数理解析研究所講究録
第 1839 巻 2013 年 86-94

コーシー・シュワルツの不等式を用いたヒルベルト C*-加群上の作用素不等式

大阪教育大学数学教育講座　　瀬尾祐貴 (Yuki Seo)
Department of Mathematics Education, Osaka Kyoiku University

1. はじめに

本稿は、大阪教育大学の藤井淳一先生と藤井正俊先生との共同研究 [5] に基づいています。

内積空間におけるコーシー・シュワルツの不等式は、基本不等式のひとつであり、応用上も重要であり、ヒルベルト空間上の作用素の研究においても、基本的な道具になっています。一方、ヒルベルト C*-加群上のコーシー・シュワルツの不等式は、Pashke[9] によって定式化され、ヒルベルト C*-加群の理論を作る上での基礎となる重要な位置を占めています。作用素論という立場から、この不等式をみた場合、その定式化のままでは、利用しづらい面があります。そこで、私たちは、Pashke の定式化を少し修正し、作用素幾何平均の考え方を用いて、ヒルベルト C*-加群上のコーシー・シュワルツの不等式を得ました [4]。本稿では、それを用いて、ヒルベルト C*-加群上の作用素不等式を考察することが主な目的になります。やや冗長になりますが、ヒルベルト C*-加群の定義からはじめ、コーシー・シュワルツの不等式をゆっくりと解説したいと思います。日本語の解説としては、C*-環の定義から始まる丁寧な解説として、大内 [8] をあげさせてもらいます。大変読みやすく、これからヒルベルト C*-加群の勉強を始める場合にも、大変参考になります。本稿も、用語の説明など多くを参考にさせていただきました。

2. ヒルベルト C*-加群の定義

まず、ヒルベルト C*-加群の定義から始めます。$\mathscr{A}$ を単位元 e をもつ C*-環、$\mathscr{E}$ を右 $\mathscr{A}$-加群とします。すなわち、$\mathscr{E}$ は加法群であり、$\mathscr{A}$ の $\mathscr{E}$ への右作用 : $\mathscr{E}\times\mathscr{A}\mapsto\mathscr{E}((x,a)\mapsto xa)$ が存在し、次の性質を満たすとします。$x,y\in\mathscr{E}$ と $a,b\in\mathscr{A}$ に対して、

$$x(ab)=(xa)b$$
$$(x+y)a=xa+ya$$
$$x(a+b)=xa+xb.$$

さらに、$\mathscr{E}$ は複素ベクトル空間であり、$\mathscr{A}$-加群の構造と両立すると仮定します。即ち、次の式が成り立つとします。

$$\lambda(xa)=(\lambda x)a=x(\lambda a) \qquad (x\in\mathscr{E},a\in\mathscr{A},\alpha\in\mathbb{C}).$$

Definition 1. $\mathscr{A},\mathscr{E}$ を上のものとする。$\mathscr{E}$ が次の性質を満たす $\mathscr{A}$-値内積 $\langle\cdot\rangle:\mathscr{E}\times\mathscr{E}\mapsto\mathscr{E}$ を持つとき、$\mathscr{E}$ を前ヒルベルト $\mathscr{A}$-加群 (*pre-Hilbert $\mathscr{A}$-module*) と言います。

(i) (線形性) $\langle x,\alpha y+\beta z\rangle=\alpha\langle x,y\rangle+\beta\langle x,z\rangle \qquad (x,y,z\in\mathscr{E},\alpha,\beta\in\mathbb{C})$
(ii) $\langle x,ya\rangle=\langle x,y\rangle a \qquad (x,y\in\mathscr{E},a\in\mathscr{A})$
(iii) (対称性) $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle^* \qquad (x,y\in\mathscr{E})$
(iv) (正値性) $\langle x,x\rangle\geq 0$ *and* $\langle x,x\rangle=0\Longleftrightarrow x=0.$

前ヒルベルト空間 $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ に対して、次のコーシーシュワルツの不等式が成り立つ。

$$|\langle x,y\rangle|^2\leq\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle \qquad (x,y\in H) \tag{1}$$

もしくは、両辺の平方根をとって、

(2) $$|\langle x,y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle} \qquad (x,y\in H).$$

