数理解析研究所講究録
第 1833 巻 2013 年 92-97

On Arvanitakis's simultaneous selection theorem

島根大学 総合理工学研究科 山内貴光 (Takamitsu Yamauchi)
Interdisciplinary Faculty of Science and Engineering,
Shimane University

位相空間論における基本的な定理として Tietze の拡張定理が挙げられるが, その一般化として, Dugundji の拡張定理 [4] と Michael の選択定理 [8] がよく知られている. 本稿では, (大雑把にいって) この 2 定理を同時に一般化した Arvanitakis の定理 [1] について考察する.

1. Arvanitakis の定理

本稿において, 空間はすべて完全正則かつハウスドルフであるとし, 線型空間は, すべて実線型空間とする. はじめに Dugundji の拡張定理と Michael の選択定理を述べる.

空間 X と線型位相空間 E に対して, X から E への連続関数全体の集合を $C(X,E)$ で表す. 集合 $C(X,E)$ の各点 f,g および実数 r に対して, f と g の和 $f+g:X\to E$ および f の r 倍 $rf:X\to E$ を

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x), \quad (rf)(x)=r\,f(x), \qquad x\in X$$

によって定めることにより, $C(X,E)$ には自然に線型構造が定義される. 線型位相空間 E の部分集合 A に対して, A の凸包を $\operatorname{conv}A$ で表す. 距離空間における Tietze の拡張定理の一般化として, Dugundji [4] は次の拡張定理を証明した.

定理 1 (Dugundji [4]). X を距離空間, A を X の閉集合, E を局所凸線型位相空間とする. このとき, 次の条件を満たす線型作用素 $S:C(A,E)\to C(X,E)$ が存在する: 任意の $f\in C(A,E)$ に対して, $S(f)$ は f の拡張であり, $S(f)(X)\subset\operatorname{conv}f(A)$.

なお, Michael [7] は, $C(A,E)$ と $C(X,E)$ が各点収束位相, コンパクト開位相, 一様位相のいずれかの位相を共にもてば, 上の線型作用素 S は連続であることを示した.

空間 Y の空でない部分集合全体を 2^Y で表す. 集合値関数 $\Phi:X\to 2^Y$ に対して, 一価関数 $f:X\to Y$ が Φ の選択関数であるとは, 各点 $x\in X$ に対して $f(x)\in\Phi(x)$ であるときをいう. 集合値関数 $\Phi:X\to 2^Y$ が下半連続であるとは, 任意の Y の開集合 V に対して, $\{x\in X:\Phi(x)\cap V\neq\varnothing\}$ が X の開集合であることをいう. Michael [8] は次の選択定理を証明した.

定理 2 (Michael [8]). X をパラコンパクト空間, Y を Banach 空間, $\Phi:X\to 2^Y$ を閉凸集合を値としてとる下半連続な集合値関数とする. このとき, Φ の連続な選択関数が存在する.

ある局所コンパクト空間の商空間として表される空間を k 空間という．また，線型位相空間 E が完備であるとは，E の原点の近傍から生成される一様構造が完備であることをいう．線型位相空間 E の部分集合 A に対して，A の閉凸包を $\overline{\mathrm{conv}}\,A$ で表す．Arvanitakis [1] は，大雑把にいって，定理 1 と定理 2 の共通の一般化となる次の定理を証明した．

定理 3 (Arvanitakis [1])**.** X をパラコンパクトな k 空間，Y を完備距離化可能空間，$\Phi : X \to 2^Y$ を下半連続な集合値関数，E を完備な局所凸線型位相空間とする．このとき，次の条件を満たす線型作用素 $S : C(Y,E) \to C(X,E)$ が存在する:

(1.1)　任意の $f \in C(Y,E)$ および $x \in X$ に対して，$S(f)(x) \in \overline{\mathrm{conv}}\, f(\Phi(x))$.

