数理解析研究所講究録
第 1837 巻 2013 年 132-141

Hardy type inequalities with scale invariance in limiting cases

愛媛大学大学院理工学研究科　猪奥倫左
Norisuke Ioku
Graduate School of Science and Engineering, Ehime University,
Matsuyama, Ehime 790-8577, Japan

Hardy の不等式はポテンシャル項つき偏微分方程式を解析する際に基礎となる関数不等式であり, その重要性とそれ自身の興味深さから, 現在でも盛んに研究されている. 本稿では 1,2 章で通常の Hardy の不等式及び臨界 Hardy の不等式について概説し, 3 章においてスケール不変性を持つ全空間臨界 Hardy の不等式に対する結果を述べる.

1　Hardyの不等式 ($1 \leq p < n$)

本節では古典的な Hardy の不等式とその証明, および Sobolev の埋め込み定理との関連性について述べる.

命題 1.1 (Hardy の不等式). $1 \leq p < n$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ とする. このとき,

$$\left(\frac{n-p}{p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|^p}{|x|^p} dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p dx \tag{1.1}$$

が成り立つ. また, $\left(\frac{n-p}{p}\right)^p$ は最良定数である.

ここではスケール変換と微分積分学の基本定理を用いる証明, 及び再配列関数を用いる証明の二通りを紹介する.

1.1 スケール変換と微分積分学の基本定理を用いる証明

命題 1.1 の証明. ここでの証明は Peral-Vazquez [25] Lemma 4.1 の方法による. 稠密性から $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ として良い. このとき, 微分積分学の基本定理から

$$|u(x)|^p = -\int_1^\infty \frac{d}{d\lambda}|u(\lambda x)|^p = -p\int_1^\infty |u(\lambda x)|^{p-2}u(\lambda x)\,(x\cdot\nabla u(\lambda x))\,d\lambda$$

となる. 従って, 変数変換と Hölder の不等式から

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(x)|^p}{|x|^p}dx &= -p\int_1^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(\lambda x)|^{p-2}u(\lambda x)}{|x|^{p-1}}\left(\frac{x}{|x|}\cdot\nabla u(\lambda x)\right)dxd\lambda\\
&= -p\int_1^\infty\frac{1}{\lambda^{n-p-1}}d\lambda\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(y)|^{p-2}u(y)}{|y|^{p-1}}\left(\frac{y}{|y|}\cdot\nabla u(y)\right)dy\\
&= -\frac{p}{n-p}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(y)|^{p-2}u(y)}{|y|^{p-1}}\left(\frac{y}{|y|}\cdot\nabla u(y)\right)dy\\
&\le \frac{p}{n-p}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(y)|^p}{|y|^p}dy\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

が成り立つ. 最後に両辺を $\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|u(y)|^p}{|y|^p}dy\right)^{1-\frac{1}{p}}$ で割って p 乗すると, 求める不等式を得る. 定数の最良性については, 関数列

$$u_k(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{n-2+\frac{2}{k}}, & 0\le |x|\le 1,\\[2ex] \dfrac{2}{n-2+\frac{2}{k}}|x|^{-\frac{n-2}{2}-\frac{1}{k}}, & 1<|x|,\end{cases}$$

を不等式 (1.1) に代入し, $k\to\infty$ とすることで確認できる. □

注意 1.1. *Hardy* の不等式の最良定数 $\left(\frac{n-p}{p}\right)^p$ は $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ においては達成されないことが知られている. このことは, 剰余項を加えることによって *Hardy* の不等式が改良できることを示唆している. 剰余項に関する研究及び *Hardy* の不等式の様々な一般化は, 例えば [1, 2, 4–6, 9–12, 14–19, 21, 27, 29] などを参照されたい. また, *Hardy* の不等式の歴史的背景や関連する話題は [13, 24] に詳しい.

1.2 再配列の理論と Polya-Szegö の不等式を用いる証明

別証明として, 再配列の理論を用いて議論を一次元化する方法が知られている. このとき, 後に述べる Polya-Szegö の不等式が本質的に重要な役割を担う.