一方、Paschke [9] は前ヒルベルト $\mathscr{A}$-加群に対して、次のコーシー・シュワルツ型の不等式が成り立つことを示しました。

Proposition 2. $\mathscr{E}$ が前ヒルベルト $\mathscr{A}$-加群とするとき、次の式が成り立つ。

(3) $$\langle x,y\rangle^*\langle x,y\rangle \leq \|\langle x,x\rangle\|\langle y,y\rangle \qquad (x,y\in\mathscr{E}).$$

ただし、ノルム $\|\langle x,x\rangle\|$ は、C^*-環 $\mathscr{A}$ のノルムを表すとします。

証明. Lance [7] による証明を紹介します。正値性と $\langle x,x\rangle \leq \|\langle x,x\rangle\|$ により、

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \frac{x\langle x,y\rangle}{\|\langle x,x\rangle\|} - y, \frac{x\langle x,y\rangle}{\|\langle x,x\rangle\|} - y\rangle \\ &= \frac{\langle x,y\rangle^*\langle x,x\rangle\langle x,y\rangle}{\|\langle x,x\rangle\|^2} - 2\frac{\langle x,y\rangle^*\langle x,y\rangle}{\|\langle x,x\rangle\|} + \langle y,y\rangle \\ &\leq -\frac{1}{\|\langle x,x\rangle\|}\langle x,y\rangle^*\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \end{aligned}$$

となりますから、式を整理して、Proposition 2 を得ることができます。 □

この Proposition 2 から $x\in\mathscr{E}$ に対して、$\|x\| = \sqrt{\|\langle x,x\rangle\|}$ とおけば、$\|x\|$ は $\mathscr{E}$ のノルムになることが分かります。実際、正値性と斉次性はすぐに分かり、三角不等式については、

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \|\langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle\| \\ &\leq \|\langle x,x\rangle\| + \|\langle x,y\rangle\| + \|\langle y,x\rangle\| + \|\langle y,y\rangle\| \\ &\leq \|\langle x,x\rangle\| + 2\|\langle x,x\rangle\|^{\frac{1}{2}}\|\langle y,y\rangle\|^{\frac{1}{2}} + \|\langle y,y\rangle\| \\ &= \left(\|\langle x,x\rangle\|^{\frac{1}{2}} + \|\langle y,y\rangle\|^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

から、$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ がわかります。

Definition 3. $\mathscr{E}$ を前ヒルベルト $\mathscr{A}$-加群とする。ノルム $\|x\| = \sqrt{\|\langle x,x\rangle\|}$ に関して、$\mathscr{E}$ が完備であるとき、$\mathscr{E}$ をヒルベルト $\mathscr{A}$-加群 *(Hilbert $\mathscr{A}$-module)* と言います。

Example 4. もっと簡単なヒルベルト $\mathscr{A}$-加群の例は次です。C^*-環 $\mathscr{A}$ に対して、$\mathscr{A}$-値内積を

$$\langle a,b\rangle = a^*b \qquad (a,b\in\mathscr{A})$$

によって定義する。このとき、$\mathscr{A}$ はヒルベルト $\mathscr{A}$-加群になります。その他の興味深い例については、大内 [8] や *Lance*[7] を参考にしてください。

3. 前ヒルベルト C*-加群上のコーシー・シュワルツの不等式

Paschke による前ヒルベルト C*-加群上のコーシー・シュワルツ不等式 (3) は、応用上も大変重要な結果ですが、作用素論的な観点から見ると、評価にノルムによる評価があり、作用素不等式を考察する場合は障害になります。そこで、作用素論的な立場から前ヒルベルト C*-加群上のコーシー・シュワルツ不等式を考えたいと思います。

前ヒルベルト空間上のコーシー・シュワルツの不等式 $|\langle x,y\rangle|^2 \le \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$ をそのまま作用素版に直すことはできません。なぜなら、正作用素の積は一般に自己共役な作用素にすらならないという事実があり、右辺を考えることに意味がないからです。$\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$ は自己共役とは限らないので、その実部 $\mathrm{Re}(\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle)$ を考えれば、自己共役になりますので順序を考えることに意味が出てきます。そこで、次のような定式化を考えることは自然でしょう。

$$|\langle x,y\rangle|^2 \le \mathrm{Re}(\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle) \qquad (x,y\in\mathscr{E})$$