さらに，$C(Y,E)$ と $C(X,E)$ がコンパクト開位相，一様位相のいずれかの位相を共にもてば，S は連続である．

実際，定理 3 から，定理 1, 2 と類似した次の 2 つの系を得る．

系 4 ([1])**.** X をパラコンパクトな k 空間，A を完備距離化可能な X の閉部分空間，E を完備な局所凸線型位相空間とする．このとき，次の条件を満たす線型作用素 $S : C(A,E) \to C(X,E)$ が存在する: 任意の $f \in C(A,E)$ に対して，$S(f)$ は f の拡張であり，$S(f)(X) \subset \overline{\mathrm{conv}}\, f(A)$. さらに，$C(A,E)$ と $C(X,E)$ がコンパクト開位相，一様位相のいずれかの位相を共にもてば，S は連続である．

証明．集合値関数 $\Phi : X \to 2^A$ を

$$\Phi(x) = \begin{cases} \{x\} & (x \in A \text{ のとき}), \\ A & (x \notin A \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定める．A は閉集合なので Φ は下半連続である．よって，$Y = A$ として定理 3 を適用すると，(1.1) を満たす線型作用素 $S : C(A,E) \to C(X,E)$ が存在する．このとき，任意の $f \in C(A,E)$ および $x \in A$ に対して，$S(f)(x) \in \overline{\mathrm{conv}}\, f(\Phi(x)) = \overline{\mathrm{conv}}\, f(\{x\}) = \{f(x)\}$ より $S(f)$ は f の拡張である．さらに，$S(f)(X) \subset \bigcup_{x \in X} \overline{\mathrm{conv}}\, f(\Phi(x)) \subset \overline{\mathrm{conv}}\, f(A)$ が成り立つ．□

系 5 ([1])**.** X をパラコンパクトな k 空間，Y を Banach 空間，$\Phi : X \to 2^Y$ を閉凸集合を値としてとる下半連続な集合値関数とする．このとき，Φ の連続な選択関数が存在する．

証明．Banach 空間 Y は完備な局所凸線型位相空間であり完備距離化可能空間であるから，$E = Y$ として定理 3 を適用すると，(1.1) を満たす線型作用素 $S : C(Y,Y) \to C(X,Y)$ が存在する．このとき，Y 上の恒等写像 $\mathrm{id}_Y : Y \to Y$ を用いて $g = S(\mathrm{id}_Y)$ とおくと，$g \in C(X,Y)$ である．また，$x \in X$ に対して，$\Phi(x)$ は閉凸集合より，$g(x) = S(\mathrm{id}_Y)(x) \in \overline{\mathrm{conv}}\,\mathrm{id}_Y(\Phi(x)) = \overline{\mathrm{conv}}\,\Phi(x) = \Phi(x)$. よって，$g$ は Φ の連続な選択関数である．□

2. ARVANITAKIS の定理の拡張

Michael の選択定理 2 と系 5 から,「Arvanitakis の定理 3 において X が k 空間であるという仮定は落とせるか」という問題が考えられる. この問題に対して, Valov [14] は, E が Banach 空間であるか, または $C(A,E)$ と $C(X,E)$ をそれぞれ $C_b(A,E)$ と $C_b(X,E)$ に置き換えれば, 定理 3 において X が k 空間であるという仮定が落とせることを証明した. ここで, $C_b(X,E)$ は空間 X から線型位相空間 E への有界連続関数全体の集合を表す.

Valov [14] による証明は, Arvanitakis による定理 3 の証明法とは異なる. 実際, Arvanitakis は, 定理 3 の (1.1) を満たす作用素を基本的な議論によって構成したのに対して, Valov は, Banakh [2] による確率測度の重心の存在定理, Repovš, Semenov, Shchepin [12] による Milutin 写像の存在定理, および Michael [9] の零次元選択定理を応用することによって定理 3 の (1.1) を満たす作用素を構成した.

一方, Repovš, Semenov, Shchepin [12] は, Milutin 写像の存在定理と Pettis 積分とよばれるベクトル値積分を用いることによって, Michael の選択定理 2 の別証明を与えた.

Valov による証明に基づき, 確率測度の重心の代わりに Pettis 積分を用いることによって, 一般に, 定理 3 の X が k 空間であるという仮定は不要であること, すなわち, 次が得られる.

定理 6. X をパラコンパクト空間, Y を完備距離化可能空間, $\Phi : X \to 2^Y$ を下半連続な集合値関数, E を完備な局所凸線型位相空間とする. このとき, (1.1) を満たす線型作用素 $S : C(Y,E) \to C(X,E)$ が存在する. さらに, $C(Y,E)$ と $C(X,E)$ がコンパクト開位相, 一様位相のいずれかの位相を共にもてば, S は連続である.