ϕを$\mathbb{R}^n$上の可測関数とする. ϕの分布関数を

$$\mu(\lambda) := |\{x : |\phi(x)| > \lambda\}|, \qquad \lambda \geq 0,$$

とし,

$$\phi^\sharp(r) := \inf\{\lambda > 0 : \mu(\lambda) \leq |B_r|\}$$

と定め, $\phi^\sharp(|x|)$を関数ϕの球対称再配列関数と呼ぶ. ここでB_rは原点中心で半径がrの球とし, $|B_r|$はLebesgue測度とする. 球対称再配列関数に対して次が知られている.

命題 1.2. f, gを$\mathbb{R}^n$上の可測関数とし, $f^\sharp, g^\sharp$をその球対称再配列関数とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) $f^\sharp$は球対称, 動径方向に単調非増加である.

(2) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} f^\sharp(|x|)g^\sharp(|x|)dx$ が成り立つ.

(3) *Polya-Szegö*の不等式. $1 \leq p < \infty$とする. このとき, 任意の$f \in \dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$に対して

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f^\sharp(|x|)|^p dx$$

が成り立つ.

(1), (2) の証明及び更に一般的な性質はLieb-Loss [22] Section3, (3) Polya-Szegöの不等式の証明は例えばTalenti[26]を参照. $p = 2$の場合には, 熱核を用いた証明が知られている（例えばLieb-Loss [22] Section 7.17, 堤誉志雄 [28] A5節参照）.

さて, 命題1.2(1), (2)から, Hardyの不等式(1.1)は球対称再配列関数に対してのみ示せば十分である事がわかる. よってここでは

$$\left(\frac{n-p}{p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^\sharp(|x|)^p}{|x|^p} dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u^\sharp(|x|)|^p dx \tag{1.2}$$

を証明する.

球対称再配列関数に対するHardyの不等式 (1.2) **の証明.**

軟化子ρ_kを

$$\rho_k(x) := \begin{cases} Ck^n \exp\left(-\dfrac{1}{1-k^2|x|^2}\right), & |x| < \dfrac{1}{k}, \\ 0, & |x| \geq \dfrac{1}{k}, \end{cases}$$

で定める. ここで C は $\|\rho_k\|_{L^1}=1$ とするための正規化定数である. このとき, ρ_k は球対称, 動径方向に単調非増加であるから $u^\sharp$ と ρ_k の合成積も球対称, 動径方向に単調非増加である. よって稠密性の議論から $u^\sharp \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ に対して (1.2) を示せば十分である. さて, ω_n を $n-1$ 次元球面の表面積とすると, 極座標変換と Hölder の不等式を用いて

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^\sharp(|x|)^p}{|x|^p}dx &= \omega_n \int_0^\infty r^{n-1-p}u^\sharp(r)^p dr \\
&= \left[\frac{\omega_n}{n-p}r^{n-p}u^\sharp(r)^p\right]_0^\infty + \omega_n \frac{p}{n-p}\int_0^\infty r^{n-p}u^\sharp(r)^{p-1}\left(-\frac{du^\sharp}{dr}\right)dr \\
&\le \omega_n \frac{p}{n-p}\left(\int_0^\infty r^{n-1}\frac{u^\sharp(r)^p}{r^p}dr\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty r^{n-1}\left(-\frac{du^\sharp}{dr}\right)^p dr\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{p}{n-p}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u^\sharp(|x|)^p}{|x|^p}dx\right)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\nabla u^\sharp(|x|)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

が成り立つ. 最後に両辺を $\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{u^\sharp(|x|)^p}{|x|^p}dx\right)^{1-\frac{1}{p}}$ で割って p 乗すればよい. $\square$

1.3 Sobolev の埋め込み定理との関連

球対称再配列関数に対する Hardy の不等式 (1.2) は Lorentz norm を用いて表現することができる. ここで Lorentz norm とは

$$
\|u\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(|x|^{\frac{n}{p}}u^\sharp(|x|)\right)^q \frac{dx}{|x|^n}\right)^{\frac{1}{q}}, & 1\le p<\infty, 1\le q<\infty, \\ \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x|^{\frac{n}{p}}u^\sharp(|x|), & 1\le p\le\infty, q=\infty \end{cases}
$$

で定義され, これから定まる Lorentz 空間は Lebesgue 空間の実補間空間として現れることが知られている (Bergh-Löfström [8] Theorem5.2.1, 参照). Lorentz 空間の基本性質として,

(1) 第二指数に関する単調性

$$1\le p<\infty, 1\le\alpha\le\beta\le\infty \Rightarrow L^{p,\alpha}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow L^{p,\beta}(\mathbb{R}^n),$$

(2) Lebesgue 空間との同値性

$$L^{p,p}(\mathbb{R}^n)=L^p(\mathbb{R}^n),$$

が知られている（例えば Ziemer [30]Lemma 1.8.13 参照）.