もしくは、

$$\mathrm{Re}\langle x,y\rangle \le \mathrm{Re}(\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}\langle y,y\rangle^{\frac{1}{2}}) \qquad (x,y\in\mathscr{E})$$

などが、容易に思いつきます。しかし、残念ながら、これらはすぐに反例が見つかります。実際、$\mathscr{A}=\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ とおく。これは、内積 $\langle x,y\rangle = x^*y$ をもつ 2×2 行列のなすヒルベルト C*-加群になります。$x=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ と $y=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$ とおくと、$|\langle x,y\rangle|^2 \not\le \mathrm{Re}\langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$ となり、 $\mathrm{Re}\langle x,y\rangle \not\le \mathrm{Re}\langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}\langle y,y\rangle^{\frac{1}{2}}$ となります。

実部を取ることによって、自己共役作用素にすることで順序をつける方向はうまくいきません。そこで、あきらめないことが大切になります。次に、私たちは、作用素幾何平均の考えを採用することにしましょう。

正作用素 $a,b\in\mathscr{A}$ に対して、その作用素幾何平均 $a\sharp b$ を a が可逆の時は、

$$a\sharp b = a^{\frac{1}{2}}\left(a^{-\frac{1}{2}}ba^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}$$

で定義されます。a が可逆でないときは、任意の $\varepsilon>0$ に対して、$a+\varepsilon e$ を考えると、作用素幾何平均の単調性により $(a+\varepsilon e)\sharp b$ は $\varepsilon\to 0$ のとき、強収束し、その強極限を $a\sharp b$ でかくことにします。この場合、$a\sharp b$ は $\mathscr{A}$ に属するとは限りません。より広い空間である $\mathscr{A}$ の強閉包 $\mathscr{A}''$ に属することがわかります。このとき、$a\sharp b$ は正作用素になり、幾何平均としてもつべき良い性質をすべて持っていることがわかります。また、a と b が可換の時は、$a\sharp b = a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$ が成り立ちます。詳しくは [6] を参考にしてほしい。さて、そうすると私たちは次が成り立つことを期待できます。

$$|\langle x,y\rangle| \le \langle x,x\rangle \sharp \langle y,y\rangle.$$

この不等式は見た感じも美しく、前ヒルベルト C*-加群上のコーシー・シュワルツの不等式と呼ぶに十分な定式化と思えます。でも、残念なことに、この不等式も成立しません。$\mathscr{A}=\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ のときに、簡単に反例を見つけることができるからです。実際、上の例と同じ例で反例を構成することができます。$x=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ と $y=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$ とおきます。そのとき、$|\langle x,y\rangle| = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ そして、$\langle x,x\rangle=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\langle y,y\rangle=\begin{pmatrix}4&0\\0&1\end{pmatrix}$ となり、これらは可換ですから、$\langle x,x\rangle\sharp\langle y,y\rangle=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$ になります。従って、$|\langle x,y\rangle| = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ かつ、$\langle x,x\rangle\sharp\langle y,y\rangle = \begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$ ですから、$|\langle x,y\rangle| \not\le \langle x,x\rangle\sharp\langle y,y\rangle$.

絶対に順序関係はつきません。行列の向きが 90° ずれていると考えられます。このずれをどう修正すればいいでしょうか。たとえば、$u = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと、

$$u^*\langle x, x\rangle u = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となりますから、今度は、$u^*\langle x, x\rangle u \sharp \langle y, y\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となり、順序関係を持つ可能性が出てきます。そこで、$\langle x, x\rangle$ を少しひねって順序がつくように考えて、次のような結果を得ました。

Theorem 5. $\mathscr{A}$ を単位元 e をもつ C^*-環、$\mathscr{E}$ を前ヒルベルト $\mathscr{A}$-加群とする。$x, y \in \mathscr{E}$ に対して、$\langle x, y\rangle$ の極分解 $\langle x, y\rangle = u|\langle x, y\rangle|$ において、部分等距離作用素 $u \in \mathscr{A}$ とする。このとき、

$$|\langle x, y\rangle| \leq u^*\langle x, x\rangle u \sharp \langle y, y\rangle \tag{4}$$