以下, 定理 6 の証明の概略を述べる. 空間 X の Stone-Čech コンパクト化を βX で表し, $P(\beta X)$ で βX 上の正則な Borel 確率測度全体を表す. ここで, βX 上の Borel 確率測度とは, βX の Borel 集合全体 $\mathscr{B}_{\beta X}$ 上で定義された σ-加法的で $\mu(\beta X) = 1$ を満たす測度 μ のことであり, Borel 確率測度 $\mu : \mathscr{B}_{\beta X} : X \to [0,1]$ が正則であるとは, 任意の Borel 集合 $B \in \mathscr{B}_{\beta X}$ に対して

$$\begin{aligned}\mu(B) &= \inf\{\mu(U) : U \text{ は } \beta X \text{ の開集合で } B \subset U\}\\ &= \sup\{\mu(F) : F \text{ は } \beta X \text{ の閉集合で } F \subset B\}\end{aligned}$$

であるときをいう. 空間 X の実数値有界連続関数全体からなる Banach 空間を $C_b(X)$ で表し, その双対空間を $C_b(X)^*$ で表す. このとき, $\mu \in P(\beta X)$ に対して写像 $L_\mu : C_b(X) \to \mathbb{R}$ を

$$L_\mu(f) = \int_{\beta X} \beta f \, d\mu, \quad f \in C_b(X)$$

で定める. ここで, βf は f の βX 上への唯一の連続拡張を表す. 写像 L_μ は連続かつ線型ゆえ $L_\mu \in C_b(X)^*$ である. さらに, 各 $\mu \in P(\beta X)$ が正則な測度である

ことを用いると, $P(\beta X)$ から $C_b(X)^*$ への対応 $\mu \mapsto L_\mu$ は単射であることがわかり, この対応で $P_\beta(X)$ は $C_b(X)^*$ 部分集合と思える. そこで, $C_b(X)^*$ が汎弱位相 (weak* topology) をもつときの相対位相として $P(\beta X)$ に位相を入れる. このとき, $\mu \in P(\beta X)$ における基本近傍は, $f_1, f_2, \ldots, f_n \in C_b(X)$, $\varepsilon > 0$ を用いて

$$\left\{\nu \in P(\beta X) : \left|\int_{\beta X} \beta f_i d\mu - \int_{\beta X} \beta f_i d\nu\right| < \varepsilon,\ i \in \{1, 2, \ldots, n\}\right\}$$

の形をしている.

測度 $\mu \in P(\beta X)$ の台 $\bigcap\{F : F$ は βX の閉集合で $\mu(\beta X \setminus F) = 0\}$ を $\operatorname{supp}\mu$ で表し, $P_\beta(X) = \{\mu \in P(\beta X) : \operatorname{supp}\mu \subset X\}$ とおく. ここで, $P_\beta(X)$ は $P(\beta X)$ の相対位相をもつとする. 空間 Z から空間 X への連続全射 $p : Z \to X$ が Milutin 写像であるとは, 各点 $x \in X$ に対して $\operatorname{supp}\nu(x) \subset p^{-1}(x)$ を満たす連続写像 $\nu : X \to P_\beta(Z)$ が存在するときをいう. 各点 $x \in X$ のファイバー $p^{-1}(x)$ がコンパクトな全射連続閉写像 $p : Z \to X$ を完全写像という. 空間 X が零次元であるとは, X の被覆次元が 0 であることを意味する. Repovš, Semenov, Shchepin は, 次を証明した.

定理 7 (Repovš, Semenov and Shchepin [12] (cf. [11, Theorem (3.9)])). 任意のパラコンパクト空間に対して, パラコンパクトな零次元空間 Z と完全な Milutin 写像 $p : Z \to X$ が存在する.

次が Michael の零次元選択定理である.

定理 8 (Michael [9]). X をパラコンパクトな零次元空間, Y を完備距離化可能空間, $\Phi : X \to 2^Y$ を閉集合を値としてとる下半連続な集合値関数とする. このとき, Φ の連続な選択関数が存在する.

