数理解析研究所講究録
第 1839 巻 2013 年 25-30

An example of an m-isometry

神奈川大学　長　宗雄, Muneo Chō, Kanagawa University
九州大学　太田昇一, Schôichi Ôta, Kyushu University
東北薬科大学　棚橋浩太郎, Kotaro Tanahashi,
Tohoku Pharmaceutical University

1. 概要

本論の目的は、ある可逆な $(m+1)$-isometry 作用素の中で m-isometry にならない作用素の例を構成することである。

2. 歴史

ヒルベルト空間上の isomery ($T^*T = I$) は基本的な作用素の 1 つで、その構造については Wold 分解が知られている。m-isometry の研究は J. Agler, M. Stankus (1995) [1,2,3] によって精力的になされた。次がその定義である。

[定義] ヒルベルト空間上の作用素 T が m-isometry であるとは

$$0 = B_m(T)$$
$$= T^{*m}T^m - \binom{m}{1} T^{*(m-1)}T^{m-1} + \binom{m}{2} T^{*(m-2)}T^{m-2} - \cdots + (-1)^m I.$$

従って 1-isometry なら

$$B_1(T) = T^*T - I = 0$$

なので isometry に一致する。よって m-isometry は isometry の一般化であるが、より一般に次がわかっている。([1, 2, 3])

[命題 1]

T が m-isometry なら T は $(m+1)$-isometry である。

[証明]

$$B_{m+1}(T) = T^*B_m(T)T - B_m(T) = 0.$$

本論はこの逆を考えるが、一般に逆は成立しない。

[反例 2] (A. Athavale 1991 [4])

ヒルベルト空間 $\ell^2(\mathbb{N})$ 上の weighted unilateral shift を

$$Te_n = w_n e_{n+1}, \quad w_n = \sqrt{\frac{n+m}{n}} \text{ for } n = 1, 2, 3, \cdots$$

と定める。このとき T は $(m+1)$-isometry であるが m-isometry ではない。

例えば $m=1$ の場合

$$T=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \\ \sqrt{\frac{2}{1}} & 0 & 0 & \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{4}{3}} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

とおくと

$$B_1(T)=T^*T-I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}\neq 0$$

であるが

$$B_2(T)=T^*T^*TT-2T^*T+I$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{3}{1} & 0 & 0 & \\ 0 & \frac{4}{2} & 0 & \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} \frac{2}{1} & 0 & 0 & \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}=0$$

である。従って T は 2-isometry であるが 1-isometry ではない。この他の性質として次が知られている。([1, 2, 3])

[命題 3]

(1) T が m-isometry なら、近似点スペクトルは $\sigma_a(T)\subset\{z:|z|=1\}$ である。よって T が可逆でないなら $\sigma(T)=\{z:|z|\leq 1\}$ で、可逆なら $\sigma(T)\subset\{z:|z|=1\}$ となる。

(2) T が m-isomery なら $B_{m-1}(T)\geq 0$ である。

さて命題 1 の逆問題に戻る、反例 2 の作用素は unilateral shift なので可逆ではない。可逆という条件を加えると次が成立する。([1, 2, 3])

[定理 4]

T が可逆な m-isomery で m が偶数なら T は $(m-1)$-isomery である。

従って、可逆な 2-isometry は 1-isomery になる。次に m が奇数ならこの結果が成立するかという問題を考える。とりあえず可逆な 3-isometry

は 2-isometry になるかを調べる。この問題に対し太田が次のような解答を与えた。

[反例 5] (太田 2011)
ヒルベルト空間 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上の weighted bilateral shift を

$$Te_n = w_n e_{n+1}, \quad w_n = \sqrt{\frac{|n|+3}{|n|+1}} \text{ for } n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

と定める。このとき T は可逆な 3-isometry であるが 2-isometry ではない。

本論では一般の偶数 m について、可逆な $(m+1)$-isometry であるが m-isometry ではない例を構成する。なお、詳しくは [5] を参照して欲しい。

3. 主結果

[定理 6]
偶数 m と定数 $a > 0$ に対して関数

$$\phi(x) = x(x+1)(x+2)\cdots(x+m-1)$$

を考える。ここで $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上の weighted bilateral shift $Te_n = w_n e_{n+1}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ を

$$w_n = \sqrt{\frac{\phi(n+1)+a}{\phi(n)+a}} = \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)+a}{n(n+1)\cdots(n+m-1)+a}}$$

とおくと T は可逆な $(m+1)$-isometry であるが m-isometry でない。

[証明]
関数 $\phi(x)$ は偶関数なのですべての整数 n に対して

$$\phi(n) + a \geqq 0 + a > 0$$

となることに注意する。weight を計算すると

$$w_n = \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)+a}{n(n+1)\cdots(n+m-1)+a}} \to 1 \quad (n \to \pm\infty)$$

となるので $\sigma(T) = \{z : |z| = 1\}$ である。よって T は可逆である。
定義から T が m-isometry になる必要十分条件は $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ に対して

$$0 = I_{m,n} = w_n^2 w_{n+1}^2 \cdots w_{n+m}^2 - \binom{m+1}{1} w_n^2 w_{n+1}^2 \cdots w_{n+m-1}^2$$
$$+ \binom{m+1}{2} w_n^2 w_{n+1}^2 \cdots w_{n+m-2}^2 + \cdots + (-1)^m \binom{m+1}{m} w_n^2 + (-1)^{m+1}$$