が成り立つ。また、$\langle y, y\rangle$ が可逆の時、(4) において等号が成り立つための必要十分条件は $xu = yb$ となる $b \in \mathscr{A}$ が存在するときです。

Remark 6. 極分解 $\langle x, y\rangle = u|\langle x, y\rangle|$ において、一般的に $u \in \mathscr{A}''$ です。*Theorem 5* は $u \in \mathscr{A}$ になるという仮定を要請しています。勿論、C^*-環 $\mathscr{A}$ が W^*-環であれば、この仮定は不要です。また、等号条件はヒルベルト空間上のコーシー・シュワルツの不等式の等号条件と同様に、$\mathscr{A}$-値の一次従属性で成立することを言っています。

Theorem 5 の証明はいくつかの方法が示されていますが、ここでは、行列を用いた簡単な方法を紹介します。そのためには、次の作用素幾何平均の特徴付けを必要になります [1]。証明は、Bhatia[2] の本に詳しいのが載っていますので参考にしてください。

Lemma 7. $a, b \in \mathscr{A}$ が正作用素のとき、

$$a \sharp b = \max\left\{X \in \mathscr{A}'' \mid X = X^*, \begin{pmatrix} a & X \\ X & b \end{pmatrix} \geq 0\right\}.$$

さて、それでは、Theorem 5 の証明をします。

Theorem 5 の証明. Lance[7, Lemma 4.2] によって、

$$\begin{pmatrix} \langle x, x\rangle & \langle x, y\rangle \\ \langle x, y\rangle^* & \langle y, y\rangle \end{pmatrix} \geq 0$$

が、わかります。そして、

$$\begin{pmatrix} u^*\langle x, x\rangle u & |\langle x, y\rangle| \\ |\langle x, y\rangle| & \langle y, y\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^* & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \langle x, x\rangle & \langle x, y\rangle \\ \langle x, y\rangle^* & \langle y, y\rangle \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \geq 0.$$

そこで、Lemma 7 によって、欲しい不等式

$$|\langle x, y\rangle| \ \leq \ u^*\langle x, x\rangle u \sharp \langle y, y\rangle$$

が直ちに得られます。 □

さて、この前ヒルベルト C*-加群上のコーシー・シュワルツの不等式 (4) を用いて、ヒルベルト C*-加群上の作用素不等式を考えていくことにします。

4. 共役可能作用素

まず、ヒルベルト C*-加群上の作用素の復習から始めます。

Definition 8. $\mathscr{E}$ をヒルベルト $\mathscr{A}$-加群とします。写像 $T:\mathscr{E}\mapsto\mathscr{A}$ が共役可能 *(adjointable)* とは次の性質を満たす写像 $T^*:\mathscr{E}\mapsto\mathscr{E}$ が存在することです。

$$\langle Tx,y\rangle=\langle x,T^*y\rangle \qquad (x,y\in\mathscr{E}).$$

T^* を T の共役作用素 *(adjoint operator)* と言います。$\mathscr{E}$ から $\mathscr{E}$ への共役可能作用素全体の集合を $\mathcal{L}_{\mathscr{A}}(\mathscr{E})=\mathcal{L}(\mathscr{E})$ とかきます。

T が共役可能なら、その共役作用素 T^* は一意に決まり、T^* も共役可能で、$T^{**}=T$ になります。また、$T,S\in\mathcal{L}(\mathscr{E})$ なら、$(TS)^*=S^*T^*$ となることもわかります。また、$T\in\mathcal{L}(\mathscr{E})$ のとき、T は $\mathscr{A}$-加群の準同型写像で、有界になりますが、その逆は一般的には成り立ちません。その反例は大内 [8] に詳しく解説されています。
$T\in\mathcal{L}(\mathscr{E})$ に対して、T のノルム $\| T \|$ を

$$\| T \|=\sup\{\| Tx \|:\| x \|\leq 1\}$$

で定義すると、このノルムと共役作用素を取ることで定義した involution のもとで、$\mathcal{L}(\mathscr{E})$ は、C*-環になります。
C*-環 $\mathcal{L}_{\mathscr{A}}(\mathscr{E})$ の正の元 $(T\geq 0)$ は次の命題によって特徴づけられます。

Proposition 9. 線形写像 $T:\mathscr{E}\mapsto\mathscr{E}$ に対して、次の *2* つの性質は同値になります。

(i) $T\in\mathcal{L}_{\mathscr{A}}(\mathscr{E})$ で *C**-環 $\mathcal{L}_{\mathscr{A}}(\mathscr{E})$ の元として、$T\geq 0$,

(ii) すべての $x\in\mathscr{E}$ に対して、$\mathscr{A}$ の元として、$\langle Tx,x\rangle\geq 0$.