また, 次が知られている.

定理 9 (cf. [13, Theorem 3.27], [5, §20, 6 (3)]). E を完備な局所凸線型位相空間 $f \in C(X, E)$, $\mu \in P_\beta(X)$ とし, C を $\operatorname{supp}\mu \subset C$ を満たす X のコンパクト集合とする. このとき, 次を満たす唯 1 つの点 $y_{f,\mu,C} \in \overline{\operatorname{conv}} f(C)$ $(\subset E)$ が存在する: 任意の $\lambda \in E^*$ に対して

$$\lambda(y_{f,\mu,C}) = \int_C (\lambda \circ f)\, d\mu.$$

この $y_{f,\mu,C}$ を μ による f の C における Pettis 積分といい, $\int_C f\, d\mu$ と表す.

定理 6 の証明の概略. Repovš, Semenov, Shchepin の定理 7 より, パラコンパクトな零次元空間 Z と完全な Milutin 写像 $p : Z \to X$ が存在する. Milutin 写像の定義から, 各点 $x \in X$ に対して $\operatorname{supp}\nu(x) \subset p^{-1}(x)$ を満たす連続写像 $\nu : X \to P_\beta(Z)$ が存在する.

集合値関数 $\varphi: Z \to \mathscr{F}(Y)$ を $\varphi(z) = \overline{\Phi(p(z))}$, $z \in Z$ で定める．このとき，φ は下半連続である．よって，Michael の零次元選択定理 8 より，φ の連続な選択関数 $g: Z \to Y$ が存在する．

ここで，$f \in C(Y, E)$ および $x \in X$ に対して，$\nu(x) \in P_\beta(Z)$, $\operatorname{supp}\nu(x) \subset p^{-1}(x) \subset Z$ かつ $p^{-1}(x)$ はコンパクトで $f \circ g \in C(Z, E)$ であることに注意して，

$$S(f)(x) = \int_{p^{-1}(x)} (f \circ g)\, d\nu(x) \ \ \big(\in \overline{\operatorname{conv}}(f \circ g)(p^{-1}(x))\big)$$

とおく．このとき $S(f) \in C(X, E)$ であり，$S: C(Y, E) \to C(X, E)$ は線型写像であることが確かめられる．また，$C(Y, E)$ と $C(X, E)$ がコンパクト開位相，一様位相のいずれかの位相を共にもてば，S が連続であることもわかる．さらに，

$$\begin{aligned}
S(f)(x) &\in \overline{\operatorname{conv}}(f \circ g)(p^{-1}(x)) & \\
&= \overline{\operatorname{conv}}\, f(g(p^{-1}(x))) & \\
&\subset \overline{\operatorname{conv}}\, f(\varphi(p^{-1}(x)) & (\because g(z) \in \varphi(z),\ \forall z \in Z) \\
&= \overline{\operatorname{conv}}\, f(\Phi(p(p^{-1}(x)))) & (\because \varphi(z) = \overline{\Phi(p(z))},\ \forall z \in Z) \\
&= \overline{\operatorname{conv}}\, f(\Phi(x)) & (\because p \text{ は全射}).
\end{aligned}$$

よって，S は求める線型作用素である．　□

定理 6 より，系 4 の X が k 空間であるという仮定が落とせる．さらに，X がパラコンパクトであるという仮定は，族正規[1]まで弱めることができ，Lutzer, Martin [6] の定理の類似が得られる． 以下，このことを示す．空間 Y の空でない閉集合全体の集合を $\mathscr{F}(Y)$ で，空でないコンパクト部分集合全体の集合を $\mathscr{C}(Y)$ で表し，$\mathscr{C}'(Y) = \mathscr{C}(Y) \cup \{Y\}$ とおく．

定理 10 (Choban and Nedev [3] (cf. [10, Lemma 3.6 and Theorem 5.1]).) X を族正規空間，Y を完備距離化可能空間，$\Phi: X \to \mathscr{C}'(Y)$ を下半連続な集合値関数とする．このとき，各点 $x \in X$ に対して $\varphi(g(x)) \subset \Phi(x)$ を満たす距離化可能空間 Z, 連続写像 $g: X \to Z$ および下半連続な集合値関数 $\varphi: Z \to \mathscr{C}(Y)$ が存在する．