さて, この Lorentz norm を用いると, Hardy の不等式 (1.2) の左辺は

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^\sharp(|x|)^p}{|x|^p} dx = \|u\|^p_{L^{p^*,p}(\mathbb{R}^n)}$$

と書ける. ここで p^* は指数 p に対するソボレフ指数 $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ である. 以上から, Hardy の不等式 (1.2) は Lorentz 空間における Sobolev の埋め込み

$$\dot{W}^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p^*,p}(\mathbb{R}^n)$$

と表すことができる. ここで $p^* > p$ に注意すると, 基本性質の (1), (2) から

$$L^{p^*,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$$

が成り立つ. この意味で, Hardy の不等式 (1.2) は Sobolev の埋め込み定理の改良となっていることがわかる.

2 Hardy の不等式 ($p = n$)

本節では $p = n$ の場合における Hardy の不等式および, Sobolev の埋め込み定理との関連性について述べる. 指数が $p = n$ の場合, ポテンシャル項 $1/|x|^n$ の原点での特異性が強過ぎるため, 通常の Hardy の不等式 (1.1) は成立しない. この場合には, 次のように対数型の補正項を用いた Hardy の不等式が知られている.

命題 2.1. Ω を $\mathbb{R}^n$ 上の原点を含む有界領域とし, $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$ とする. このとき,

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^n \int_\Omega \frac{|u(x)|^n}{|x|^n \left(\log \frac{e\tilde{R}}{|x|}\right)^n} dx \le \int_\Omega |\nabla u(x)|^n dx \tag{2.1}$$

が成り立つ. ここで $\tilde{R} = \sup_{x\in\Omega} |x|$ である. また, 左辺の定数 $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$ は最良である.

命題 2.1 は (1.2) の証明と同様に, 再配列関数と Polya-Szegö の不等式を用いて議論を一次元化した後に, 部分積分と Hölder の不等式を組み合わせる事で証明できる.

本稿では $1 \le p < n$ の場合を劣臨界, $p = n$ の場合を臨界 Hardy の不等式と呼ぶ. 劣臨界の場合と同様に, 臨界 Hardy の不等式は Sobolev の埋め込み定理（$p = n$ の場合は Trudinger の不等式）を導く事が知られている.

系 2.2. 命題 *2.1* と同じ仮定のもと, 以下が成り立つ. 正定数 $\alpha, C > 0$ が存在して,

$$\int_\Omega \exp\left(\frac{\alpha|u(x)|}{\|\nabla u\|_{L^n}}\right)^{\frac{n}{n-1}} dx \le C|\Omega| \tag{2.2}$$

が成立する.

系 2.2 の証明. Polya-Szegö の不等式から, $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$ ならば $u^\sharp \in W_0^{1,n}(\Omega)$ である. よって命題 2.1 と Polya-Szegö の不等式から

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^n \int_{B_R} \frac{|u^\sharp(|x|)|^n}{|x|^n\left(\log\frac{eR}{|x|}\right)^n} dx \le \int_{B_R} |\nabla u^\sharp(|x|)|^n dx \le \int_{B_R} |\nabla u(x)|^n dx$$

が成り立つ. ここで B_R は Ω と同じ測度を持つ原点中心半径 R の球である. 一方,

$$\begin{aligned}(u^\sharp(r))^n &= (n-1)(u^\sharp(r))^n\left(\int_0^r \frac{1}{s\left(\log\frac{eR}{s}\right)^n} ds\right)\left(\log\frac{eR}{r}\right)^{n-1} \\ &\le (n-1)\left(\int_0^r \frac{u^\sharp(s)^n}{s\left(\log\frac{eR}{s}\right)^n} ds\right)\left(\log\frac{eR}{r}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

から, ある正定数 C' に対して

$$u^\sharp(r) \le C'\|\nabla u\|_{L^n}\left(\log\frac{eR}{r}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