また、$S,T\in\mathcal{L}(\mathscr{E})$ を自己共役作用素としたとき、$T-S\geq 0$ のとき、$T\geq S$ と書けば、これで、自己共役作用素の全体に順序が入ります。

この節の詳しい解説と証明は、大内 [8] または Lance[7] を参考にしてください。

5. コーシーの不等式

この節では、$\mathscr{A}$ を単位元 e をもつ C*-環、$\mathscr{E}$ をヒルベルト $\mathscr{A}$-加群とします。

Theorem 10 (一般化されたコーシー・シュワルツの不等式). T を $\mathcal{L}(\mathscr{E})$ の正作用素とする。$x,y\in\mathscr{E}$ に対して、$\langle x,Ty\rangle$ の極分解 $\langle x,Ty\rangle=u|\langle x,Ty\rangle|$ において、部分等距離作用素 $u\in\mathscr{A}$ とする。このとき、

$$|\langle x,Ty\rangle|\leq u^*\langle x,Tx\rangle u \,\sharp\, \langle y,Ty\rangle \tag{5}$$

が成り立つ。特に、T が可逆な正作用素のときは、

$$\langle x,x\rangle\leq\langle x,Tx\rangle \,\sharp\, \langle x,T^{-1}x\rangle \tag{6}$$

がすべてのベクトル $x\in\mathscr{E}$ について成り立つ。

証明. Theorem 5 において、x と y をそれぞれ $T^{\frac{1}{2}}x$ と $T^{\frac{1}{2}}y$ と置けば、私たちは直ちに (5) を得ます。T が可逆なときは、$\langle x,x\rangle=\langle T^{\frac{1}{2}}x,T^{-\frac{1}{2}}x\rangle$ と変形でき、しかも正の元ですから、極分解の時に表れる部分等距離作用素は単位作用素になり、Theorem 5 を再び用いて、

$$\langle x,x\rangle=\langle T^{\frac{1}{2}}x,T^{-\frac{1}{2}}x\rangle\leq\langle x,Tx\rangle \,\sharp\, \langle x,T^{-1}x\rangle$$

がわかります。 □

Remark 11. Thereom 10 の (6) の商型の逆不等式は、カントロヴィッチ不等式と言われています。これは、[4] において、次のように示されています。T を可逆な正作用素で、正の実数 α,β に対して、$\alpha I \le T \le \beta I$ を満たしているとします。このとき、すべてのベクトル $x \in \mathscr{E}$ に対して

$$\langle x, Tx\rangle \sharp \langle x, T^{-1}x\rangle \le \frac{\alpha+\beta}{2\sqrt{\alpha\beta}}\langle x, x\rangle$$

が成り立ちます。勿論、作用素凸性の議論により、Hölder-McCarthy 型の不等式が成り立ちますが、その逆不等式も導くことができます。上と同じ条件の下で、すべてのベクトル $x \in \mathscr{E}$ に対して

$$\langle x, T^{-1}x\rangle \le \frac{(\alpha+\beta)^2}{4\alpha\beta}\langle x, x\rangle\langle x, Tx\rangle^{-1}\langle x, x\rangle$$

が成り立つ。実際、可換性により $T^{-1}(\beta I - T)(T - \alpha I) \ge 0$ だから、$T^{-1} \le -\frac{1}{\alpha\beta}T + \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}I$ がわかります。$\langle x, x\rangle = e$ と仮定しても一般性を失いません。従って、

$$\langle x, T^{-1}x\rangle \le -\frac{1}{\alpha\beta}\langle x, Tx\rangle + \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}e \le \frac{(\alpha+\beta)^2}{4\alpha\beta}\langle x, Tx\rangle^{-1}$$

