, p.1–14, Elsevier Science (2011).