が成立. よって, 球対称再配列の性質から,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \exp\left(\frac{\alpha|u(x)|}{\|\nabla u\|_{L^n}}\right)^{\frac{n}{n-1}} dx &= \int_{B_R} \exp\left(\frac{\alpha|u^\sharp(|x|)|}{\|\nabla u\|_{L^n}}\right)^{\frac{n}{n-1}} dx \\ &\le \int_{B_R} \exp\left(\frac{\alpha C'\|\nabla u\|_{L^n}\left(\log\frac{eR}{|x|}\right)^{\frac{n-1}{n}}}{\|\nabla u\|_{L^n}}\right)^{\frac{n}{n-1}} dx \\ &= \int_{B_R} \left(\frac{eR}{|x|}\right)^{(\alpha C')^{\frac{n}{n-1}}} dx \le C|\Omega|\end{aligned}$$

が成り立つ. 最後の積分が収束するように α を適当に選べばよい. □

3 全空間における Hardy の不等式 ($p = n$)

臨界 Hardy の不等式を考える場合には, 対数補正項がスケール不変性を持たないことから, (2.1) を全空間に拡張することは難しいと思われる. そこで全空間版の臨界 Hardy

の不等式を考察するために, 対数補正項の代わりに再配列関数の平均振動を用いる. 球対称再配列関数 $u^\sharp$ の $B_r(=B_r(0))$ 上での積分平均を

$$u^{\sharp\sharp}(r) := \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} u^\sharp(|y|)dy = \frac{n}{r^n}\int_0^r s^{n-1}u^\sharp(s)ds$$

と定める. 第二式は極座標変換を用いて一変数の積分で表示したものである. さらに, $u^{\sharp\sharp}(|x|)-u^\sharp(|x|)$ を $u^\sharp$ の平均振動と呼ぶ. これを用いて次の全空間における Hardy 型の不等式が成り立つ事が知られている.

命題 3.1. (Bastero-Milman-Ruiz Blasco[7])
$u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき,

$$(n-1)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\left(u^{\sharp\sharp}(|x|)-u^\sharp(|x|)\right)^n}{|x|^n}dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u^\sharp(|x|)|^n dx \tag{3.1}$$

が成り立つ.

命題 3.1 と関連する Sobolev の埋め込み定理の関係は論文 [7] を参照されたい. 命題 3.1 は, 平均振動の各点評価と積分平均に対する不等式から直ちに導かれる.

命題 3.2 (Alvino-Trombetti-Lions [3], Kolyada[21]).
$u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき, 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$u^{\sharp\sharp}(|x|)-u^\sharp(|x|) \leq \frac{|x|}{n}\left(\nabla u^\sharp\right)^{\sharp\sharp}(|x|)$$

が成り立つ.

命題 3.2 の証明. 証明は部分積分による. $u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ とすると,

$$\begin{aligned}
u^{\sharp\sharp}(r) &= u^\sharp(r) + \frac{1}{r^n}\int_0^r s^n(-(u^\sharp)'(s))ds \\
&\leq u^\sharp(r) + \frac{r}{n}\frac{n}{r^n}\int_0^r s^{n-1}(-(u^\sharp)'(s))ds \\
&= u^\sharp(r) + \frac{r}{n}\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} \nabla u^\sharp(|y|)dy \\
&\leq u^\sharp(r) + \frac{r}{n}\left(\nabla u^\sharp\right)^{\sharp\sharp}(r)
\end{aligned}$$

が成り立つ. □

命題 3.1 の証明. 命題 3.2 と積分平均に対する不等式

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(f^{\sharp\sharp}(|x|)\right)^n dx \le \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \int_{\mathbb{R}^n} \left(f^{\sharp}(|x|)\right)^n dx$$

から直ちに導かれる. □

論文 [7] において, 命題 3.1 の系として対数補正項付き Hardy の不等式および Trudinger の不等式が導かれている. しかし, 命題 3.1 の定数 $(n-1)^n$ は最良ではないために, 最良定数込みの対数補正項付き Hardy の不等式 (2.1) は導く事が出来ない. 本研究においては全空間臨界 Hardy 型不等式の最良定数を求め, さらにそこから最良定数込みの対数補正項付き Hardy の不等式 (2.1) が系として得られる事を示した.

定理 3.3 (I. [20]). 不等式 (3.1) の最良定数は n^n である.

定理 3.3 と同様に, 平均振動を用いた臨界 Hardy の不等式は有界領域上でも考察可能である.