がわかります。

さて、実数版のコーシーの不等式は、2 組の正の n 個の実数 $a_i, b_i (i = 1, \ldots, n)$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

が成り立ちます。そこで、ヒルベルト C*-加群上のコーシーの不等式を考えよう。勿論、次の定理は、実数版のコーシーの不等式の拡張であり、非可換版になっています。

Theorem 12. A と B を $\mathcal{L}(\mathscr{E})$ の可逆な正作用素とする。このとき、任意のベクトル $x \in \mathscr{E}$ に対して、

$$\langle x, A^2 \sharp B^2 x\rangle \le \langle x, A^2 x\rangle \sharp \langle x, B^2 x\rangle \tag{7}$$

が成り立つ。

証明. Theorem 10 の (6) において、x と T をそれぞれ $(A^{-1}B^2A^{-1})^{\frac{1}{4}}Ax$ と $(A^{-1}B^2A^{-1})^{\frac{1}{2}}$ に置き直せば良い。 □

Remark 13. 上の証明からわかるように、Theorem 10 の (6) と Theorem 12 の (7) は同値な関係にあります。実際、Theorem 12 の (7) において、$A = T^{\frac{1}{2}}, B = T^{-\frac{1}{2}}$ とおけば、Theorem 10 の (6) を得ることができます。

6. ヘルダーの不等式

実数版のヘルダーの不等式を思いだそう。2 組の正の n 個の実数 $a_i > 0$ と $b_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ と $1/p + 1/q = 1$ に対して、

$$p > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$p<0 \text{ and } 0<p<1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

が成り立つ。さて、この不等式のヒルベルト C*-加群版はどうなるのか。その前に、新しい記号を導入します。正作用素 $a, b \in \mathscr{A}$ と $p \in [0,1]$ に対して、その重み付き作用素幾何平均 $a \sharp_p b$ を a が可逆の時は、

$$a \sharp_p b = a^{\frac{1}{2}} \left(a^{-\frac{1}{2}} b a^{-\frac{1}{2}}\right)^p a^{\frac{1}{2}} \qquad (p \in [0,1])$$

で定義します。また、$p \notin [0,1]$ に対しては、作用素幾何平均にはならないので、次のような記号を使います。

$$a \natural_p b = a^{\frac{1}{2}} \left(a^{-\frac{1}{2}} b a^{-\frac{1}{2}}\right)^p a^{\frac{1}{2}} \qquad (p \notin [0,1]).$$

さて、次が、ヒルベルト C*-加群上のヘルダーの不等式である。

Theorem 14. A と B を $\mathcal{L}(\mathscr{E})$ の可逆な正作用素とする。このとき、$\langle x, x\rangle$ が可逆なベクトル $x \in \mathscr{E}$ と $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ に対して、
(1) : $1<p\leq 2$ のとき、

$$\langle x, B^q \sharp_{\frac{1}{p}} A^p x\rangle \leq \langle x, B^q x\rangle \sharp_{\frac{1}{p}} \langle x, A^p\rangle$$

または、

$$\langle x, A^p \sharp_{\frac{1}{q}} B^q x\rangle \leq \langle x, A^p x\rangle \sharp_{\frac{1}{q}} \langle x, B^q x\rangle.$$

(2) : $\frac{1}{2}\leq p<1$ のとき、

$$\langle x, B^q \natural_{\frac{1}{p}} A^p x\rangle \geq \langle x, B^q x\rangle \natural_{\frac{1}{p}} \langle x, A^p\rangle$$

または、

$$\langle x, A^p \natural_{\frac{1}{q}} B^q x\rangle \geq \langle x, A^p x\rangle \natural_{\frac{1}{q}} \langle x, B^q x\rangle$$

が、成り立つ。

Remark 15. Theorem 14 において、$p=q=2$ とおけば、私たちはヒルベルト $\mathscr{A}$-加群版のコーシーの不等式 (Theorem 12) を得る。

証明. $T \in \mathcal{L}(\mathscr{E})$ に対して、

$$\Phi(T) = \langle x\langle x, x\rangle^{-\frac{1}{2}}, Tx\langle x, x\rangle^{-\frac{1}{2}}\rangle$$