となることがわかる。従って $I_{m+1,n} = 0, I_{m,n} \neq 0$ を示せばよい。

まず $I_{m+1,n}=0$ を示す。そのために

$$f(x)=x^{n+m-1}(x-1)^{m+1}$$

を考える。ライプニッツの公式から

$$f^{(m)}(x)=\left(x^{n+m-1}\right)^{(m)}(x-1)^{m+1}+\binom{m}{1}\left(x^{n+m-1}\right)^{(m-1)}\left((x-1)^{m+1}\right)^{(1)}$$
$$+\cdots+x^{n+m-1}\left((x-1)^{m+1}\right)^{(m)}$$

となるが

$$\left((x-1)^{m+1}\right)^{(m)}=(m+1)m\cdots 2(x-1)$$

なので $f^{(m)}(1)=0$ がわかる。一方、2項展開して

$$f(x)=x^{n+2m}-\binom{m+1}{1}x^{n+2m-1}+\cdots+(-1)^{m+1}x^{n+m-1}$$

を m 回微分することにより

$$\begin{aligned}f^{(m)}(1)&=(n+2m)(n+2m-1)\cdots(n+m+1)\\&\quad-\binom{m+1}{1}(n+2m-1)(n+2m-2)\cdots(n+m)\\&\quad+\cdots+(-1)^{m+1}(n+m-1)(n+m-2)\cdots n\end{aligned}$$

となる。分母をはらうと

$$\begin{aligned}I_{m+1,n}(\phi(n)+a)&=(n+2m)(n+2m-1)\cdots(n+m+1)+a\\&\quad-\binom{m+1}{1}\{(n+2m-1)(n+2m-2)\cdots(n+m)+a\}\\&\quad+\cdots+(-1)^{m+1}\{(n+m-1)(n+m-2)\cdots n+a\}\\&=f^{(m)}(1)+a(1-1)^{m+1}=0\end{aligned}$$

が得られる。よって $I_{m+1,n}=0$ である。

次に $I_{m,n}\neq 0$ を示す。そのために $g(x)=x^{n+m-1}(x-1)^m$ を考える。ライプニッツの公式から

$$g^{(m)}(x)=\left(x^{n+m-1}\right)^{(m)}(x-1)^{m}+\binom{m}{1}\left(x^{n+m-1}\right)^{(m-1)}\left((x-1)^{m}\right)^{(1)}$$
$$+\cdots+x^{n+m-1}\left((x-1)^{m}\right)^{(m)}$$

となるが

$$\left((x-1)^{m}\right)^{(m)}=m!$$

なので $g^{(m)}(1)=m!$ がわかる。一方、2項展開して

$$g(x)=x^{n+2m-1}-\binom{m}{1}x^{n+2m-2}+\cdots+(-1)^{m}x^{n+m-1}$$

を m 回微分することにより

$$\begin{aligned} g^{(m)}(1) &= (n+2m-1)(n+2m-2)\cdots(n+m) \\ &\quad - \binom{m}{1}(n+2m-2)(n+2m-3)\cdots(n+m-1) \\ &\quad + \cdots + (-1)^m(n+m-1)(n+m-2)\cdots n \end{aligned}$$

となる。分母をはらうと

$$\begin{aligned} I_{m,n}(\phi(n)+a) &= (n+2m-1)(n+2m-2)\cdots(n+m)+a \\ &\quad - \binom{m}{1}\{(n+2m-2)(n+2m-3)\cdots(n+m-1)+a\} \\ &\quad + \cdots + (-1)^m\{(n+m-1)(n+m-2)\cdots n+a\} \\ &= g^{(m)}(1)+a(1-1)^m = m! \neq 0 \end{aligned}$$

が得られる。よって $I_{m,n} \neq 0$ である。

[注意]

$\ell^2(\mathbb{N})$ 上の unilateral shit としたら、この例は可逆でない $(m+1)$-isometry であるが m-isometry にならない例である。更に $a=0$ とおくと

$$w_n = \sqrt{\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)+0}{n(n+1)\cdots(n+m-1)+0}} = \sqrt{\frac{n+m}{n}}$$

となる。これは Athavale による反例 2 である。

References

[1] J. Agler and M. Stankus, *m-Isometric transformations of Hilbert space I,* Integr. Equat. Oper. Theory, **21**(1995), 387-429.

[2] J. Agler and M. Stankus, *m-Isometric transformations of Hilbert space II,* Integr. Equat. Oper. Theory, **23**(1995), 1-48.

[3] J. Agler and M. Stankus, *m-Isometric transformations of Hilbert space III,* Integr. Equat. Oper. Theory, **24**(1996), 379-421.

[4] A. Athavale, *Some operator theoretic calculus for positive definite kernels,* Proc. Amer. Math. Soc. **112(3)**(1991), 701-708.

[5] M. Chō, S. Ôta and K. Tanahashi, *Invertible weighted shift operators which are m-isometries,* (to appear in Proceedings of American Mathematical Society).

M. Chō
Department of Mathematics, Faculty of Science, Kanagawa University, Yokohama 221-8686, Japan
E-mail address: chiyom01@kanagawa-u.ac.jp

S. Ôta
Department of Content and Creative Design
Kyushu University, Fukuoka 815-8540, Japan
E-mail address: ota@design.kyushu-u.ac.jp

K. Tanahashi
Tohoku Pharmaceutical University, Sendai 981-8558, Japan
E-mail address: tanahasi@tohoku-pharm.ac.jp