定理 3.4 (I. [20]). Ω を $\mathbb{R}^n$ 上の有界領域とし, B_R を Ω と同じ測度を持つ原点中心の球とする. このとき, 任意の $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$ に対して

$$n^n \int_{B_R} \frac{\left(u^{\sharp\sharp}(|x|) - u^{\sharp}(|x|)\right)^n}{|x|^n} dx + n^{n-1}\omega_n \left(\frac{\|u\|_{L^1(\Omega)}}{|\Omega|}\right)^n \le \int_\Omega |\nabla u(x)|^n dx$$

が成立する. また, 定数 n^n は最良定数である.

また, 以下の命題と定理 3.4 の直接的な系として, 対数補正項を用いた臨界 Hardy の不等式が最良定数込みで得られる.

命題 3.5. 定理 *3.4* と同じ仮定のもと,

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^n \int_{B_R} \frac{\left(u^{\sharp\sharp}(|x|)\right)^n}{|x|^n \left(\log \frac{eR}{|x|}\right)^n} dx$$
$$\le \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} \omega_n \left(\frac{\|u\|_{L^1(\Omega)}}{|\Omega|}\right)^n + n^n \int_{B_R} \frac{\left(u^{\sharp\sharp}(|x|) - u^{\sharp}(|x|)\right)^n}{|x|^n} dx$$

が成り立つ.

証明は [20] を参照されたい.

参考文献

[1] Adimurthi, Nirmalendu Chaudhuri, and Mythily Ramaswamy, *An improved Hardy-Sobolev inequality and its application*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), no. 2, 489–505 (electronic), DOI 10.1090/S0002-9939-01-06132-9. MR **1862130** (**2002j**:35232)

[2] Adimurthi, Stathis Filippas, and Achilles Tertikas, *On the best constant of Hardy-Sobolev inequalities*, Nonlinear Anal. **70** (2009), no. 8, 2826–2833, DOI 10.1016/j.na.2008.12.019. MR **2509370** (**2010f**:35008)

[3] A. Alvino, G. Trombetti, and P.-L. Lions, *On optimization problems with prescribed rearrangements*, Nonlinear Anal. **13** (1989), no. 2, 185–220, DOI 10.1016/0362-546X(89)90043-6. MR **979040** (**90c**:90236)

[4] Angelo Alvino, Roberta Volpicelli, and Bruno Volzone, *On Hardy inequalities with a remainder term*, Ric. Mat. **59** (2010), no. 2, 265–280, DOI 10.1007/s11587-010-0086-5. MR **2738657** (**2012c**:35011)

[5] ———, *A remark on Hardy type inequalities with remainder terms*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S **4** (2011), no. 4, 801–807, DOI 10.3934/dcdss.2011.4.801. MR **2746442** (**2011k**:35005)

[6] G. Barbatis, S. Filippas, and A. Tertikas, *Series expansion for L^p Hardy inequalities*, Indiana Univ. Math. J. **52** (2003), no. 1, 171–190, DOI 10.1512/iumj.2003.52.2207. MR **1970026** (**2005b**:46066)

[7] Jesús Bastero, Mario Milman, and Francisco J. Ruiz Blasco, *A note on $L(\infty, q)$ spaces and Sobolev embeddings*, Indiana Univ. Math. J. **52** (2003), no. 5, 1215–1230, DOI 10.1512/iumj.2003.52.2364. MR **2010324** (**2004h**:46025)

[8] Jöran Bergh and Jörgen Löfström, *Interpolation spaces. An introduction*, Springer-Verlag, Berlin, 1976. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223. MR 0482275 (58 #2349)

[9] Haim Brezis and Juan Luis Vázquez, *Blow-up solutions of some nonlinear elliptic problems*, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid **10** (1997), no. 2, 443–469. MR **1605678** (**99a**:35081)

[10] Haïm Brezis and Moshe Marcus, *Hardy's inequalities revisited*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **25** (1997), no. 1-2, 217–237 (1998). Dedicated to Ennio De Giorgi. MR **1655516** (**99m**:46075)

[11] Andrea Cianchi and Adele Ferone, *Hardy inequalities with non-standard remainder terms*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **25** (2008), no. 5, 889–906, DOI 10.1016/j.anihpc.2007.05.003 (English, with English and French summaries). MR **2457816** (**2009g**:26023)