とおく。このとき、Φ は、$\mathcal{L}(\mathscr{E})$ から $\mathscr{A}$ への単位的な正線形写像になっている。$1<p\leq 2$ だから、t^p は作用素凸性を持つので、エンゼンの作用素不等式により

$$\Phi(T)^p \leq \Phi(T^p)$$

が成り立つ。従って、

$$\left(\langle x, x\rangle^{-\frac{1}{2}}\langle x, Tx\rangle\langle x, x\rangle^{-\frac{1}{2}}\right)^p \leq \langle x, x\rangle^{-\frac{1}{2}}\langle x, T^p x\rangle\langle x, x\rangle^{-\frac{1}{2}}.$$

また、$\frac{1}{2}\leq\frac{1}{p}<1$ であるから、Löwner-Heinz の不等式により

$$\begin{aligned}\langle x, Tx\rangle &\leq \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \left(\langle x, x\rangle^{-\frac{1}{2}}\langle x, T^p x\rangle\langle x, x\rangle^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{p}} \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}} \\ &= \langle x, x\rangle \sharp_{\frac{1}{p}} \langle x, T^p x\rangle\end{aligned}$$

がわかり、この不等式で x と T をそれぞれ $B^{\frac{q}{2}}x$ と $\left(B^{-\frac{q}{2}}A^pB^{-\frac{q}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}$ に置き直すと、私たちは Theorem 14 の (1) を得ます。Theorem 14 の (2) についても、$\frac{1}{2} \le p < 1$ のとき、$1 < \frac{1}{p} \le 2$ だから、$\Phi(T)^{\frac{1}{p}} \le \Phi(T^{\frac{1}{p}})$ が成り立ちます。よって、

$$\left(\langle x,x\rangle^{-\frac{1}{2}}\langle x,Tx\rangle\langle x,x\rangle^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{p}} \le \langle x,x\rangle^{-\frac{1}{2}}\langle x,T^{\frac{1}{p}}x\rangle\langle x,x\rangle^{-\frac{1}{2}}$$

になりますから、整理すると

$$\langle x,x\rangle \natural_{\frac{1}{p}} \langle x,Tx\rangle \ \le \ \langle x,T^{\frac{1}{p}}x\rangle.$$

あとは、同様に求めることができます。 □

さて、上の証明の中で使われた Φ を引き続き考えることにします。$p \in [0,1]$ に対して、エンゼンの作用素不等式から $\Phi(T^p) \le \Phi(T)^p$ がわかり、書き直すと、$\langle x,T^px\rangle \le \langle x,x\rangle \sharp_p \langle x,Tx\rangle$ となります。この不等式で x と T をそれぞれ Bx と $B^{-1}A^2B^{-1}$ に置き直すと、ヒルベルト C*-加群上のコーシーの不等式（Theorem 12 ）の weighted 版が得られます。

Theorem 16. A と B を $\mathcal{L}(\mathscr{E})$ の可逆な正作用素とする。このとき、$\langle x,x\rangle$ が可逆なベクトル $x \in \mathscr{E}$ に対して、

$$\langle x, A^2 \sharp_p B^2x\rangle \le \langle x,A^2x\rangle \sharp_p \langle x,B^2x\rangle \qquad (p \in [0,1]) \tag{8}$$

が成り立つ。

7. 荷重混合的シュワルツ不等式

$T \in \mathcal{L}(\mathscr{E})$ に対して、T の値域とカーネルをそれぞれ $R(T)$ と $N(T)$ で表すことにします。$R(T) = \{Tx : x \in \mathscr{E}\}$ そして、$N(T) = \{x \in \mathscr{E} : Tx = 0\}$ です. $\mathscr{E}$ の閉部分加群 $\mathscr{M}$ が補完的 (complemented) であるとは、$\mathscr{X} = \mathscr{M} \oplus \mathscr{M}^\perp$ が成り立つときを言います。さて、T と T^* の値域の閉包が両方とも補完的とします。このとき、T は極分解ができて、しかも対応する部分等距離作用素が C*-環 $\mathcal{L}(\mathscr{E})$ に属する。即ち、$T = U|T|$ でかつ $U \in \mathcal{L}(\mathscr{E})$ であるとします。このとき、次の事柄が成り立ちます。
(1) $N(|T|) = N(T)$
(2) すべての正の実数 q に対して、$|T^*|^q = U|T|^qU^*$
である。