系 11. X を族正規空間，Y を完備距離化可能空間，$\Phi: X \to \mathscr{C}'(Y)$ を下半連続な集合値関数，E を完備な局所凸線型位相空間とする．このとき，(1.1) を満たす線型作用素 $S: C(Y, E) \to C(X, E)$ が存在する．さらに，$C(Y, E)$ と $C(X, E)$ がコンパクト開位相，一様位相のいずれかの位相を共にもてば，S は連続である．

証明. Choban, Nedev の定理 11 より，各点 $x \in X$ に対して $\varphi(g(x)) \subset \Phi(x)$ をみたす距離化可能空間 Z, 連続写像 $g: X \to Z$ および下半連続な集合値関数 $\varphi: Z \to \mathscr{C}(Y)$ が存在する．集合値関数 $\varphi: Z \to 2^Y$ に定理 6 を適用すると，任意

[1]空間 X が族正規であるとは，任意の疎 (discrete) な X の閉集合族 $\mathscr{F}$ に対して $F \subset U_F$, $F \in \mathscr{F}$ を満たす X の互いに素 (disjoint) な開集合族 $\{U_F : F \in \mathscr{F}\}$ が存在することをいう．

の $f \in C(Y,E)$ および $z \in Z$ に対して $T(f)(z) \in \overline{\mathrm{conv}}\,(f(\varphi(z)))$ を満たす線型作用素 $T : C(Y,E) \to C(Z,E)$ が存在する．このとき，写像 $S : C(Y,E) \to C(X,E)$ を各 $f \in C(Y,E)$ に対して $S(f) = T(f) \circ g$ で定めれば，この S が求める線型作用素である． □

系 4 の証明において，定理 3 の替わりに定理 12 を適用することにより，次を得る．

系 12. X を族正規空間，A を完備距離化可能な X の閉部分空間，E を完備な局所凸線型位相空間とする．このとき，次の条件を満たす線型作用素 $S : C(A,E) \to C(X,E)$ が存在する：任意の $f \in C(A,E)$ に対して，$S(f)$ は f の拡張であり，$S(f)(X) \subset \overline{\mathrm{conv}}\, f(A)$．さらに，$C(A,E)$ と $C(X,E)$ がコンパクト開位相，一様位相のいずれかの位相を共にもてば，S は連続である．

References

[1] A. Arvanitakis, *A simultaneous selection theorem*, Fund. Math. **219** (2012), 1–14.

[2] T. Banakh, *Topology of spaces of probability measures II: Barycenters of probability Radon measures and metrization of the functors P_τ and $\hat{P}$*, Mat. Stud. **5** (1995), 88–106 (in Russian).

[3] M. Choban and S. Nedev, *Factorization theorems for set-valued mappings, set-valued selections and topological dimension*, Math. Balkanica **4** (1974), 457–460, (in Russian).

[4] J. Dugundji, *An extension of Tietze's theorem*, Pacific J. Math. **1** (1951), 353–367.

[5] G. Köthe, *Topological vector spaces I*, Springer-Verlag, New York, 1969.

[6] D. Lutzer and H. Martin, *A note on the Dugundji extension theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **45** (1974), 137–139.

[7] E. Michael, *Some extension theorems for continuous functions*, Pacific J. Math. **3** (1953), 789–806.

[8] ———, *Continuous selections I*, Ann. of Math. **63** (1956), 361–382.

[9] ———, *Selected selection theorems*, Amer. Math. Monthly **63** (1956), 233–238.

[10] S. Nedev, *Selection and factorization theorems for set-valued mappings*, Serdica **6** (1980), 291–317.

[11] D. Repovš and P. V. Semenov, *Continuous selections of multivalued mappings*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

[12] D. Repovš, P. V. Semenov and E. V. Shchepin, *On zero-dimensional Milutin maps and Michael selection theorems*, Topology Appl. **54** (1993), 77–83.

[13] W. Rudin, *Functional analysis, second edition*, McGraw-Hill, New York, 1991.

[14] V. Valov, *On a theorem of Arvanitakis*, Mathematika, to appear.