[12] ———, *Best remainder norms in Sobolev-Hardy inequalities*, Indiana Univ. Math. J. **58** (2009), no. 3, 1051–1096, DOI 10.1512/iumj.2009.58.3561. MR **2541359** (**2010h**:42045)

[13] E. B. Davies, *A review of Hardy inequalities*, The Maz′ya anniversary collection, Vol. 2 (Rostock, 1998), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 110, Birkhäuser, Basel, 1999, pp. 55–67. MR **1747888** (**2001f**:35166)

[14] Alnar Detalla, Toshio Horiuchi, and Hiroshi Ando, *Missing terms in Hardy-Sobolev inequalities and its application*, Far East J. Math. Sci. (FJMS) **14** (2004), no. 3, 333–359. MR **2108051** (**2005h**:26027)

[15] ———, *Sharp remainder terms of Hardy-Sobolev inequalities*, Math. J. Ibaraki Univ. **37** (2005), 39–52, DOI 10.5036/mjiu.37.39. MR **2207669 (2006k:**46047)

[16] Stathis Filippas and Achilles Tertikas, *Optimizing improved Hardy inequalities*, J. Funct. Anal. **192** (2002), no. 1, 186–233, DOI 10.1006/jfan.2001.3900. MR **1918494 (2003f:**46045)

[17] S. Filippas, V. Maz′ya, and A. Tertikas, *Critical Hardy-Sobolev inequalities*, J. Math. Pures Appl. (9) **87** (2007), no. 1, 37–56, DOI 10.1016/j.matpur.2006.10.007 (English, with English and French summaries). MR **2297247 (2008c:**26018)

[18] Filippo Gazzola, Hans-Christoph Grunau, and Enzo Mitidieri, *Hardy inequalities with optimal constants and remainder terms*, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004), no. 6, 2149–2168 (electronic), DOI 10.1090/S0002-9947-03-03395-6. MR **2048513 (2005c:**26031)

[19] Nassif Ghoussoub and Amir Moradifam, *On the best possible remaining term in the Hardy inequality*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **105** (2008), no. 37, 13746–13751, DOI 10.1073/pnas.0803703105. MR **2443723 (2009i:**26031)

[20] N. Ioku, *On the best constant for the Hardy inequality in the limiting case with scale invariance*, preprint.

[21] V. I. Kolyada, *Rearrangements of functions, and embedding theorems*, Uspekhi Mat. Nauk **44** (1989), no. 5(269), 61–95, DOI 10.1070/RM1989v044n05ABEH002287 (Russian); English transl., Russian Math. Surveys **44** (1989), no. 5, 73–117. MR **1040269 (91i:**46029)

[22] Elliott H. Lieb and Michael Loss, *Analysis*, 2nd ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 14, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. MR **1817225 (2001i:**00001)

[23] S. Machihara, T. Ozawa, and H. Wadade, *Generalizations of the logarithmic Hardy inequality in critical Sobolev-Lorentz spaces*, preprint.

[24] B. Opic and A. Kufner, *Hardy-type inequalities*, Pitman Research Notes in Mathematics Series, vol. 219, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1990. MR **1069756 (92b:**26028)

[25] I. Peral and J. L. Vázquez, *On the stability or instability of the singular solution of the semilinear heat equation with exponential reaction term*, Arch. Rational Mech. Anal. **129** (1995), no. 3, 201–224, DOI 10.1007/BF00383673. MR **1328476 (96b:**35023)

[26] Giorgio Talenti, *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **110** (1976), 353–372. MR 0463908 (57 #3846)

[27] Jesper Tidblom, *A Hardy inequality in the half-space*, J. Funct. Anal. **221** (2005), no. 2, 482–495, DOI 10.1016/j.jfa.2004.09.014. MR **2124873 (2005k:**26064)

[28] 堤誉志雄, 偏微分方程式論 基礎から展開へ, 数学レクチャーノート基礎編 3, 培風館, 2004.

[29] Juan Luis Vazquez and Enrike Zuazua, *The Hardy inequality and the asymptotic behaviour of the heat equation with an inverse-square potential*, J. Funct. Anal. **173** (2000), no. 1, 103–153, DOI 10.1006/jfan.1999.3556. MR **1760280 (2001j:**35122)

[30] William P. Ziemer, *Weakly differentiable functions*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 120, Springer-Verlag, New York, 1989. Sobolev spaces and functions of bounded variation. MR **1014685 (91e:**46046)