このとき、私たちは正値性を要求しない一般的な作用素について、次の結果を持ちます。

Theorem 17 (荷重混合的シュワルツ不等式). T と T^* の値域の閉包が両方とも補完的な作用素を $T \in \mathcal{L}(\mathscr{E})$ とする。$x,y \in \mathscr{E}$ に対して、$\langle x,Ty\rangle$ の極分解 $\langle x,Ty\rangle = u|\langle x,Ty\rangle|$ において、部分等距離作用素 $u \in \mathscr{A}$ とする。このとき、

$$|\langle Tx,y\rangle| \le u^*\langle x,|T|^{2\alpha}x\rangle u \sharp \langle y,|T^*|^{2\beta}y\rangle \tag{9}$$

が $\alpha+\beta = 1$ をみたす、すべての $\alpha,\beta \in [0,1]$ に対して成り立つ。

証明. 仮定により、T の極分解を $T = U|T|$ とします。$U \in \mathcal{L}(\mathscr{E})$ です。$\langle Tx,y\rangle = \langle U|T|x,y\rangle = \langle |T|^\alpha x, |T|^\beta U^*y\rangle = u|\langle Tx,y\rangle| = u|\langle |T|^\alpha x, |T|^\beta U^*y\rangle|$ ですから、ヒルベルト

C*-加群上のコーシー・シュワルツの不等式 (Theorem 5) により、

$$\begin{aligned}|\langle Tx,y\rangle| &= |\langle U|T|x,y\rangle| = |\langle |T|^{\alpha}x, |T|^{\beta}U^{*}y\rangle| \\ &\leq u^{*}\langle x,|T|^{2\alpha}x\rangle u \,\sharp\, \langle y, U|T|^{2\beta}U^{*}y\rangle \\ &= u^{*}\langle x,|T|^{2\alpha}x\rangle u \,\sharp\, \langle y, |T^{*}|^{2\beta}y\rangle.\end{aligned}$$

□

特に、Theorem 17 において、$\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ とおけば、

$$|\langle Tx,y\rangle| \leq u^{*}\langle x,|T|x\rangle u \,\sharp\, \langle y,|T^{*}|y\rangle.$$

が、成り立つ。

REFERENCES

[1] T.Ando, *Topics on Operator Inequalities*, Lecture notes (mimeographed), Hokkaido Univ., Sapporo, 1978.

[2] R. Bhatia, *Positive Definite Matices*, Princeton Ser. Appl. Math., Princeton University Press, Princeton, NJ, 2007.

[3] J.I. Fujii, M. Fujii, M.S. Moslehian, J. Pečarić and Y. Seo, *Reverse Cauchy–Schwarz type inequalities in pre-inner product C^*-modules*, Hokkaido Math. J., **40** (2011), 1–17.

[4] J.I. Fujii, M. Fujii, M.S. Moslehian and Y. Seo, *Cauchy-Schwarz inequality in semi-inner product C^*-modules via polar decomposition*, J. Math. Anal. Appl., **394** (2012), 835-840.

[5] J.I. Fujii, M. Fujii and Y. Seo, *Operator inequalities on Hilbert C^*-modules via the Cauchy-Schwarz inequality*, to appear in Math. Inequal. Appl.

[6] F. Kubo and T. Ando, *Means of positive linear operators*, Math. Ann., **246**(1980), 205–224.

[7] E.C. Lance, *Hilbert C^*-Modules*, London Math. Soc. Lecture Note Series 210, Cambridge Univ. Press, 1995.

[8] M. O'uchi, *Hilbert C^*-modules*(Japanese), www.mi.s.osakafu-u.ac.jp/ ouchi/HCmodule.pdf.

[9] W.L. Paschke, *Inner product modules over B^*-algebras*, Trans. Amer. Math. Soc., **182** (1973), 443–468.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS EDUCATION, OSAKA KYOIKU UNIVERSITY, 4-698-1 ASAHIGAOKA, KASHIWARA, OSAKA 582-8582 JAPAN.

E-mail address : `yukis@cc.osaka-kyoiku.ac.jp`